

Systèmes asservis échantillonnés

I. Introduction

Le traitement numérique présente quelques différences importantes par rapport au traitement analogique :

- Les valeurs des grandeurs physiques constituant les signaux analogiques doivent être représentés par des nombres (discrétisation).
- Les opérations numériques réalisées par le processeur ne se font pas instantanément le temps se définit sur un ensemble discret d'instants (instants d'échantillonnage) séparés par un intervalle de temps régulier (la période d'échantillonnage).
- Il est donc nécessaire de définir des outils mathématiques adaptés au temps discret pour représenter ces signaux et systèmes échantillonnés (transformée en z).
- Adapter les outils et méthodes de l'automatique analogique (à temps continu) à la conception de régulateurs numériques (conversion analogique/numérique et numérique/analogique).
- Le calculateur numérique est plus flexible et permet d'obtenir des performances meilleures que celles obtenues par des commandes analogiques.

II. Structure générale d'un système asservi numérique

Dans un système asservi numérique (ou échantillonné) les grandeurs suivantes sont de type numérique :

La consigne : elle peut être contenue numériquement dans un tableau (signal numérique).

Le comparateur : c'est l'opération de soustraction qui est réalisée numériquement.

Le correcteur : c'est un algorithme de même type que pour un filtre numérique.

Une boucle d'asservissement est représentée par la chaîne suivante :

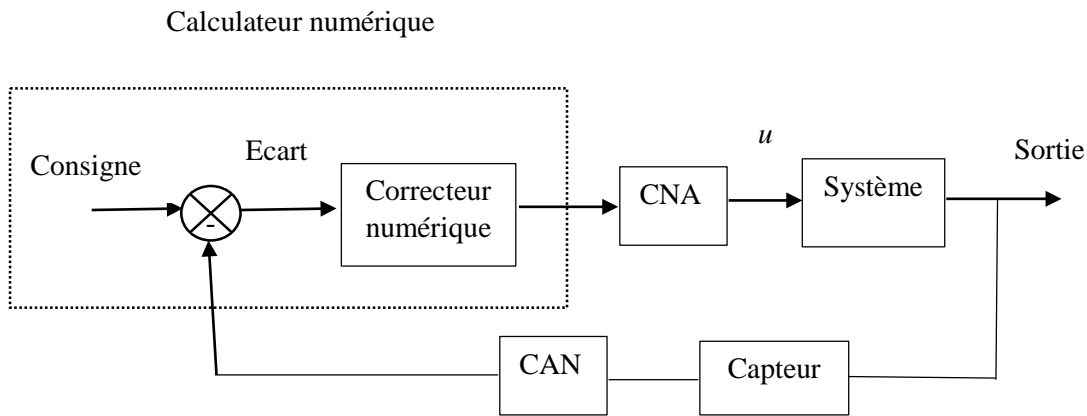
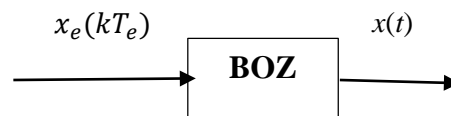


Fig .1 : Structure générale d'un système asservi numérique

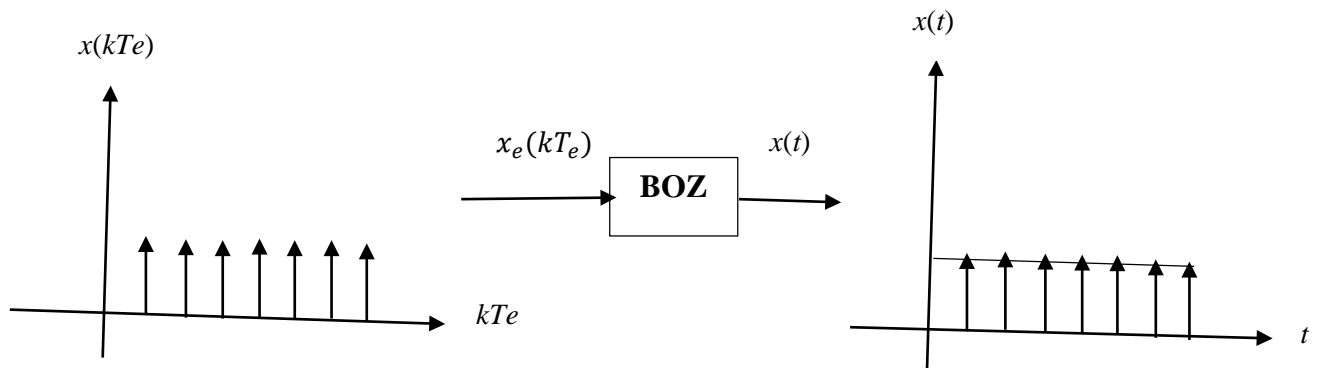
III. Convertisseur numérique/analogique (CNA)

La fonction du CNA est de transformer la séquence numérique en un signal analogique cette fonction est décrite par le bloqueur d'ordre zéro (BOZ), il produit un signal électrique (tension) constant entre 2 instants d'échantillonnage dont la valeur est celle du dernier nombre présent à l'entrée.



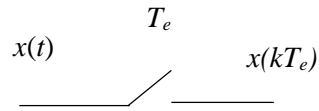
Le signal $x(t)$ vérifie donc :

$$\forall t \in [kT_e, (k+1)T_e[, x(t) = x_e(kT_e)$$



IV. Convertisseur analogique/numérique (CAN)

La fonction de CAN est décrite par un modèle d'un interrupteur idéal (l'échantillonneur)

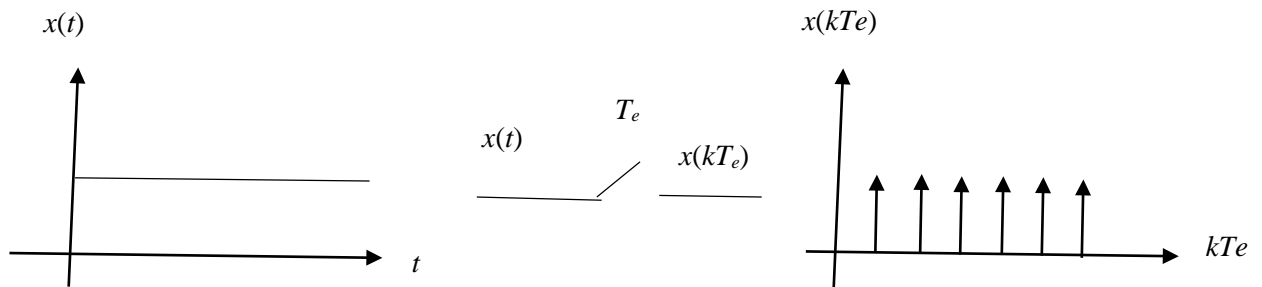


Dans ce modèle l'interrupteur se ferme pendant un temps infiniment court, et le nombre $x_e(kT_e)$ représente exactement la valeur de signal $x(t)$ à l'instant $t=kT_e$. Ce nombre est le poids d'une impulsion de dirac : $x_e(kT_e) = x(t) \times \delta(t - kT_e)$

L'impulsion de dirac se produit à $t=kT_e$

Le signal échantillonné est une suite de nombres apparaissant à intervalles de temps réguliers : la période échantillonnage T_e . Cette suite de nombre est représentée par une séquence numérique.

$$\{x_e(kT_e)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \times \delta(t - kT_e)$$



Exemples de signaux échantillonnés

- **Impulsion de Dirac**

Cette fonction est définie par : $\delta(k) = 0, \forall k \neq 0$ avec

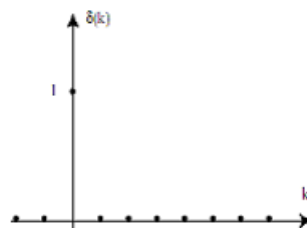


Fig.2. Impulsion de Dirac

- **Echelon unitaire**

Cette fonction est définie par :

$$\begin{cases} \Gamma(k) = 0, & \forall k < 0 \\ \Gamma(k) = 1, & \forall k \geq 0 \end{cases}$$

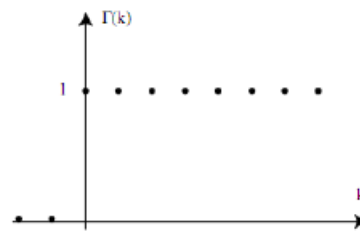


Fig.3. Echelon unitaire

- **Rampe ou échelon de vitesse**

Cette fonction est définie par :

$$\begin{cases} r(k) = 0, & \forall k \neq 0 \\ r(k) = k, & \forall k = 0 \end{cases}$$

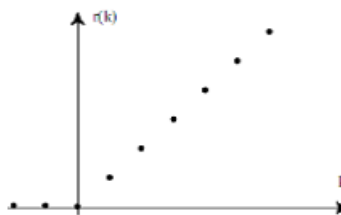


Fig.4. Rampe

Théorème de Shannon : la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T}$ doit être choisie grande ou égale à deux fois la fréquence haute de la bande du processus à commander $f_e > 2B$

f est la fréquence d'échantillonnage,

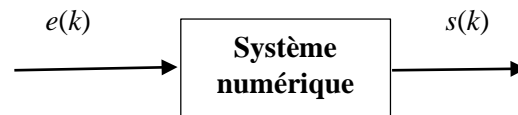
B est la largeur spectrale du signal.

V. Représentation des systèmes échantillonnés

Un système à temps discret est un système où l'entrée et la sortie sont des signaux discrets. Les systèmes étudiés ici sont des systèmes linéaires. Il est donc bien important de comprendre les caractéristiques des systèmes linéaires. Les systèmes linéaires discrets possèdent les mêmes caractéristiques que les systèmes linéaires continus.

V.1 Représentation par les équations aux différences (équation de récurrence)

Considérons un système à temps discret, linéaire, causal et invariant. Ce système fournit en sortie un signal à temps discret $s(k)$ en réponse à un signal d'entrée à temps discret $e(k)$.



Un système numérique est défini par une équation de récurrence entre l'entrée $e(k)$ et la sortie $s(k)$

$$s_{k+n} + a_{n-1}s_{k+n-1} + \dots + a_1s_{k+1} + a_0s_k = b_0e_k + b_1e_{k+1} + \dots + b_me_{k+m} \quad (m \leq n)$$

Cette équation permet de calculer le terme $(k+n)$ si on connaît les autres termes.

V.2 Opérateurs d'avance/retard

Retard : les retards se manifestent dans l'équation de récurrence par l'apparition des termes en $(k - \gamma)$; où γ est le retard en nombre de pas d'échantillonnage.

La transformée en z de ce retard est $z^{-\gamma}$

Avance : les avances se définissent par le terme $(k + \gamma)$

La transformée en z d'avance est $z^{+\gamma}$

Exemple

$$s(k + 3) + 3s(k + 2) + 2s(k + 1) + s(k) = e(k + 1) + e(k) + e(k - 1) + e(k - 2)$$

VI. Transformée en z

VI.1 Définition

C'est l'outil principal de l'analyse des systèmes échantillonnés possédant une entrée et une sortie. Elle est analogue de la transformée de Laplace des systèmes continus.

La forme standard de la transformée en Z est :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

Exemple

Calculer la transformée en z du signal suivant :

$$x(k) = a^k, \quad \forall k \geq 0$$

La transformée en z est :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{si } \left| \frac{a}{z} \right| < 1$$

VI.2 Propriétés de la transformée en z

$x(k)$ et $h(k)$ fonctions échantillonnée, $X(z)$ et $H(z)$ leur transformées en z .

Propriété	Signal	Transformée en z
Linéarité	$ax(k) + bh(k)$	$aX(z) + bH(z)$
Déphasage	$x[k - s]$	$z^{-s}X(z)$
Déphasage	$x[k + s]$	$z^{+s}X(z)$
Réflexion	$x[-k]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
Echelonage	$\alpha^k x[k]$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$
Convolution	$x(k) * h(k)$	$X(z) \times H(z)$

Tableau 1 – Propriétés de la transformée en z

Théorème de la valeur initiale et finale

Le théorème de la valeur initiale est :

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Le théorème de la valeur finale est :

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

VI.3 Transformée en Z des signaux élémentaires

$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(kT)$	1

$\delta(kT - k_0T)$	z^{-k_0}
$U(k) = 1$	$\frac{z}{z-1}$
kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-akT}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega kT$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

VI.4 Transformée en z inverse

Le calcul de la transformée inverse $x(k)$ d'une fonction $X(z)$ peut se faire selon deux méthodes :

1. Par décomposition en éléments simples de $X(z)/z$ puis en utilisant la table de transformées.

Exemple

$$X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{4}{z-1} - \frac{4}{z-0.5}$$

$$x(k) = 4 - 4(0.5)^k$$

2. On peut aussi calculer les premières valeurs de $x(k)$ en effectuant une division de polynômes :

Exemple

$$X(z) = \frac{z}{z-2} = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} \dots \dots \dots$$

On retrouve les premières valeurs de $x(k)$: $x(0) = 1$; $x(1) = 2$; $x(2) = 4$.

VI.5 Fonction de transfert discrète (Transmittance en Z)

Tout comme la transformée de Laplace permet de trouver la fonction de transfert d'un système, la transformée en z permet de trouver la fonction de transfert d'un système discret.

Pour un système discret, la fonction de transfert a la forme :

$$H(z) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

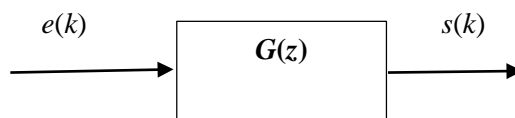
On peut aussi utiliser une autre forme pour représenter la fonction de transfert. Soit z_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, m$ les racines du numérateur, et p_k ; $k = 1, 2, 3, \dots, n$ les racines du dénominateur.

On peut exprimer la fonction de transfert selon :

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_k)}$$

Si on suppose que les facteurs communs aient été annulés, les racines du numérateur sont appelées les zéros et les racines du dénominateur sont appelés les pôles.

Le schéma fonctionnel du système du système numérique est :



L'ordre du système est le degré au dénominateur de la fonction de transfert.

Diagramme des pôles et zéros

On peut tracer les pôles et les zéros sur un graphique, les pôles étant représentés par des "x" et les zéros représentés par des cercles.

Réponse d'un système

On peut connaître la réponse d'un système à une entrée donnée en formant la transformée en Z inverse de $G(z) \times E(z)$

Exemple 1 : trouver la fonction de transfert de système défini par cette équation de récurrence suivante :

$$s(k + 3) + 3s(k + 2) + 2s(k + 1) + s(k) = e(k + 1) + e(k) + e(k - 1) + e(k - 2)$$

On applique la transformée en Z

$$z^3 s(z) + 3z^2 s(z) + 2zs(z) + s(z) = zE(z) + E(z) + z^{-1}E(z) + z^{-2}E(z)$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z + 1 + z^{-1} + z^{-2}}{z^3 + 3z^2 + 2z + 1}$$

Exemple 2

Soit un système défini par une équation de récurrence :

$$y(k+1) = 0.5 y(k) + e(k)$$

L'entrée est un échelon unitaire avec $y(0) = 0$

Trouver la sortie $y(k)$.

Solution

La transformée en Z du système :

$$zY(z) - 0.5 Y(z) = E(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{z - 0.5} E(z)$$

Si l'entrée est un échelon unitaire alors $E(z) = \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{1}{(z - 0.5)} \frac{z}{z - 1}$$

En décomposant en éléments simples :

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-0.5}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0.5}$$

$$y(k) = 2 - 2(0.5)^k$$

Le gain statique

K est défini par :

$$K = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} s_k}{\lim_{k \rightarrow \infty} e_k}$$

Théorème des valeurs finales donne :

$$K = \frac{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z)}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

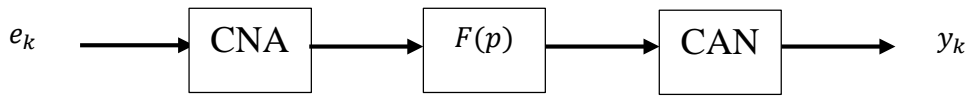
$$K = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$K = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_n}{1 + a_{n-1} + \dots + a_0}$$

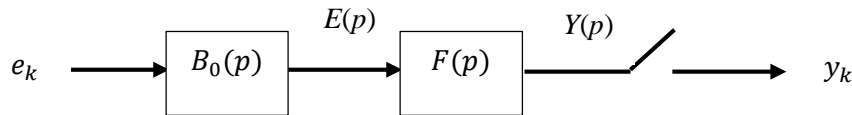
$$K = \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i}$$

VII. Transmittance en z d'un système analogique discrétisé

Un système analogique est discrétisé par l'ajout d'un CNA à l'entrée et un CAN à la sortie, selon la figure suivante :



Pour calculer la transmittance en z de ce système, on calcule la transformée en z de la sortie lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac. Le schéma fonctionnel équivalent est représenté par :



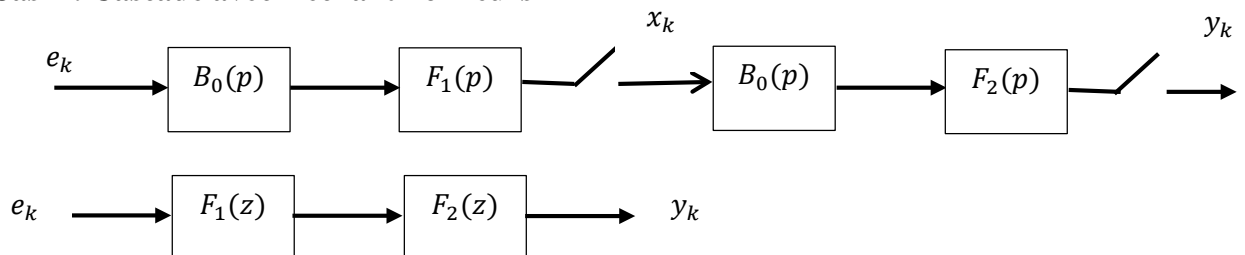
La transmittance en z du système échantillonné est alors :

$$H(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) T_z \left(\frac{F(p)}{p} \right)$$

Association des systèmes discrétisé

Système en boucle ouverte

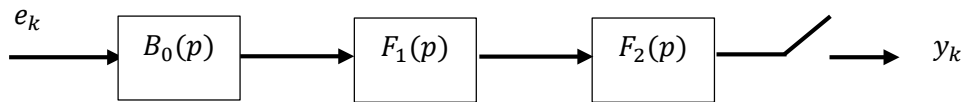
Cas 1 : Cascade avec 2 échantillonneurs



$$F(z) = F_1(z) \times F_2(z)$$

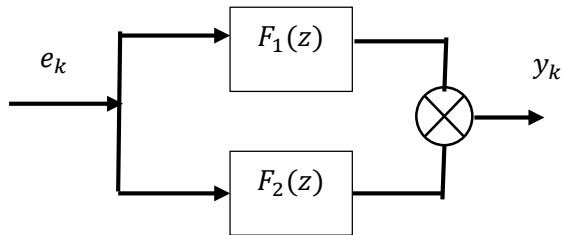
$$F(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) T_z \left(\frac{F_1(p)}{p} \right) \times \left(\frac{z-1}{z} \right) T_z \left(\frac{F_2(p)}{p} \right)$$

Cas 2 : Cascade avec 1 échantillonneur



$$F(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) T_Z \left(\frac{F_1(p) \times F_2(p)}{p} \right)$$

Cas 3 : Parallèle

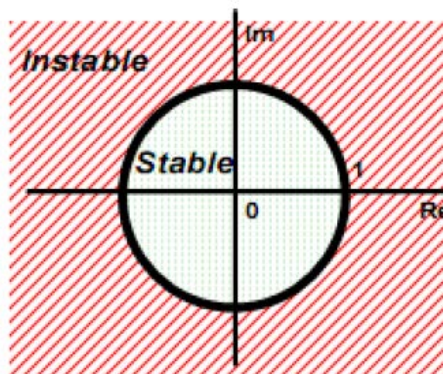


$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

VIII Conditions de stabilité

VIII.1 Critère mathématique de stabilité

Un système numérique décrit par une fonction de transfert $G(z)$ est stable si et seulement si tous les pôles de ce système sont de module inférieur à 1 ; c'est-à-dire si tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité de rayon 1 et de centre (0,0) dans le plan complexe.



Soit le système discret décrit par la fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

On définit les pôles p_i du système $G(z)$ qui sont les racines de polynôme caractéristique :

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Alors si $|p_i| < 1 \Leftrightarrow$ le système $G(z)$ est stable.

Exemple 1 :

Soit le système discret suivant :

$$G(z) = \frac{0.3466}{z-0.7843}$$

Formons et résolvons l'équation caractéristique du système :

$D(z) = z - 0.7843 = 0 \Leftrightarrow p = 0.7843$ et comme $|p = 0.7843| = 0.7843 < 1 \Leftrightarrow$ le système est stable.

VIII.2 Critère algébrique de Jury

Il n'est pas toujours facile de calculer les pôles d'une fonction de transfert en boucle fermée, surtout quand celle-ci se présente sous une forme assez développée, le critère de Jury permet l'étude de la stabilité d'un système représenté sans calculer explicitement ces pôles.

Il permet de déterminer la stabilité d'un système à partir des coefficients du dénominateur de sa fonction de transfert en boucle ouverte (ou bien en boucle fermée).

Soit un système discret dont la fonction de transfert est la suivante :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Le polynôme caractéristique du système est donné comme suit :

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Où : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des coefficients réels et avec $a_0 > 0$

Le critère nécessite de former un tableau de Jury.

Le tableau définitif doit comporter $2n-3$ lignes.

1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_0
2	a_0	a_1	a_2	\dots	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	\dots	b_0	
4	b_0	b_1	\dots	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	\dots	c_0		
6	\vdots				

Avec :

$$b_i = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-i} \\ a_0 & a_{i+1} \end{vmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$c_i = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-i} \\ b_0 & b_{i+1} \end{vmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$$

⋮

Le système est stable si toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $|a_n| < a_0$
 2. $D(1) > 0$
 3. $D(-1) > 0$ si n est pair, $D(-1) < 0$ si n est impaire
 4. $|b_{n-1}| > |b_0|$
 5. $|c_{n-2}| > |c_0|$
- ⋮

Exemple

Soit le polynôme suivant :

$$D(z) = z^2 + z + 0.21$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0.21$$

Le tableau de Jury a $2n-3=1$ ligne il faut donc vérifier les trois premières conditions de Jury.

1. $|a_2 = 0.21| < a_0 = 1$
2. $D(1) = 2.21 > 1$
3. $D(-1) = 0.21 > 1$ ($n = 2$)

Comme les trois conditions sont satisfaites, donc les racines du polynôme $D(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité et d'après Jury le système est stable.

Remarque

Si $a_0 < 0$

- On construit un autre polynôme $D_1(z) = -D(z)$
- Puis, on traite le nouveau polynôme $D_1(z)$ par le critère de Jury.

VIII.3 Critère de Routh

Pour utiliser le critère de Routh, il faut employer la transformation W .

L'équation caractéristique devient :

$$D'(W) = (1 - W)^n \times D\left(\frac{1+W}{1-W}\right)$$