

# Bac Burkina Faso 2022

## Mathématiques Séries C-E

2ème tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 6

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

### Exercice 1 (4 points)

Soit  $k$  un nombre réel différent de 0 et de 1. On considère dans le plan  $\mathcal{P}$  trois points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ , et les cercles  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_2)$  de diamètres respectifs  $[AB]$  et  $[AC]$ . Une droite  $(\Delta)$  non perpendiculaire à  $(AB)$  et distincte de  $(AB)$ , passant par  $A$ , coupe les cercles  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_2)$  respectivement en  $M$  et  $N$ .

- 1-a) Montrer que les droites  $(BM)$  et  $(CN)$  sont parallèles.  
b) Pour quelle valeur de  $k$  les droites  $(BN)$  et  $(CM)$  sont-elles parallèles ?

2) On prend  $k = \frac{3}{2}$  et  $AB = 4$  cm.

On note  $P$  le point d'intersection des droites  $(BN)$  et  $(CM)$ .

On considère l'homothétie  $h$  de centre  $P$  telle que  $h(B) = N$ .

- a) Démontrer que  $h(M) = C$ .  
b) Déterminer le rapport de  $h$ .

3-a) Déterminer le réel  $\beta$  tel que  $\overrightarrow{BP} = \beta\overrightarrow{BN}$ .

b) Déterminer la nature et les éléments géométriques du lieu géométrique  $(\Sigma)$  du point  $P$  lorsque la droite  $(\Delta)$  varie.

c) Construire  $(\Sigma)$ .

### Exercice 2 (4 points)

On note  $(E)$  l'équation différentielle :  $y'' + ay' + by = 0$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Les solutions de l'équation caractéristique de  $(E)$  sont les nombres complexes  $p + iq$  et  $p - iq$  avec  $p \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}^*$ .

1) Vérifier que  $2p + a = 0$  et que  $p^2 + ap + b = q^2$ .

2) On note  $(E')$  l'équation différentielle :  $y'' + q^2y = 0$

On suppose que  $f$  est une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^{-px}f(x)$ .

- a) Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $g$  est une solution de  $(E')$ .  
b) Montrer que si  $\varphi$  est une solution de  $(E')$  alors la fonction  $v = (q\varphi)^2 + (\varphi')^2$  est constante.  
c) Montrer qu'une solution  $\varphi$  de  $(E')$  est la fonction nulle si et seulement si  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ .

3) Soit  $\varphi$  solution de  $(E')$  et  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(t) = \varphi(t) - \left( \varphi(0) \cos qt + \frac{1}{q} \varphi'(0) \sin qt \right)$ .

- a) Montrer que  $h$  est une solution de  $(E')$ .

b) Que vaut  $h(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ?  
En déduire  $\varphi$  en fonction de  $\varphi(0)$  et  $\varphi'(0)$  .

4) Soit  $q = 2$  et  $\varphi$  la solution de  $(E')$  telle que  $\varphi(0) = \sqrt{2}$  et  $\varphi'(0) = 2\sqrt{2}$  .  
Déterminer les réels  $a$  et  $\alpha$  tels que :  $\forall t \in \mathbb{R} , \varphi(t) = a \cos(2t + \alpha)$  .

### Problème (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique **2 cm**)

#### Partie A (7,25 points)

On considère  $f$  , la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  par  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 1|}}$  .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative .

1-a) Montrer que l'on peut restreindre l'ensemble d'étude de  $f$  à l'intervalle  $D = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  .

b) Etudier le sens de variations de  $f$  sur  $D$  .

c) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D$  .

d) Tracer  $(C)$  .

2) Soit  $g$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $E = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$  .

On note  $(\Gamma)$  sa courbe représentative .

a) Montrer que la restriction  $g_1$  de  $g$  à  $]1, +\infty[$  est une application bijective de  $]1, +\infty[$  sur un intervalle  $I_1$  à préciser .

b) En déduire que  $g$  est une application bijective de  $E$  dans  $E$  .

c) Déterminer la composée  $g \circ g$  et en déduire  $g^{-1}(x)$  .

d) En déduire que  $(\Gamma)$  admet la droite  $(\Delta)$  d'équation  $x - y = 0$  pour axe de symétrie .

e) Démontrer que  $(\Gamma)$  est invariante par la réflexion d'axe la droite d'équation  $x + y = 0$  .

3) Soit la suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  définie par  $U_0 \in ]1, +\infty[$  et  $\forall n \in \mathbb{N} , U_{n+1} = g(U_n)$  .

a) Montrer que 2 est une période de  $(U_n)$  .

b) Déterminer la valeur  $U_0$  pour laquelle la suite  $(U_n)$  est convergente .

4) Soit  $\alpha \in ]1; \sqrt{2}[$  .

a) Calculer l'aire  $A(\alpha)$  de l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient :  $\begin{cases} \alpha \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases}$  .

b) Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} A(\alpha)$  et en déduire l'aire  $A$  de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $y = 1$  .

#### Partie B (4,75 points)

A tout point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  , on note  $P$  et  $Q$  les projetés orthogonaux de  $M$  respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées .

Soit  $\varphi$  , l'application du plan  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :

- Si  $M = O$  alors  $M' = O$
- Si  $M \neq O$  alors  $M'$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur la droite  $(PQ)$

1) Déterminer les images des axes de coordonnées par  $\varphi$  .

2-a) Soit  $M$  de coordonnées  $(a, b)$  , un point distinct de  $O$  .

Démontrer que les coordonnées  $(a', b')$  du point  $M'$  vérifient :  $a' = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$  et  $b' = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}$  .

b) Soient  $A(4;0)$  ;  $B(0;4)$  et  $I$  le milieu de  $[AB]$  . Déterminer les coordonnées des points  $A'$ ,  $B'$  et  $I'$  images respectives des points  $A$ ,  $B$  et  $I$  .

L'application  $\varphi$  conserve-t-elle les milieux des segments ?

3) Soit  $(D_m)$  la droite d'équation  $y = mx$  ,  $m \neq 0$  . Montrer que  $(D'_m)$  image de  $(D_m)$  par  $\varphi$  est une droite dont on précisera une équation .

4) Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = 1$  .

Montrer que  $(D')$  image de  $(D)$  par  $\varphi$  est contenue dans un cercle fixe .

5) On considère la courbe  $(\Gamma)$  de la fonction  $g$  de la **partie A** , définie paramétriquement par : 
$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \end{cases} , t \in$$

$E$  .

Démontrer que  $(\Gamma')$  image de  $(\Gamma)$  par  $\varphi$  est contenue dans le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 .