$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

النهاية غير موجودة لاختلاف قيمتها باختلاف ميل المسار ، وإذن الدالة غير متصلة عند (0,0).

16) لكى تكون الدالة متصلة عند $(0,\frac{1}{2})$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\lim_{(x,y) \to (0,\frac{1}{2})} f(x,y) = k.$$

$$\Rightarrow k = \lim_{(x,y) \to (0,\frac{1}{2})} \frac{1}{y^2} * \frac{x y^2}{\sin(x y^2)} = 4.$$

لاحظ أن الدالة المعطاة غير متصلة عند جميع النقط التى تجعل المقام يتلاشى وهى نقط المنحنيات

$$x y^2 = n\pi \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

-o-o-o-

ثانيا : مسائل يقوم بحلها الطالب

1) $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4} - 2} * \frac{\sqrt{x^2+y^2+4} + 2}{\sqrt{x^2+y^2+4} + 2}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4} + 2)}{x^2+y^2+4-4} = \sqrt{4} + 2 = 4$$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-y)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}$

let $X = x-1$, $Y = y-1$

$= \lim\limits_{(X,Y)\to(0,0)} \dfrac{(X-Y)^2}{X^2+Y^2}$ using Polar coordinates

$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{(r\cos\theta - r\sin\theta)^2}{\cancel{r^2}\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{1}$

only depending on (θ) $\therefore$ there is no limit

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \dfrac{\cos(xy)}{1-x-\cos y} = \dfrac{-1}{1} = -1$

There is a limit which is equal to (-1)

4) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$$

let $X = x-1$, $Y = y-2$

$$= \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{(X+1)(Y+2)-2(X+1)-(Y+2)+2}{(X+1)^2+(Y+2)^2-2(X+1)-4(Y+2)+5}$$

$$= \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{\cancel{2}+XY+\cancel{Y}+\cancel{2X}-\cancel{2X}-\cancel{2}-\cancel{Y}-\cancel{2}+\cancel{2}}{X^2+\cancel{2X}+\cancel{1}+Y^2+\cancel{4Y}+\cancel{4}-\cancel{2X}-\cancel{2}-\cancel{4Y}-\cancel{8}+\cancel{5}}$$

$$= \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{XY}{X^2+Y^2}$$ (باستخدام المسار $Y = mX$)

$$= \lim_{X\to 0} \frac{m\cancel{X^2}}{\cancel{X^2}+m^2\cancel{X^2}} = \frac{m}{1+m^2} \Rightarrow$$ ∴ لا يوجد نهاية

5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$ using polar coordinates

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^4}^{\,r^2}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\cancel{r^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}} = 0$$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$ باستخدام المسار $Y = mX^3$

$= \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{mX^{12}}{(X^6+m^2X^6)^2} = \dfrac{m}{(1+m^2)^2} \Rightarrow$ تعتمد على m

$\therefore$ There is no limit

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\tan xy^2}{x^3+y^3}$ باستخدام المسار $(Y = mX)$

$= \lim\limits_{(X)\to 0} \dfrac{\tan m^2X^3}{X^3+m^3X^3} \div \dfrac{X^3}{X^3}$

$= \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\dfrac{\tan m^2X^3}{X^3}}{1+m^3} = \dfrac{m^2}{1+m^3} \Rightarrow$ تعتمد على m

$\therefore$ There is no limit

٨) أوجد قيمة k بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ k & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أولاً: ندرس عند جميع النقط عدا $(0,0)$

$f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \Longrightarrow$ وهي متصلة على كل $\mathbb{R}^2$ إلا عند:

$x^2+y^2=0$

أي عند النقطة $(0,0)$

ثانياً: ندرس عند النقطة $(0,0)$

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = 1$

2) $f(0,0) = K \Rightarrow \therefore$ The function is connected $\Rightarrow \therefore 1) = 2)$

$\therefore \boxed{K=1}$

٩) اثبت أن الدالة f غير متصلة عند $(0,0)$ حيث

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^6+y^3} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أولاً نبحث عند النقطة $(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^6+y^3}$ باستخدام المسار $y = mx^2$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{m^2x^6}{x^6+m^3x^6} = \dfrac{m^2}{1+m^3} \Longrightarrow$ لا يوجد نهاية

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند $(0,0)$ حيث لا يوجد نهاية عندها