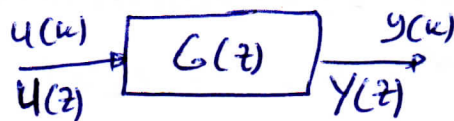


Chapitre 3: Représentation des systs échantillonnés

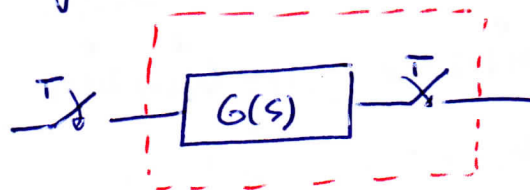
1/ Syst discret et syst échantillonné:

Un syst discret est un syst qui transforme une suite de notes appelée "séquence d'entrée" en une autre suite appelée "séquence de sortie".



syst discret par nature

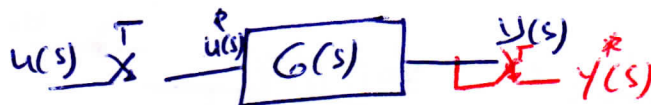
Un syst discret peut être un syst continu dont on échantillonne l'entrée et la sortie.



$G(z)$

syst échantillonné

2/ Fonction de transfert d'un syst échantillonné:



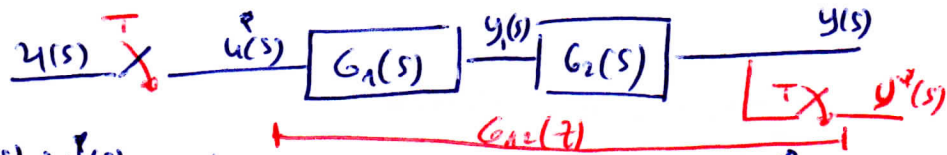
$$Y(s) = G(s) u^*(s) \Rightarrow Y^*(s) = [G(s) \cdot u^*(s)]^* = G^*(s) u^*(s)$$

$$\Rightarrow G^*(s) = \frac{Y^*(s)}{u^*(s)} \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Dans l'analyse d'un tel syst on s'intéresse aux valeurs de la sortie qu'aux instants d'échantillonnage (kT). Ce qui nous amène à considérer un échantillonneur fictif dans la sortie, celui-ci est synchronisé avec celui de l'entrée. On peut alors définir la F.T d'un syst échantillonné de la manière suivante: comme la transformée en z de sa F.T continue $G(s)$, i.e. $G(z) = Z[G(s)]$

4/ Fonctions de transfert échantillonnées en série:

A.1/



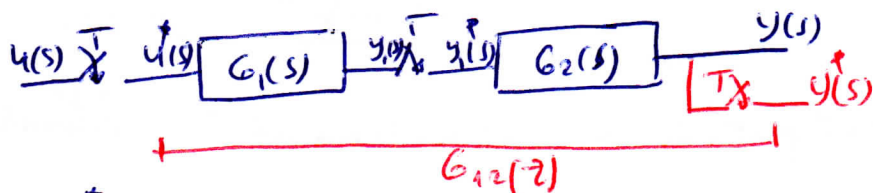
$$y_1(s) = G_1(s) u^*(s) ; y(s) = G_2(s) \cdot y_1(s) = G_1(s) G_2(s) u^*(s)$$

$$\Rightarrow y^*(s) = [G_1(s) G_2(s) u^*(s)]^* = [G_1(s) G_2(s)]^* u^*(s)$$

$$\Rightarrow Y(z) = Z[G_1(s) G_2(s)] \cdot U(z)$$

donc la f.T du syst est: $G_{12}(z) = Z[G_1(s) G_2(s)]$

A.2/



$$\text{on a: } y_1(s) = G_1(s) u^*(s) \Rightarrow y_1(s) = G_1(s) u(s)$$

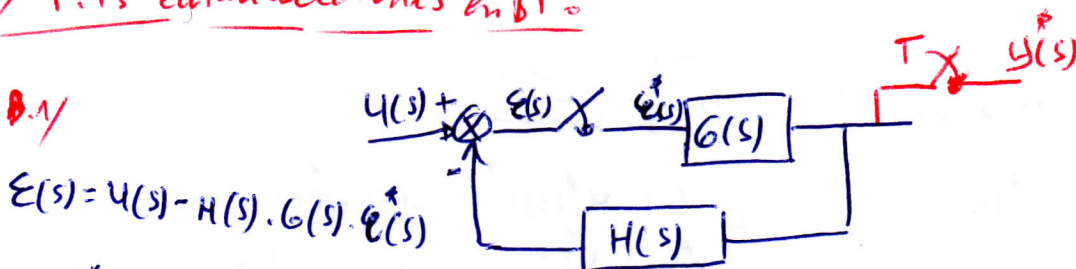
$$y(s) = y_1(s) \cdot G_2(s) = G_1(s) u(s) G_2(s) \Rightarrow Y(s) = G_1(s) G_2(s) \cdot u(s)$$

$$\Rightarrow Y(z) = G_1(z) G_2(z) U(z)$$

donc la F.T du syst est: $G_{12}(z) = Z[G_1(s)] \cdot Z[G_2(s)]$

5/ F.Ts échantillonnées en BF:

B.1/

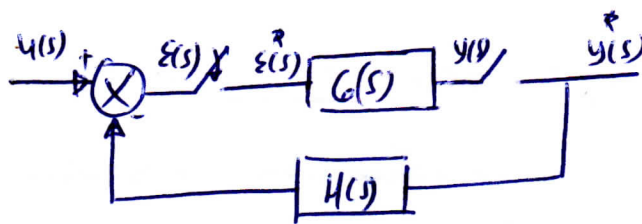


$$\Rightarrow E(s) = u(s) - [H(s) G(s)]^* E(s) \Rightarrow E(s) = \frac{u(s)}{1 + [H(s) G(s)]^*}$$

$$\text{et } Y(s) = G(s) \cdot E(s) = \frac{u(s) G(s)}{1 + [H(s) G(s)]^*} \Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{1 + [H(s) G(s)]^*} u(s)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{G(z)}{1 + H(z) G(z)} U(z) \Rightarrow G_{BF}(z) = \frac{G(z)}{1 + H(z) G(z)}$$

B.2/



on a: $\varepsilon(s) = u(s) - H(s) y(s) \Rightarrow \varepsilon(s) = u(s) - H(s) y(s)$

$y(s) = G(s) \cdot \varepsilon(s) \Rightarrow y(s) = G(s) \varepsilon(s) = G(s) (u(s) - H(s) y(s))$

$\Rightarrow y(s) = G(s) u(s) - H(s) G(s) y(s)$

$\Rightarrow y(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) G(s)} u(s) \Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{G(z)}{1 + H(z) G(z)}}$

3/ F.T échantillonnée d'un syst. continu

4/ Equations aux différences: (Voir page "Site AP")

par définition une équation aux différences linéaire à coefficients constants d'ordre n est une relation du type:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 u(k+m) + b_1 u(k+m-1) + \dots + b_m u(k)$$

avec $y(k)$ et $u(k)$ respectivement la sortie et l'entrée à l'instant (kT) .

Après un changement de variable $d = n - m$, il en résulte:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m) \quad \textcircled{I}$$

La T.Z de \textcircled{I} donne: $(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) z^{-d} U(z)$

Par conséquent: $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-d} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$

si on multiplie par: $\frac{z^n}{z^n}$, on obtient: $\boxed{G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}}$

exemple: calculer la F.T échantillonnée de: $y(k+1) = y(k) + u(k)$

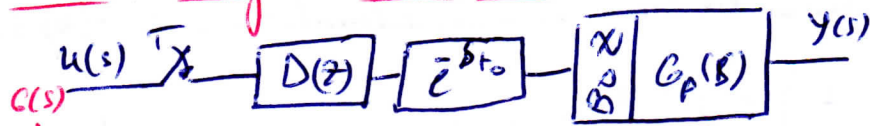
on a: $y(k+1) - y(k) = u(k) \Rightarrow y(k) - y(k-1) = u(k-1)$

$\Rightarrow (1 - z^{-1}) y(k) = z^{-1} u(k) \Rightarrow \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z - 1}$

2/ $y(k+2) + 2y(k+1) = y(k) + u(k+1)$

$\Rightarrow y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = u(k-1) \Rightarrow (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) y(k) = z^{-1} u(k)$
 $\Rightarrow \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}$

3. F.T. échantillonnée d'un syst retardé (avec retard):



$$y(t) = \mathcal{Z} \left[G_P(s) \cdot e^{-s\Delta T_0} \right] D(z) \cdot u(t) ; \text{ pour } t_0 = kT + \Delta T \text{ avec } : 0 \leq \Delta T \leq T$$

$$Y(z) = \mathcal{Z} \left[G(s) e^{-s\Delta T} \cdot e^{-s\Delta T_0} \right] D(z) u(z) = z^{-k} \mathcal{Z} \left[G(s) e^{-s\Delta T} \right] D(z) \cdot u(z)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{u(z)} = z^{-k} G(z, m) \cdot D(z)$$

Exemple: Calculer la F.T. échantillonnée pour: $G_P(s) = \frac{1}{s+1}$, $D(z) = \frac{z-1}{z}$ avec $T = 0.05s$ et $t_0 = 0.12s$.

On a: $t_0 = 2T + \Delta T \Rightarrow \Delta T = 0.02s \Rightarrow \Delta = 0.4 \Rightarrow m = 0.6$ et $k = 2$.

$$\Rightarrow Y(z) = z^{-2} G(z, m) \cdot D(z) u(z) \text{ et on a: } G(z, m) = \mathcal{Z} \left[\frac{(1 - e^{-Ts})}{s(s+1)} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s+1)} \right]$$

$$= [1 - z^{-1}] \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right]$$

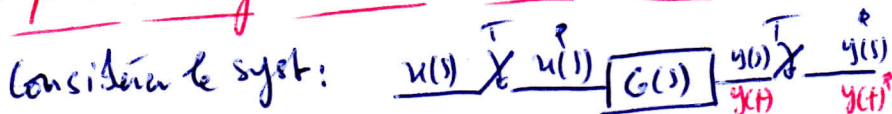
$$\text{on a aussi: } \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} \right] = \frac{1}{z-1} \text{ et } \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s+1} \right] = \frac{e^{-mT}}{z - e^{-T}} = \frac{e^{-0.6T}}{z - e^{-T}}$$

$$\Rightarrow G(z, m) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-0.6T}}{z - e^{-T}} \right] = \frac{1}{z} - \frac{(z-1)e^{-0.6T}}{z(z - e^{-T})} = \frac{z - e^{-T} - (z-1)e^{-0.6T}}{z(z - e^{-T})}$$

$$\Rightarrow Y(z) = z^{-2} \cdot \frac{z(1 - e^{-0.6T}) + (e^{-0.6T} - e^{-T})}{z(z - e^{-T})} \cdot \frac{z-1}{z} u(z)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{[z(z - e^{-0.6T}) + (e^{-0.6T} - e^{-T})](z-1)}{z^4(z - e^{-T})}$$

Réponse d'un syst entre deux instants d'échantillonnage:

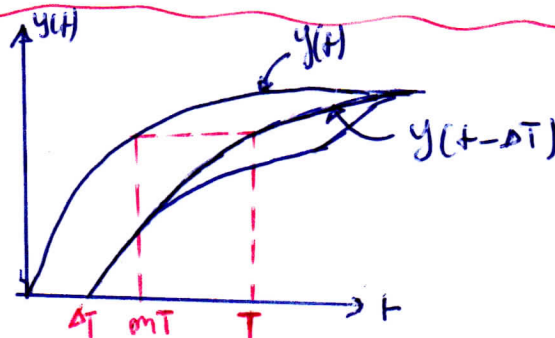


on veut calculer $y(mT)$ tel que: $0 \leq m \leq 1$.

on pose: $\Delta = 1 - m \Rightarrow y(mT) = y[(1-\Delta)T] = y(T - \Delta T)$

alors si on suppose que le retard: $\Delta T = \frac{T}{4}$, la réponse est donc $y(\frac{3}{4}T)$, $y(T + \frac{3}{4}T)$, ...

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} y(mT + kT) \delta(mT + kT) = T \mathcal{Z}^{-1} [G(z, m) \cdot u(z, m)]$$

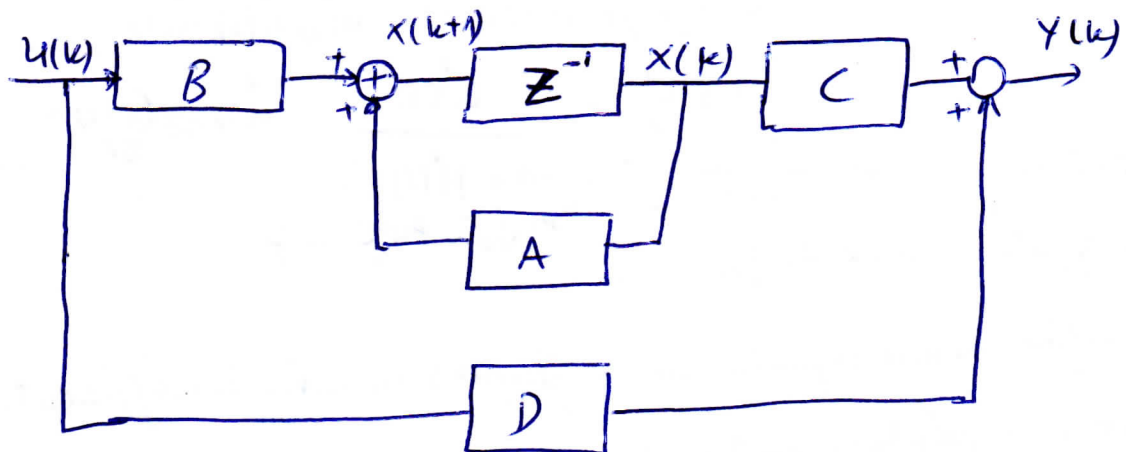


5/ Représentation d'état des syst. échantillonnés

La représentation d'état d'un syst. échantillonné est donnée par:

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \\ Y(k) = CX(k) + Du(k) \end{cases}$$

Ces eqs conduisent à la représentation schématisée suivante:



Si A, B, C, et D sont des matrices avec des coefficients constants, alors le syst. est invariant dans le temps.

Exemple: Donner la représentation d'état du syst. discret dont l'équation aux différences est donnée par: $y(k+3) + \underbrace{5y(k+2)}_{x_3(k)} - \underbrace{y(k+1)}_{x_2(k)} + \underbrace{y(k)}_{x_1(k)} = u(k)$

Si on pose: $\begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) \\ x_3(k) = y(k+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = -5x_3(k) + x_2(k) - x_1(k) + u(k) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ Y(k) = [1 \ 0 \ 0] X(k) \quad / \quad X(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k)]^T \end{cases}$$

Résolution de l'équation d'état:

L'état du syst. à l'instant 0 est connu et la suite des échantillons d'entrée sont connus aussi entre 0 et $k-1$, on cherche alors l'état du syst. à l'instant k , celui-ci est donné par l'équation suivante

$$X(k) = A^k X(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

Exemple: Calculer les cinq premiers échantillons de $x(k)$ sachant que:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; u(k) = 1 \text{ pour } k, 0 \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k).$

$$\Rightarrow x(1) = Ax(0) + Bu(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x(4) = Ax(3) + Bu(3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$x(5) = Ax(4) + Bu(4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix}.$$