

ÔN TẬP TOÁN CAO CẤP 2

(Nhóm: Toán cao cấp 2_ T.Long, dành cho sv NEU)

NỘI DUNG 1: HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

Dạng 1: Giới hạn

- **Định nghĩa:** Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là b khi $x \rightarrow a$ nếu mọi dãy số $(x_n) \subset \text{MXĐ}$ mà $x_n \rightarrow a$ thì dãy số $f(x_n) \rightarrow b$. Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.
 - Để chỉ ra $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ta chọn 2 dãy số $(x_n), (x'_n) \subset \text{MXĐ}$ mà $\begin{cases} x_n \rightarrow a \\ x'_n \rightarrow a \end{cases}$ nhưng $\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$.
 - $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1; \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\tan u(x)}{u(x)} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \lim_{u(x) \rightarrow 0} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e;$
 $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1; \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1;$
- $u^v = \left[\left(1 + (u-1) \right)^{\frac{1}{u-1}} \right]^{v(u-1)};$
- Vô cùng bé:
 - $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé khi $x \rightarrow a$ nếu $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.
 - Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là 2 vô cùng bé khi $x \rightarrow a$ và $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$.
 - Nếu $k = 0$, ta nói $\alpha(x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \rightarrow a$, khi hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.
 - Nếu $k \neq 0$, ta nói $\alpha(x), \beta(x)$ là 2 vô cùng bé cùng bậc.
 - Đặc biệt, $k = 1$, ta nói $\alpha(x), \beta(x)$ là 2 vô cùng bé tương đương, ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.
- **Quy tắc l'opital:** Áp dụng cho các giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

 - Dạng $0 \cdot \infty$ khi tính $\lim(u \cdot v)$. Ta biến đổi:
$$\lim(u \cdot v) = \lim \frac{u}{1/v} \text{ (dạng } \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty} \text{)}$$
 - Dạng $\infty - \infty$ khi tính $\lim(u - v)$. Ta biến đổi:
$$\lim(u - v) = \lim \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{u \cdot v}} \text{ (dạng } \frac{0}{0} \text{)}$$
 - Dạng $1^\infty, \infty^0, 0^0$ khi tính $\lim(u^v)$. Ta đặt $y = u^v$:
$$\lim(\ln y) = \lim(v \cdot \ln u) = k \Rightarrow \lim y = e^k.$$

Bài tập áp dụng:

1) Bài tập trong giáo trình: ???

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{6x+5} - \sin \sqrt{6x+1})$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x \tan x)^{(\cot 2x)^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2017x)}{\ln(\sin 2018x)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3^x)^{\frac{6}{x}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{2x^3+x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(\sin 5x)+1}-1}{x^2+x^3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + x)^{\frac{2}{3x}}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-1}{9x+5\sin^2 x+2\cos x-2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\ln(x+1)}{e^x-e}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \cos 4x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2015^x + 2017)^{\frac{1}{x}}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} (x \cot x)^{\frac{5}{x}}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\pi}x - \sin 3x\right)^{\cot 3x}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\arcsin x+2\arcsin^2 x)}{\tan x}$$

Dạng 2: Hàm liên tục

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 \in TXĐ$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

o Hàm số liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

o Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì hàm số nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$.

Bài tập áp dụng:

1) Bài tập trong giáo trình

2) Tìm điều kiện của k để hàm số sau liên tục tại mọi giá trị thực của x:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 5x + 4, & x > 1 \\ \operatorname{arccot}(3 - 4x) + 3, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$3) \text{ Cho } f(x) = \begin{cases} (1 + 2x)^{\frac{4}{\sin x}} & \text{khi } x \neq 0 \\ e^4 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ khi $x = 0$

NỘI DUNG 2: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ 1 BIẾN

Dạng 1: Tính đạo hàm

- Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in \text{TXĐ}$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

- Công thức

1. $(c)' = 0$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (x)' = 1$

8. $(\operatorname{cot} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3. $(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $(\log_a x)' = \frac{x'}{x \ln a}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $(\sin x)' = \cos x$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(\operatorname{arc cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

- Quy tắc:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(uv)' = u'v + uv'$

2. $(ku)' = ku' \quad k \text{ là hằng số bất kỳ}$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

5. Đạo hàm của hàm hợp: $y'_x = y'_u u'_x$.

- Đạo hàm và vi phân cấp cao:

- Vi phân cấp 1: $dy = y'dx$

- Đạo hàm cấp cao $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

- Vi phân cấp cao: $d^n y = y^{(n)}(dx)^n$.

Bài tập áp dụng:

1) Bài tập trong giáo trình: ???

2) Tính đạo hàm của hàm số: $f(x) = |x - 2| + 2x|x - 3|$.

Dạng 2: Tính đạo hàm của hàm ngược

- Hàm số $y = f(x)$ có hàm ngược khi và chỉ khi với mỗi $y_0 \in \text{MGT}$ phương trình $y_0 = f(x)$ có nghiệm duy nhất.
- Nếu $y = f(x)$ là hàm đơn điệu thì có hàm ngược.
- Đạo hàm của hàm ngược:** Giả sử $y = f(x)$ có hàm ngược. Khi đó, $x = f^{-1}(y)$. Lấy đạo hàm 2 vế theo biến x ta được

$$\begin{aligned}1 &= (f^{-1})'(y) \cdot y' \\ \Rightarrow (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)} \\ \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

(với x_0 là nghiệm của phương trình $y_0 = f(x)$).

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x) = 2x - \frac{\cos \pi x}{\pi}$. Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ có hàm ngược và tính $(f^{-1})'(\frac{-1}{\pi})$.

Giải.

Ta có $y' = 2 + \sin(\pi x) > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên \mathbb{R} . Vậy phương trình $y_0 = f(x)$ có nghiệm duy nhất với mọi $y_0 \in \text{MGT}$ hay hàm số $y = f(x)$ có hàm ngược. Do đó, ta có

$$x = f^{-1}(y).$$

Đạo hàm 2 vế theo biến x , ta được:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)} \\ \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

Vậy tại $y_0 = \frac{-1}{\pi}$ thì phương trình $\frac{-1}{\pi} = 2x - \frac{\cos \pi x}{\pi}$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

$$\text{Ta có } (f^{-1})'\left(\frac{-1}{\pi}\right) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 + \sin \pi 0} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập áp dụng:

- Cho hàm số $f(x) = 3x - \frac{1}{x^3} + 1$. Chứng minh rằng hàm số đó có hàm ngược f^{-1} và tính $(f^{-1})'$.
- Chứng minh rằng hàm số luôn có hàm ngược: $f(x) = x^3 + 3x + 2$ và tính $(f^{-1})'(2)$.
- Chứng minh hàm số $f(x) = 2x + \cos x$ có hàm ngược hàm ngược. Tính $f^{-1}(\pi)$.
- Cho hàm số $f(x) = x - \pi + \cos x$. Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ có hàm ngược và tính $(f^{-1})'(-1)$.

Dạng 3: Khai triển Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r(x)$$

Phần dư dạng Peano:

$$r(x) = o[(x - x_0)^n]$$

Phần dư dạng Lagrange:

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $n + 1$ trong một lân cận V nào đó của điểm x_0 . Khi đó:

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

với c là một số nằm giữa x_0 và x .

- Khai triển Maclaurin là khai triển Taylor tại $x_0 = 0$.

Bài tập áp dụng:

1) Bài tập trong giáo trình: 32-35 (trang 349).

2) Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc 3 với phần dư Peano:

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

3) Khai triển Taylor đến lũy thừa bậc 3 của $(x - 1)$ với phần dư Peano $f(x) = \sqrt[3]{(x + 7)^2}$.

4) Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc 2 của x với phần dư Peano:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{8x + 1}).$$

5) Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc 3 của x với phần dư Peano:

$$f(x) = \cos(\sin 5x).$$

6) Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc 3 của x với phần dư Peano:

$$y = (3x - 1) \ln \sqrt{5x + 1}.$$

7) Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc 4 của x với phần dư Peano:

$$f(x) = \ln \left(x + \frac{3}{2} \right)^{x + \frac{3}{2}}.$$

8) Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc 3 của x với phần dư Peano:

$$y = f(x) = 5xe^x + x^2 + 4.$$

9) Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc 3 của x với phần dư Peano:

$$y = e^{-2x} \sqrt{2x - 1}.$$

10) Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc 4 của x với phần dư Peano:

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 12).$$

11) Khai triển Maclarin hàm số sau đến lũy thừa bậc 3 của x với phần dư Peano:

$$f(x) = 2x^2 - \ln(1 - 3x).$$

12) Khai triển Maclarin hàm số sau đến lũy thừa bậc 3 của x với phần dư Peano:

$$f(x) = \frac{x + 5}{-x^2 + 1}.$$

13) Khai triển Maclaurin hàm số $f(x) = x^2(e^x + 1)$.

Giải. Khai triển Maclarin hàm số

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\Rightarrow e^x + 1 = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x^2(e^x + 1) &= x^2 \left(2 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \right) \\ &= 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{n!} + x^2 o(x^n)\end{aligned}$$

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 o(x^n)}{x^{n+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$. Do đó $x^2 o(x^n) = o(x^{n+2})$.

Ta có

$$\begin{aligned}x^2(e^x + 1) &= 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{n!} + o(x^{n+2}) \\ &= 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-2)!} + o(x^n).\end{aligned}$$

Dạng 4: Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số

Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số $y = f(x)$

- Tìm MXĐ: D_f
- Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm tới hạn $x_0 \in D_f$
- Lập bảng xét dấu và kết luận:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$		↗ CĐ ↘	

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$		↘ CT ↗	

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$		↗ ↘	

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$		↘ ↗	

Bài tập áp dụng:

- 1) Bài tập trong giáo trình: 39-46 (trang 364,365)
- 2) Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số: $f(x) = 2x^2 - \ln(1 - 3x)$.
- 3) Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số: $y = x\sqrt{3 - 2x^2}$.
- 4) Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số: $y = (x^2 - 3x + 2)e^{1-2x}$.
- 5) Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số:

$$y = \frac{x^2}{2} \left(\arctan \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + (2 - x) \arctan \frac{x}{2} + \ln \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) + \frac{\pi x}{4} - x.$$

Dạng 5: Ứng dụng đạo hàm trong kinh tế

Cho $y = f(x)$ là một hàm kinh tế:

- **Giá trị cận biên:** $f'(x)$ là hàm y - Cận biên.
 - $f'(x_0)$ giá trị y - Cận biên tại $x = x_0$.
 - **Ý nghĩa:** Tại mức sử dụng yếu tố đầu vào là x_0 nếu ta sử dụng thêm 1 đơn vị x thì đầu ra y sẽ tăng xấp xỉ $f'(x_0)$.
 - Lợi ích cận biên giảm dần: $f''(x) < 0$.
- **Hệ số co giãn:** Hệ số co giãn của y theo x là sự thay đổi của y tính theo % khi x tăng 1%.

$$\varepsilon = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

- **Bài toán tối ưu:** Tìm x để $y = f(x)$ đạt max(min).

Bài tập áp dụng:

- 1) Bài tập trong giáo trình: 47-60 (trang 375, 376).
- 2) Một doanh nghiệp xác định được lượng sản phẩm doanh nghiệp bán được là: $D(p) = 8000 \cdot e^{-0,04p}$ (đơn vị sản phẩm) khi giá của mỗi đơn vị sản phẩm là p đồng.
 - a) Tìm giá p mà tại đó hệ số co giãn của cầu bằng -1 .
 - b) Chứng tỏ rằng tại mức giá tìm được ý trên thì doanh nghiệp có doanh thu tối đa.
- 3) Một nhà sản xuất độc quyền bán sản phẩm trên thị trường với hàm cầu ngược: $p = 3120 - 24Q$.
 - a) Tính hệ số co giãn của cầu theo giá tại mức giá $p = 240$ và nêu ý nghĩa kinh tế của kết quả nhận được.
 - b) Xác định mức sản lượng cho lợi nhuận tối đa biết hàm chi phí cận biên $MC = 5Q^2 + 2Q + 120$ và chi phí cố định là 80.

NỘI DUNG 3: ĐẠO HÀM HÀM NHIỀU BIẾN

Dạng 1: Đạo hàm riêng

- Tính đạo hàm bằng định nghĩa:

Hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định trên miền $D \subset \mathbf{R}^n$.

- Đạo hàm riêng của f theo biến x_i tại điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$:

$$f'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Hàm số $w = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbf{R}^2$.

- Đạo hàm riêng của f theo biến x tại điểm $(x; y) \in D$:

$$f'_x(x; y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

- Đạo hàm riêng của f theo biến y tại điểm $(x; y) \in D$:

$$f'_y(x; y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

- Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số tại điểm (x_0, y_0) :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(x_0, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0)}{\Delta y};$$

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x_0 + \Delta x, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

- Quy tắc: **Đạo hàm theo biến nào biến còn lại coi như hằng số.**

- Đạo hàm của hàm hợp: $W'_x = W'_{u_1} \cdot (u_1)'_x + W'_{u_2} \cdot (u_2)'_x + \dots + W'_{u_m} \cdot (u_m)'_x$

- Biểu thức vi phân toàn phần:

- Vi phân toàn phần cấp 1:

$$dw = w'_{x_1} dx_1 + \dots + w'_{x_n} dx_n$$

- Vi phân toàn phần cấp 2:

$$d^2w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w''_{x_i x_j} dx_i dx_j$$

Bài tập áp dụng:

1) Bài tập trong giáo trình: ???

2) Viết biểu thức vi phân toàn phần:

$$w(x, y, z) = \ln(x^2 + z^2) \cdot \tan(x - y)$$

3) Viết biểu thức vi phân toàn phần của hàm số sau:

$$w = f(x, y, z) = (2x^2 - y + 2z^2)^{4z}.$$

- 4) Viết biểu thức vi phân toàn phần của hàm số: $w = f(x, y, z) = \arctan^2(x + y + 2z)$.
- 5) Cho $f(t)$ là hàm khả vi trên \mathbb{R} với $f'(-9) = 3$. Tính $dw(2,3)$ với các số gia riêng $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$ và $w = f(3x^2 - 2xy - y^2)$.

Giải. Ta có $dw(2,3) = w'_x(2,3) \cdot \Delta x + w'_y(2,3) \cdot \Delta y$. Với $t = 3x^2 - 2xy - y^2$, ta có

$$w'_x = f'_t t'_x = f'(t) \cdot (6x - 2y);$$

$$w'_y = f'_t t'_y = f'(t) \cdot (-2x - 2y).$$

Tại $x = 2, y = 3$ thì $t = -9$. Do đó, từ $f'(-9) = 3$ ta có

$$w'_x(2,3) = f'(-9) \cdot (6 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = 18;$$

$$w'_y(2,3) = f'(-9) \cdot (-2 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = -30.$$

Vậy, $dw(2,3) = w'_x(2,3) \cdot \Delta x + w'_y(2,3) \cdot \Delta y = 18 \cdot 0,1 - 30 \cdot 0,2 = -4,2$.

- 6) Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau:

$$w = 2^{x+y} \cdot \ln(x - \sin z)$$

- 7) Cho một hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng thỏa mãn:

$$f'_x(x, y) < 0; f'_y(x, y) > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Và hàm hợp $g(x, y) = f(x, -y - 4x^3)$. Hãy chứng minh:

$$g'_x(x, y) < 0 \text{ và } g'_y(x, y) < 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. Theo công thức đạo hàm riêng của hàm hợp ta có:

$$g'_x(x, y) = f'_x(x) \cdot (x)'_x + f'_{(-y-4x^3)} \cdot (-y - 4x^3)'_x = f'_x + f'_{(-y-4x^3)} \cdot (-12x^2).$$

Nhận xét: $f'_x < 0$; $f'_{(-y-4x^3)} > 0$; $-12x^2 < 0$ nên $g'_x(x, y) < 0$.

Tương tự $g'_y(x, y) < 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

- 8) Tính đạo hàm riêng theo x của hàm số sau:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + xy + y^3}{x^2 - xy + 3y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

- 9) Cho hàm số:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2 - 7y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Tính $f''_{xy}(0,0)$ và $f''_{yx}(0,0)$.

- 10) Cho hàm số $f(u, v)$ có $f(1,0) = f'_u(1,0) = 2$; $f'_v(1,0) = -1$ và hàm số

$$w = x \cdot \sqrt{y} \cdot f\left(\frac{x}{y} \cdot \sin \frac{x-y}{2x+y}\right).$$

Tính $w'_x(2,2)$.

11) Cho hàm số $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1. Chứng minh rằng hàm số

$$u = f\left(\frac{y^2}{x^2} \tan \frac{x-y}{x}\right)$$

Thỏa mãn điều kiện $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Dạng 2: Ứng dụng đạo hàm riêng trong kinh tế

• Giá trị cận biên:

Mô hình kinh tế:

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Giá trị w-cận biên của x_i biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi giá trị của biến phụ thuộc w khi x_i tăng thêm một đơn vị trong khi các biến còn lại không thay đổi giá trị.
- Ký hiệu:

$$Mf_{x_i} = f(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

- Liên hệ với đạo hàm:

$$Mf_{x_i} = f'_{x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

• Hệ số co giãn:

- Hệ số co giãn của w theo x_i tại điểm (x_1, x_2, \dots, x_n) là số đo lường thay đổi tính bằng % của w khi x_i tăng 1% và các biến độc lập khác không thay đổi.
- Ký hiệu: ϵ_i
- Công thức tính hệ số co giãn của w theo x_i

$$\epsilon_i = f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{x_i}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

• Hiệu quả của quy mô:

Hàm sản xuất: $Q = f(K, L)$

- Nếu $f(tK, tL) > t.f(K, L)$ thì hàm sản xuất biểu thị *hiệu quả tăng theo quy mô*.
- Nếu $f(tK, tL) < t.f(K, L)$ thì hàm sản xuất biểu thị *hiệu quả giảm theo quy mô*.
- Nếu $f(tK, tL) = t.f(K, L)$ thì hàm sản xuất biểu thị *hiệu quả không đổi theo quy mô*.

Dạng Cobb – Douglas: $Q = a.K^\alpha L^\beta$

- $\alpha + \beta > 1$: Hiệu quả tăng theo quy mô
- $\alpha + \beta < 1$: Hiệu quả giảm theo quy mô
- $\alpha + \beta = 1$: Hiệu quả không đổi theo quy mô

Bài tập áp dụng:

- 1) Bài tập trong giáo trình: ???
- 2) Một doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q = 24 \cdot \sqrt[3]{K^2} \sqrt{L}$. hãy tính sản phẩm hiện vật cận biên của tư bản và lao động tại mức $k = 8; L = 16$ và giải thích ý nghĩa.

Dạng 3: Đạo hàm của hàm ẩn

• Hàm ẩn 1 biến

1. Khái niệm hàm ẩn một biến

- Hàm số $y = y(x)$ cho gián tiếp dưới dạng phương trình:

$$F(x, y) = 0, x \in D \quad (*)$$

trong đó $F(x, y)$ là hàm số hai biến, được gọi là hàm ẩn.

2. Tính đạo hàm của hàm ẩn một biến

- Lấy đạo hàm hai vế phương trình (*) theo biến x , ta có:

$$F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot y'(x) = 0$$

- Đạo hàm cấp 1 của hàm ẩn được tính theo công thức:

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

- Đạo hàm cấp cao của hàm ẩn được tính theo các quy tắc tính đạo hàm thông thường

• Hàm ẩn nhiều biến:

1. Khái niệm hàm ẩn n biến

- Hàm số $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cho gián tiếp dưới dạng phương trình:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0 \quad (*)$$

trong đó $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ là hàm số $n + 1$ biến, được gọi là hàm ẩn n biến

2. Tính đạo hàm riêng của hàm ẩn n biến

- Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm ẩn được tính theo công thức:

$$z'_{x_k} = -\frac{F'_{x_k}}{F'_z}$$

- Đạo hàm riêng cấp cao của hàm ẩn được tính theo các quy tắc tính đạo hàm riêng thông thường.

Bài tập áp dụng:

1) Bài tập trong giáo trình:

2) Xét hàm ẩn $y = f(x)$ tồn tại trong lân cận điểm $x = 1, y = 2$ cho bởi phương trình

$$y^3 + 2x^2 - 2y^2 - 3xy + 5x = 1.$$

Hãy tính $f'(1)$.

3) Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định từ phương trình:

$$\frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{2} = 3.$$

Chúng ta hàm số $y = y(x)$ này là nghiệm của phương trình vi phân:

$$2x \cdot y'' - (3xy^2 + 1) \cdot y' + \frac{y}{x} = 0.$$

4) Cho hàm ẩn $y = y(x)$ dưới dạng hàm ẩn:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^{5 \arctan \frac{y}{x}}.$$

Hãy tính đạo hàm cấp 2 của hàm số.

5) Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0 \quad (z > 0).$$

Tính đạo hàm riêng cấp hai z''_{yy} tại điểm $x = 1, y = -2$.

6) Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 6 = 0.$$

Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 cấp 2 của hàm $z = z(x, y)$.

7) Giả sử $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$ là những hàm ẩn xác định bởi phương trình: $x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xyz = 0$. Tính biểu thức:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

8) Cho hàm số $w = F(x, y) = 2 + yy - 4x + 2x^2 + y^3$.

a) Tìm vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số w .

b) Gọi $y = y(x)$ là hàm số xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Tính giới hạn:

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(y(x))^{59}}{(x - 1)^{118}}.$$

NỘI DUNG 4: CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

Dạng 1: Cực trị tự do

- Quy tắc thực hành:

- 1) Tìm điểm dừng**

Giải hệ: $\{f'_{x_i} = 0, i = \overline{1, n} \Rightarrow \text{điểm dừng } A(a_1, a_2, \dots, a_n)$

- 2) Điều kiện đủ**

- Tính các đạo hàm riêng cấp hai của f .
 - Tại điểm dừng $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ta lập ma trận:

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = f''_{x_i x_j}(A)$$

- Tính các định thức con D_1, D_2, \dots, D_n của H .

- 3) Kết luận**

- Nếu $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$ thì f đạt cực tiểu tại A
 - Nếu $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0$ thì f đạt cực đại tại A

- Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất:

- Định lý:**

Giả sử f chỉ có một điểm dừng duy nhất $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ trong miền D và điều kiện đủ được thỏa mãn tại **mọi** điểm thuộc miền D . Khi đó:

- Nếu f đạt cực đại tại A thì $f(A)$ là giá trị lớn nhất của hàm số trong miền D .
 - Nếu f đạt cực tiểu tại A thì $f(A)$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số trong miền D .

Bài tập áp dụng:

- Bài tập trong giáo trình:
- Tìm cực trị của hàm số:

$$w = -3x^2 - y^2 - 14z^2 + 12xz - 18z + 2y - 1.$$

- Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó trên 2 thị trường khác nhau (được phân biệt giá). Cho biết hàm chi phí cận biên:

$$MC = 10,5 + 0,1Q \quad (Q = Q_1 + Q_2)$$

và cầu của thị trường đối với sản phẩm của công ty:

$$\text{Thị trường 1: } p_1 = 72 - 0,3Q_1; \text{ Thị trường 2: } p_2 = 54 - 0,15Q_2.$$

Xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu được lợi nhuận tối đa.

- Tìm cực trị của hàm số:

$$U = 4 - 4x + 2y + 24z - 2xy + x^2 + 2y^2 + 3z^2.$$

5) Tìm cực trị của hàm số:

$$w = f(x, y, z) = -11x^2 - 51y^2 - 5z^2 + 48xy + 4yz - 8x + 8y - 2z.$$

6) Tìm cực trị của hàm số:

$$u = 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + yz - 4x + 2y - z + 2.$$

7) Tìm cực trị của hàm số:

$$w = -2x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4xz + 6y - 6z.$$

8) Tìm cực trị của hàm số:

$$u = 6x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2xz + 2x - 5y + z - 2.$$

9) Tìm cực trị của hàm số:

$$u = -4x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 10xy - 14x + 26z + 11.$$

10) Tìm cực trị của hàm số:

$$w = -9x^2 - 4y^2 - z^2 + 18x - 4xy + 4z + 2.$$

11) Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó trên hai thị trường khác nhau (được phân biệt giá). Cho biến chi phí cận biên:

$$MC = 3,5 + 0,05Q \quad (Q = Q_1 + Q_2)$$

và cầu của thị trường đối với sản phẩm của công ty:

$$\text{Thị trường 1: } p_1 = 24 - 0,15Q_1; \text{ Thị trường 2: } p_2 = 18 - 0,075Q_2.$$

Xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu được lợi nhuận tối đa.

12) Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất một loại sản phẩm tại hai nhà máy khác nhau. Cho biết hàm chi phí cận biên lần lượt là:

$$MC_1 = 10 + 0,25Q_1; MC_2 = 2 - 0,2Q_2$$

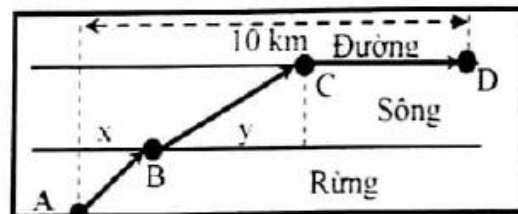
và hàm cầu đối với sản phẩm là: $p = 290 - 0,25Q$; ($Q = Q_1 + Q_2$). Hãy xác định mức tổng sản lượng và giá bán để doanh nghiệp tối đa hóa lợi nhuận.

13) Tìm cực trị hàm số: $u = 3 \ln x + 5 \ln y + 2 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

14) Tìm cực trị hàm số: $w = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 10$.

Câu 1: (2,5 điểm) LÊN KẾ HOẠCH TRƯỚC CUỘC ĐUA

Ban tổ chức công bố trước sơ đồ của đường đua với điểm xuất phát là A và đích đến là địa điểm D (Xem hình ở bên). Trong đó, giai đoạn đầu các vận động viên phải chạy bộ từ A, vượt qua rừng tới B bên bờ sông, sau đó bơi từ B vượt sông sang điểm C bên kia bờ sông, rồi từ C đi theo đường bộ bằng xe đạp tới D.



Biết rằng khoảng cách từ A tới bờ sông là 3 km, sông rộng 0,8 km với 2 bờ là 2 đường thẳng song song. Biết rằng vận tốc chạy bộ của một vận động viên trong rừng là 10km/h, vận tốc bơi trên sông là 8km/h, vận tốc đạp xe trên đường là 35 km/h.

a) Thiết lập thời gian $T = T(x, y)$ để vận động viên đi từ A tới D theo x, y , với x, y là các giá trị được gọi ý như trong hình trên:

b) Tìm x, y (vị trí điểm B, C) để thời gian hoàn thành cuộc đua là ít nhất.

Câu 6 (1,25 điểm). Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất một loại sản phẩm tại hai cơ sở khác nhau với hàm chi phí cận biên như sau(Q_i , MC_i tương ứng là lượng sản phẩm sản xuất và chi phí cận biên tại cơ sở i , $i=1,2$):

$$MC_1 = 2 + 0.1Q_1; MC_2 = \frac{33}{5} + 0.08Q_2$$

Doanh nghiệp đó bán sản phẩm trên thị trường với hàm cầu $p = 45 - 0.05Q$, ($Q = Q_1 + Q_2$). Tìm tổng sản lượng để doanh nghiệp tối đa hóa lợi nhuận.

Dạng 2: Cực có điều kiện

• Quy tắc thực hành:

1. Bài toán

Tìm cực trị của hàm số: $w = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=b$.

2. Phương pháp nhân tử Lagrange

■ **Lập hàm Lagrange:** $L = f(x,y) + \lambda[b - g(x,y)]$.

■ **Tìm điểm dừng của hàm Lagrange:**

Giải hệ:
$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow M(x_0, y_0, \lambda_0) : \text{Điểm dừng của hàm Lagrange}$$

■ **Điều kiện đủ:** Tại điểm dừng lập ma trận

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} g_1 = g'_x(x_0, y_0) & g_2 = g'_y(x_0, y_0) \\ L_{11} = L''_{xx}(M_0) & L_{12} = L''_{xy}(M_0) \\ L_{21} = L''_{yx}(M_0) & L_{22} = L''_{yy}(M_0) \end{cases}$$

- Nếu $\det(H) > 0$ thì $w = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = b$ đạt cực đại tại (x_0, y_0) .
- Nếu $\det(H) < 0$ thì $w = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = b$ đạt cực tiểu tại (x_0, y_0) .

• Ý nghĩa nhân tử Lagrange:

- Gọi $W_{CT}(b)$ là giá trị tối ưu của bài toán tại b . Khi đó,

$$W'_{CT}(b) = \lambda_0$$

Do vậy, nhân tử Lagrange λ_0 là giá trị W_{CT} -cận biên của b , nghĩa là khi b tăng 1 đơn vị thì giá trị tối ưu W_{CT} thay đổi một lượng xấp xỉ bằng λ_0 .

- Nếu b tăng 1% thì giá trị tối ưu W_{CT} tăng ε %, với ε xác định bởi:

$$\varepsilon = W'_{CT} \cdot \frac{b}{W_{CT}} = \lambda_0 \cdot \frac{b}{W_{CT}}$$

Bài tập áp dụng:

1) Bài tập trong giáo trình:

Câu 7 (1,25 điểm). Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số $w = x^{0.4}y^{0.9}$ thỏa mãn điều kiện $4x + 9y = 2600; (x, y > 0)$

Câu 2: (2,5 điểm) TÌM NÚT BẮM TRONG PHÒNG

Khi vận động viên tới được địa điểm đích D thì họ phải vào một căn phòng bị bao bởi bức tường có hình dạng đường tròn với phương trình $x^2 + y^2 = 30$. biết rằng nhiệt độ trong phòng có dạng $T(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 15x + 15y + 60$. Để kết thúc cuộc đua thì vận động viên phải bấm vào một cái nút để xác nhận "ĐÃ VỀ ĐÍCH". cái nút này tuy không thể nhìn thấy bằng mắt thường nhưng lại biết nó ở chân tường và ở nơi có nhiệt độ thấp nhất. Bạn hãy xác định tọa độ của nút ấn để giúp vận động viên kết thúc cuộc đua.

Câu 7. (1,25 điểm) Một người tiêu dùng có hàm lợi ích $U = 20x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$. Trong điều kiện giá bán một đơn vị hàng hóa thứ nhất là 25\$, giá bán một đơn vị hàng hóa thứ hai là 4\$. hãy xác định cơ cấu mua sắm để người tiêu dùng thu được lợi ích $U = 800$ với chi phí tối thiểu. Nếu lợi ích tiêu dùng tăng thêm 1% thì chi phí tối thiểu thay đổi như thế nào? Tại sao?

Câu 7(1,25 điểm). Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất một loại sản phẩm có hàm chi phí $TC = 90 + 20Q$, trong đó Q là số đơn vị sản phẩm được sản xuất. Doanh nghiệp bán sản phẩm ở hai thị trường khác nhau, biết rằng hàm cầu của thị trường thứ nhất là: $Q_1 = 10 - 0,1p_1$, và hàm cầu của thị trường thứ hai là $Q_2 = 10 - 0,2p_2$, ($Q = Q_1 + Q_2$). Hãy lựa chọn mức sản lượng trên mỗi thị trường để doanh nghiệp tối đa hóa lợi nhuận khi doanh nghiệp không phân biệt giá bán sản phẩm trên hai thị trường đó ($p_1 = p_2$).

Câu 6. (1,25 điểm) Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số

$$u = 2x^2 + y^2 + xy$$

với điều kiện $x + y = 8$.

Câu 5. (2,5 điểm) Giả sử một doanh nghiệp có hàm sản xuất là $Q = 900.K^{1/2}.L^{2/3}$ trong đó K là số đơn vị tư bản và L là số đơn vị lao động mà doanh nghiệp sử dụng.

a) Khi doanh nghiệp đang sử dụng 625 đơn vị tư bản và 1000 đơn vị lao động, hãy ước lượng số sản phẩm thay đổi khi doanh nghiệp sử dụng tăng 1 đơn vị tư bản và giảm 2 đơn vị lao động.

b) Biết rằng giá thuê một đơn vị tư bản là \$7, giá thuê một đơn vị lao động là \$4 và số tiền doanh nghiệp dành cho sản xuất là \$1470. Hãy tìm mức sử dụng tư bản và mức sử dụng lao động cho tối đa sản lượng của doanh nghiệp.

Câu 3 (3,75 điểm). Một doanh nghiệp phân phối 1 sản phẩm độc quyền trên 2 thị trường với hai hàm cầu là: $Q_1 = 1260 - 10P_1$, $Q_2 = 750 - 5P_2$.

Biết hàm chi phí kết hợp: $TC = 0,1Q^2 + 2Q + 100$, $Q = Q_1 + Q_2$.

- Hãy xác định các mức cầu $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2$ và các mức giá $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ để doanh nghiệp thu được lợi nhuận lớn nhất trong trường hợp phân biệt giá ở hai thị trường.
- Hãy kiểm tra hai hệ số co giãn của hai hàm cầu tại $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ ở Câu 3a) có thỏa mãn đẳng thức sau không:

$$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_2} = \frac{(1+\frac{1}{\varepsilon_2})}{(1+\frac{1}{\varepsilon_1})}$$
- Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, tìm các mức cầu để doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa trong trường hợp không phân biệt giá ở hai thị trường, tức $P_1 = P_2$.

Câu 7: (1,25 điểm) Cho hàm lợi ích của hộ gia đình khi tiêu dùng hai loại hàng hoá $U = x^{0,5}y^{0,5}$ trong đó x là lượng hàng hóa thứ nhất, y là lượng hàng hóa thứ hai. Trong điều kiện giá của hàng hóa thứ nhất là 2\$, giá hàng hóa thứ hai là 3\$ và thu nhập dành cho tiêu dùng là 64\$. Hãy xác định cơ cấu tiêu dùng tối đa hóa lợi ích.

Câu 4: (2,5 điểm) Người tiêu dùng lựa chọn một túi hàng gồm 2 loại sản phẩm với hàm lợi ích tiêu dùng: $U = 60x^{0,7}y^{0,3}$, trong đó x là lượng hàng hóa A, y là lượng hàng hóa B.

- Hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng tối đa hóa lợi ích, biết rằng giá của hàng hóa A là \$7, giá hàng hóa B là \$9 và thu nhập dành cho tiêu dùng là \$210.
- Nếu thu nhập dành cho tiêu dùng tăng thêm \$1 thì lợi ích tiêu dùng tối đa thay đổi như thế nào?

Câu 6: (2,5 điểm) Cho hàm lợi ích của một người tiêu dùng là $U = 15x^{0,3}.y^{0,7}$, trong đó x, y là lượng hàng hóa trong cơ cấu mua sắm gồm hai hàng hóa của người tiêu dùng. Giả sử giá của các mặt hàng tương ứng là $p_x = 15$, $p_y = 10$ và thu nhập dành cho tiêu dùng là $M = 20000$.

- Hãy xác định lượng cầu của người tiêu dùng đối với mỗi loại hàng hóa biết rằng người đó muốn tối đa hóa lợi ích tiêu dùng.
- Nếu thu nhập dành cho tiêu dùng tăng 1% thì lợi ích tiêu dùng tối đa thay đổi như thế nào?

Câu 7: (1,25 điểm) Một doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q = 4K^{0,7}L^{0,9}$. Giả sử giá thuê một đơn vị tư bản là \$2, giá thuê một đơn vị lao động là \$3 và doanh nghiệp tiến hành sản xuất với ngân sách cố định là \$960. Xác định lượng tư bản và lao động được sử dụng để doanh nghiệp thu được sản lượng tối đa. Nếu ngân sách dành cho sản xuất tăng thêm 1% thì sản lượng tối đa thay đổi như thế nào? tại sao?

Câu 7: (1,25 điểm) Một doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất $Q = 10 K^{0.8} L^{0.2}$. Biết giá thuê một đơn vị vốn và giá thuê một đơn vị lao động lần lượt là 40 và 10 (\$). Tìm số lượng vốn và lao động doanh nghiệp cần sử dụng để đạt lợi nhuận tối đa khi sản lượng không đổi và bằng 3000 đơn vị sản phẩm.

Câu 6. (1,25 điểm) Cho biết hàm lợi ích là

$$U = x^{0.4} \cdot y^{0.7} \quad (x: \text{là lượng hàng hóa thứ 1, } y: \text{là lượng hàng hóa thứ 2})$$

Hãy xác định túi hàng (x, y) có chi phí nhỏ nhất, nhưng vẫn đảm bảo mức lợi ích $U = 40^{1.1}$, trong

Câu 7: (1,25 điểm) Cho hàm lợi ích của một người tiêu dùng có dạng $U = 4x^{\frac{7}{10}} y^{\frac{9}{10}}$.

Giá một đơn vị hàng hóa x là 2 USD, giá một đơn vị hàng hóa y là 3USD, ngân sách dành cho tiêu dùng là 960 USD. Xác định cơ cấu mua sắm để người tiêu dùng thu được lợi ích tối đa.

Câu 5: (1,25 điểm) Giả sử hàm lợi ích khi mua sắm hàng hóa của người tiêu dùng

$$U = 6x_1^{0.6} x_2^{0.9}$$

Trong đó x_1, x_2 lần lượt là lượng hàng hóa thứ 1 và thứ 2. Xác định cơ cấu mua sắm để tối đa hóa lợi ích, biết rằng giá mỗi đơn vị hàng hóa thứ 1 và 2 tương ứng là $p_1 = 12, p_2 = 18$ và ngân sách dành cho mua sắm cố định là $m = 300$.

Câu 6. (1,25 điểm) Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số $w = x^{0.6} \cdot y^{0.5}$ với điều kiện $3x + 5y = 1210$.

Câu 4(1,25 điểm). Một doanh nghiệp có hàm sản xuất là $Q = f(K, L) = K^{0.5} L^{0.6}$. Tìm mức sử dụng K và L thích hợp để doanh nghiệp đạt sản lượng tối đa. Biết rằng giá thuê 1 đơn vị K và L lần lượt là \$5 và \$6 và chi phí dành cho sản xuất là \$1100.

NỘI DUNG 5: TÍCH PHÂN

Dạng 1: Hàm cận trên

Giả sử $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng D , $a \in D$.

Với $x \in D$ ta có f khả tích trên $[a; x]$ (hoặc $[x; a]$).

Định nghĩa:



Tích phân $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ được gọi là *hàm cận trên*.

Tính chất:

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \forall x \in D$$

Như vậy, hàm cận trên là một nguyên hàm của $f(x)$ trên D .

Chú ý:

Mở rộng khái niệm hàm cận trên ta có các công thức sau:

- 1) $\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x); \quad \left(\int_a^{u(x)} f(t)dt \right)' = f[u(x)] \cdot u'(x)$
- 2) $\left(\int_x^a f(t)dt \right)' = -f(x); \quad \left(\int_{v(x)}^a f(t)dt \right)' = -f[v(x)] \cdot v'(x)$
- 3) $\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt \right)' = f[u(x)] \cdot u'(x) - f[v(x)] \cdot v'(x)$

Bài tập áp dụng:

- 1) Bài tập trong giáo trình: Bài 13,14,15
- 2) Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số:

$$y = \left(\int_0^{2x^2+2x+2} \sqrt{1+t^2} dt \right)^{2012}$$

Câu 3: (1,25 điểm) Xác định khoảng đơn điệu tăng, đơn điệu giảm và điểm cực trị của hàm số:

$$y = \int_0^{x-1} \sqrt{1+9t^2} dt - \sqrt[3]{5} \cdot x$$

Câu 2(1,25điểm). Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc ba của x với phần dư dạng Peano:

$$f(x) = \int_{-3x}^0 \sqrt[4]{1+t^2} dt$$

Câu 2: (1,25điểm) Tìm khoảng tăng giảm và cực trị của hàm số sau:

$$F(x) = \left(\int_2^{3x-3} \sqrt[3]{3t^2 - 4t + 10} dt \right)^6$$

Câu 2(1,25điểm). Khai triển Maclaurin hàm số sau đến lũy thừa bậc ba của x với phần dư dạng Peano:

$$f(x) = \int_{-3x}^0 \sqrt[4]{1+t^2} dt$$

Câu 2. (1,25điểm) Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số sau:

$$F(x) = \left(\int_2^{3x-4} \sqrt[6]{3t^2 - 2t + 10} dt \right)^8$$

Câu 3 (1,25điểm). Tìm khoảng tăng, giảm và điểm cực trị của hàm số:

$$y = \left(\int_0^{x^2-7x+6} e^t \cdot \sqrt{t^2 + 6} dt \right)^2$$

Dạng 2: Tích phân suy rộng

1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn

- Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a; +\infty)$. Với $t > a$, ta có

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

được gọi là *tích phân suy rộng* của $f(x)$ trên $[a; +\infty)$.

- Tích phân suy rộng được gọi là *hội tụ* nếu giới hạn về phải tồn tại hữu hạn, được gọi là *phân kỳ* nếu giới hạn về phải là vô hạn hoặc không tồn tại.

- Tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $(-\infty; a]$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x)dx$$

- Tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{v \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} \int_u^v f(x)dx$$

Tính chất:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

2. Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

- Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x)dx$$

được gọi là tích phân suy rộng của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

- Giả sử $f(x)$ liên tục trên $(a; b]$ và $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x)dx$$

được gọi là tích phân suy rộng của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

- Giả sử $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{v \rightarrow b- \\ u \rightarrow a+}} \int_u^v f(x)dx$$

được gọi là tích phân suy rộng của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Tính chất:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

nếu các tích phân suy rộng về phải hội tụ.

Bài tập áp dụng:

1) Bài tập trong giáo trình: Bài 13,14,15

Câu 4 (1,25 điểm). Tính tích phân suy rộng.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{36x^2 + 25}}$$

Câu 5: (1,25 điểm) Tính tích phân suy rộng $I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x}$.

Câu 3. (1,25 điểm) Tính tích phân sau: $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

Câu 4(1,25 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty} x e^{3-4x} dx$.

Câu 3. (1,25 điểm) Tính tích phân:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} + e^{-x}}{e^{-2x} + 1} dx$$

Câu 5 (1,25 điểm) Tính tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty} e^{-0,1x} \cdot \left(8 + \frac{x}{10}\right) dx$

Câu 4: (1,25 điểm) Tính tích phân sau:

$$\int \frac{4x + \sqrt{8-9x^2}}{x^2} dx$$

Câu 5: (1,25 điểm) Tính tích phân suy rộng:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 4}$$

Câu 5: (1,25 điểm) Hãy xét tính hội tụ, phân kỳ của tích phân sau:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(2012+x) dx}{x^2}$$

Câu 4: (1,25 điểm) Xét tính hội tụ, phân kỳ của tích phân sau:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - 6x + 11}$$

Câu 5(1,25 điểm). Tính tích phân sau: $I = \int_3^{+\infty} \frac{57}{(x-1)\ln^2(x-1)} dx$.

Câu 4. (2,5 điểm) Tính các tích phân:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(3x-1)}{x^2} dx$

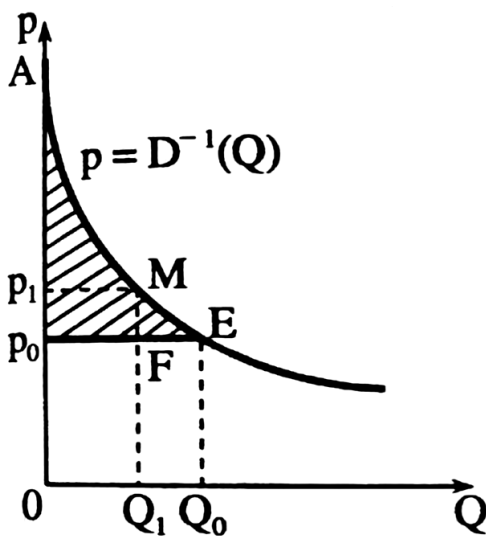
Câu 6: (1,25 điểm) Tính tích phân: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{x}{4}}{(16+x^2)^{3/2}} dx$.

Câu 4 (1,25 điểm). Tính tích phân suy rộng.

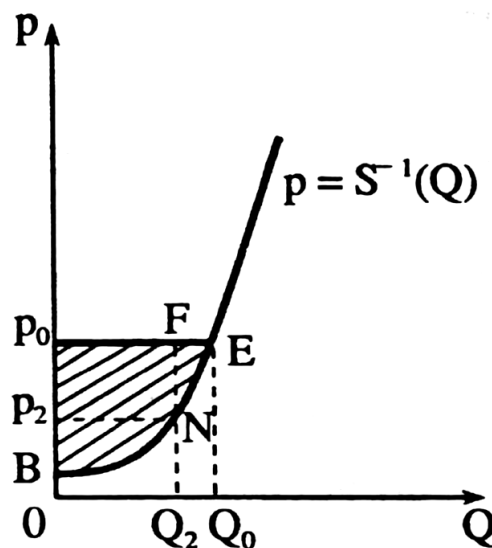
$$I = \int_0^{+\infty} (x^2 - 5) e^{-\frac{x^2}{10}} dx$$

Dạng 3: Ứng dụng của tích phân trong kinh tế học.

- Thặng dư của nhà sản xuất và người tiêu dùng: Giả sử (p_0, Q_0) là điểm cân bằng của thị trường. Khi đó ta có đồ thị của hàm cầu và hàm cung của thị trường đối với 1 loại sản phẩm như sau:



Thặng dư của người tiêu dùng



Thặng dư của nhà sản xuất

- Thặng dư của người tiêu dùng: Tổng số hưởng lợi của tất cả người tiêu dùng bằng diện tích tam giác cong AEP_0 . Các nhà kinh tế gọi đó là thặng dư của người tiêu dùng và được tính theo công thức sau:

$$CS = \int_0^{Q_0} D^{-1}(Q) dQ - p_0 Q_0.$$

- Thặng dư của nhà sản xuất: Tổng số hưởng lợi của tất cả các nhà sản xuất bằng diện tích của tam giác công BEp_0 . Các nhà kinh tế gọi đó là thặng dư của nhà sản xuất và được tính theo công thức sau:

$$PS = p_0 Q_0 - \int_0^{Q_0} S^{-1}(Q) dQ.$$

Bài tập áp dụng:

Câu 4. (2,5 điểm) Cho biết hàm cầu và hàm cung đối với một loại sản phẩm:

$$Q_D = -0,2p + 30, \quad Q_S = 0,3p - 20$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

NỘI DUNG 5: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Dạng 1: Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

- PTVP cấp 1 tuyến tính là PTVP có dạng tổng quát như sau:

$$y' + p(x).y = q(x) \quad (1)$$

- Khi $q(x) \equiv 0$ thì PTVP (1) có dạng:

$$y' + p(x).y = 0 \quad (2)$$

được gọi là PTVP cấp 1 tuyến tính thuần nhất liên kết với (1).

Lưu ý:

- PTVP cấp 1 tuyến tính thuần nhất (2) có nghiệm tổng quát:

$$y = C.e^{-\int p(x)dx} \quad (C \text{ là hằng số bất kỳ})$$

- Nghiệm của PTVP cấp 1 tuyến tính tổng quát được suy ra từ nghiệm của PTVP cấp 1 tuyến tính thuần nhất liên kết.

1. Phương pháp nhẩm nghiệm

Các bước thực hành giải PTVP cấp 1 tuyến tính:

$$y' + p(x).y = q(x) \quad (1)$$

Bước 1: Giải PTVP thuần nhất liên kết: $y' + p(x).y = 0$ ta được nghiệm tổng quát:

$$y = C.e^{-\int p(x)dx} = C.y(x)$$

(C là hằng số bất kỳ)

Bước 2: Tìm một nghiệm riêng $y_0(x)$ của PTVP (1).

Kết luận: Nghiệm tổng quát của PTVP (1) có dạng:

$$y = y_0(x) + C.y(x)$$

(C là hằng số bất kỳ)

Ví dụ: $y' + y = x + 1(*)$

Giải.

- Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất liên kết $y' + y = 0$ là:

$$y = C e^{-\int dx} = C e^{-x}$$

- $y = x$ là một nghiệm của pt (*) vì.....
- Kết luận: Vậy nghiệm tổng quát của pt (*) là

$$y = x + C e^{-x}$$

2. Phương pháp biến thiên hằng số

$$y' + p(x).y = q(x) \quad (1)$$

Bước 1: Giải PTVP thuần nhất liên kết: $y' + p(x).y = 0$ ta được nghiệm tổng quát:

$$y = C.e^{-\int p(x)dx} = C.y_0(x) \quad (C \text{ là hằng số bất kỳ})$$

Bước 2: Tìm nghiệm tổng quát của PTVP (1) dưới dạng

$$y = C(x).y_0(x)$$

Thế vào (1) ta tìm được biểu thức $C'(x) = q(x).y_0^{-1}(x)$

Kết luận: Nghiệm tổng quát của (1) có dạng:

$$y = \left[\int q(x).y_0^{-1}(x)dx + C \right].y_0(x)$$

Ví dụ: $(2x + 1)y' = 4x + 2y$ (*)

Giải. Phương trình tương đương với

$$y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}$$

- Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất liên kết $y' - \frac{2}{2x+1}y = 0$ là:

$$y = Ce^{\int \frac{2}{2x+1}dx} = Ce^{\ln|2x+1|} = C(2x+1)$$

- Biến thiên hằng số: Tìm nghiệm pt(*) dưới dạng: $y = C(x)(2x+1)$ (**)

$$(C(x)(2x+1))' - \frac{2}{2x+1}(C(x)(2x+1)) = \frac{4x}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow C'(x)(2x+1) + 2C(x) - 2C(x) = \frac{4x}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int \frac{4x}{(2x+1)^2} dx = \int \left(\frac{2}{(2x+1)} - \frac{2}{(2x+1)^2} \right) dx$$

$$= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C$$

- Thay vào (**), nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = \left(\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C \right) (2x+1)$$

$$= (2x+1) \ln|2x+1| + 1 + C(2x+1).$$

- Phương trình Bernoulli:

- PTVP Bernoulli là PTVP có dạng tổng quát:

$$y' + p(x).y = q(x).y^\alpha$$

với α là hằng số thực khác 0 và 1

Cách giải:

- PTVP Bernoulli có nghiệm riêng $y = 0$.
- Chia hai vế của PT cho y^α ta được PT:

$$y^{-\alpha}.y' + p(x).y^{1-\alpha} = q(x)$$

- Đặt $z = y^{1-\alpha}$ ta quy về PTVP cấp 1 tuyến tính:

$$z' + (1 - \alpha)p(x).z = (1 - \alpha)q(x)$$

Ví dụ: $y' + 2xy = 2x^3y^3$ (*)

Giải.

- $y = 0$ là nghiệm của phương trình:
- Xét $y \neq 0$. Chia 2 vế phương trình cho y^3 , ta được:

$$\frac{y'}{y^3} + 2x \frac{1}{y^2} = 2x^3$$

- Đặt $z = \frac{1}{y^2}$. Ta có $z' = (-2) \frac{y'}{y^3}$.

$$z' - 4xz = -4x^3(1)$$

- Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất liên kết $z' - 4xz = 0$ là

$$z = Ce^{2x^2}$$

- Nghiệm riêng của (1) là $z = x^2 + \frac{1}{2}$

Nghiệm tổng quát của (1) là: $z = x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}$.

Dạng 2: Phương trình vi phân phân ly biến số cấp 1

PTVP cấp 1 phân ly biến số (PT tách biến) có dạng:

$$M_1(x).M_2(y).dx + N_1(x).N_2(y).dy = 0 \quad (1)$$

hoặc: $y' = f_1(x).f_2(y) \quad (2)$

Cách giải:

- Xét các trường hợp $N_1(x) = 0$ và $M_2(y) = 0$ để tìm các nghiệm riêng của PT(1).
- Biến đổi PTVP (1) về dạng:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

- Lấy tích phân hai vế ta được nghiệm tổng quát:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C$$

Ví dụ: $xydx - (x + 1)dy = 0$.

Giải.

- Xét $y(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$ là nghiệm của phương trình.
- Xét $y(x + 1) \neq 0$. Chia 2 vế phương trình cho $y(x + 1)$, ta được:

$$\frac{xdx}{x + 1} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Lấy nguyên hàm 2 vế:

$$\int \frac{xdx}{x + 1} + \int \frac{dy}{y} = C$$

$$\Leftrightarrow x - \ln|x + 1| + \ln|y| = C$$

$$\Leftrightarrow -\ln e^x + \ln|x + 1| + \ln e^C = \ln|y|$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^C|x + 1|}{e^x}\right) = \ln|y|$$

Hay $y = \frac{C(x+1)}{e^x}$. Do vậy nghiệm tổng quát của pt là:

$$\begin{cases} y = \frac{C(x + 1)}{e^x} \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

- Một số phương trình quy về phân ly biến số:

1. Phương trình thuần nhất

PTVP thuần nhất có một trong hai dạng sau:

- $y' = f(x,y)$ trong đó $f(x,y)$ là hàm thuần nhất bậc 0, nghĩa là:

$$f(tx,ty) = f(x,y), \forall t$$

- $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$, trong đó M và N là các hàm thuần nhất cùng bậc s , nghĩa là:

$$M(tx,ty) = t^s.M(x,y); N(tx,ty) = t^s.N(x,y), \forall t$$

Cách giải:

Đổi biến $y = x.z$ với $x \neq 0$ ta quy PTVP thuần nhất về PTVP phân ly biến số.

Ví dụ: $y' = \frac{x-y}{x-2y}$

Giải.

$$y' = \frac{x-y}{x-2y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1-2\frac{y}{x}} \left(f(x,y) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}, y \cdot \frac{1}{x}\right) \right) \text{TXĐ: } x - 2y \neq 0$$

Đặt $y = zx \Rightarrow y' = z + xz'$ và $z = \frac{y}{x}$. Khi đó, ptvp tương đương với

$$\begin{aligned} z + xz' &= \frac{1-z}{1-2z} \Leftrightarrow z + x \frac{dz}{dx} = \frac{1-z}{1-2z} \\ \Leftrightarrow x \frac{dz}{dx} &= \frac{1-2z+2z^2}{1-2z} \Leftrightarrow \frac{(1-2z)dz}{1-2z+2z^2} - \frac{dx}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\int \frac{(1-2z)dz}{1-2z+2z^2} - \int \frac{dx}{x} = C \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln(1-2z+2z^2) - \ln|x| = C$$

$$1-2z+2z^2 = \frac{C}{x^2}$$

Thay $z = \frac{y}{x}$ ta nghiệm tổng quát của pt là: $x^2 - 2xy + 2y^2 = C$.

2. Phương trình dạng:

$$y' = f(ax + by)$$

Cách giải:

Đặt $z = ax + by$, ta có: $z' = a + b.y'$

Quy về phương trình phân ly biến số:

$$z' = a + b.f(z)$$

Ví dụ: $(1+x+y)dy = (1-3x-3y)dx$

Giải.

- $1 + x + y = 0$ không là nghiệm của phương trình.
- Xét $1 + x + y \neq 0$. Phương trình trên tương đương với:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3(x + y)}{1 + (x + y)} = f(x + y).$$

$$\text{Đặt } z = x + y \Rightarrow z' = 1 + y' = 1 + \frac{1-3z}{1+z} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{-2z+2}{z+1}$$

- NX: $z = 1$ là nghiệm.
- Xét $z \neq 1$. pt tương đương với $\frac{(z+1)dz}{-2z+2} - dx = 0$, lấy nguyên hàm
2 vế

$$-\frac{1}{2}z - \ln|z - 1| - x = C.$$

Từ $z = x + y$, ta có $-\frac{1}{2}(3x + y) - \ln|x + y - 1| = C$ hoặc $x + y = 1$.

Dạng 3: Phương trình vi phân toàn phần cấp 1

1. PTVP toàn phần

- PTVP $M(x, y).dx + N(x, y).dy = 0$ (1) được gọi là *PTVP toàn phần* nếu tồn tại hàm $\Phi(x, y)$ sao cho:

$$d\Phi(x, y) = M(x, y).dx + N(x, y).dy$$

- Khi đó (1) có nghiệm tổng quát: **$\Phi(x, y) = C$**

Định lý: Nếu $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ thì (1) là PTVP toàn phần. Khi đó:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int_{x_0}^x M(x, y).dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y).dy \\ \Phi(x, y) &= \int_{x_0}^x M(x, y_0).dx + \int_{y_0}^y N(x, y).dy\end{aligned}$$

với (x_0, y_0) là điểm bất kỳ thuộc MXĐ của $M(x, y)$ và $N(x, y)$.

Ví dụ: $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$.

Giải.

Đặt $M = x^2 + y^2 + 2x$; $N = 2xy$. Ta có

$$M'_y = 2y = N'_x$$

Vậy pt trên là pt vi phân toàn phần hay về trái là vi phân toàn phần của hàm số sau:

$$\phi(x, y) = \int_0^x (x^2 + y^2 + 2x)dx + \int_0^y 2.0.ydy = \frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2$$

Vậy nghiệm tổng quát của pt là: $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$.

2. Phương pháp thừa số tích phân

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0 \quad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với thừa số tích phân $p = p(x,y)$ sao cho:

$$p.M(x,y).dx + p.N(x,y).dy = 0$$

là PTVP toàn phần.

Gợi ý chọn thừa số tích phân

- $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x) \Rightarrow p = e^{\int \varphi(x) dx}$
- $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \psi(y) \Rightarrow p = e^{\int \psi(y) dy}$

Ví dụ: $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Giải. Không phải pt vi phân toàn phần.

$$M'_y - N'_x = 4y \Rightarrow \frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{-2}{x} = \varphi(x) \Rightarrow p(x) = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

Nhân 2 vế với $p(x) = \frac{1}{x^2}$ ta có:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$$

Đặt $M = \left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)$; $N = -2\frac{y}{x}$. Ta có

$$M'_y = \frac{2y}{x^2} = N'_x$$

Vậy pt trên là pt vi phân toàn phần hay về trái là vi phân toàn phần của hàm số sau:

$$\phi(x,y) = \int_1^x \frac{1}{x} dx + \int_0^y \frac{-2y}{x} dy = \ln|x| - \frac{y^2}{x} = C.$$

Câu 8 (1,25 điểm). Giải phương trình vi phân: $(2x - 4y - 1)dx + (x - 2y + 2)dy = 0$.

Câu 6: (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân $(4x^3 - y).dx + x.dy = 0$.

Câu 8. (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân sau: $3xydx + (x^2 + y^2 - 2)dy = 0$.

Câu 8(1,25 điểm). Giải phương trình vi phân: $y' = y(1 - 2xy)$.

Câu 7. (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân:

$$(5x^2 + x + y)dx + (10x^2y - x)dy = 0.$$

Câu 6. (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân:

$$y' = 0,5 \cdot y \cdot (81 - \ln^2 y).$$

Câu 6 (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân:

$$(x^2 + 4x + 6)y' + (x + 2)y = 5$$

Câu 8: (1,25 điểm) Tìm nghiệm phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{1-y}}{e^x + 1} \text{ thỏa mãn điều kiện } y(1) = 0.$$

Câu 6: (1,25 điểm) Tìm nghiệm của phương trình vi phân

$$(2x + y)dy - ydx = 0$$

thỏa mãn điều kiện: $y(3) = 1$.

Câu 7: (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân: $(3x - 2)y' = 6x - 4y$

Câu 8: (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân:

$$(3x^2y + 3x^3 - 2y^2 + 1)dx + (x^3 - 4xy + 3y)dy = 0$$

Câu 8: (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân sau:

$$x \cdot (x + 2y^2) \cdot dx - y \cdot (1 - 2x^2) \cdot dy = 0$$

Câu 6 (1,25 điểm). Giải phương trình vi phân: $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$

Câu 7. (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân:

$$x \cdot y' + 3y = \frac{2x^2}{y}.$$

Câu 3. (1,25 điểm) Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định từ phương trình:

$$\frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{2} = 3.$$

Chúng ta hàm số $y = y(x)$ này là nghiệm của phương trình vi phân:

$$2x \cdot y'' - (3xy^2 + 1) \cdot y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Câu 7: (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân: $\left(\frac{3x}{y} + e^{xy}\right) + \left(3 + \frac{x}{y}e^{xy}\right)y' = 0.$

Câu 7. (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân sau:

$$(2y + y^2 \cdot \sqrt{y} + 8xy\sqrt{y})dx + (x + 2xy \cdot \sqrt{y} + 4x^2 \cdot \sqrt{y})dy = 0$$

Câu 8: (1,25 điểm) Giải phương trình vi phân :

$$\left(\arccos x - \frac{2x}{y}\right)dx - \left(3y^2 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0.$$