

Electromagnétisme des MILIEUX

TD série 1

responsable : Mr Zoheir

Exercices

On rappelle que les densités surfacique et volumique de polarisation sont données respectivement par

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_p = -\text{div} \vec{P}, \quad \vec{P} \text{ étant le vecteur polarisation.}$$

Déterminer les densités de charges surfaciques σ_p et volumiques ρ_p dans les cas suivants :

- 1) Cylindre d'axe Oz, uniformément polarisé perpendiculairement à son axe : $\vec{P} = P\vec{e}_x$. On exprimera le résultat en fonction de \vec{P} et on travaillera en coordonnées $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
- 2) Cylindre de rayon R dont la polarisation est radiale $\vec{P} = \left(\frac{P_0 R}{r}\right)\vec{e}_r$ où $P_0 = \text{Cste}$

$$\text{On donne pour un vecteur quelconque : } \text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Problème 1

On place une boule diélectrique de permittivité ϵ , dans un champ électrique uniforme noté \vec{E}_0 supposé connu.

1) En admettant que la polarisation est uniforme à l'intérieur de cette boule, déterminer:

- a) le champ dépolarisant créé au centre de la sphère en fonction de \vec{P} .
- b) On suppose \vec{P} inconnue, calculer ce vecteur de polarisation et le champ total dans le diélectrique en fonction du champ appliqué \vec{E}_0 .

2) On reprend la même boule mais avec une polarisation $\vec{P} = P\vec{e}_r$ ($P = \text{cste}$) et $\vec{E}_0 = \vec{0}$

- a) De quelle type de polarisation s'agit-il? recalculer les charges fictives de polarisation et leur somme algébrique
- b) En utilisant le théorème de Gauss, établir le champ électrique en un point quelconque de l'espace (On affectera l'indice 1 à ce qui est intérieur à la sphère et l'indice 2 à ce qui est extérieur)
- c) Déterminer les vecteurs diélectriques \vec{D}_1 à l'intérieur et \vec{D}_2 à l'extérieur, puis vérifier la relation de passage entre les deux milieux. (on rappelle que $\vec{D}_i = \epsilon_0 \vec{E}_i + \vec{P}_i$, $i = 1, 2$; $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_{21} = \sigma$ où σ la densité de charges surfacique de conduction; \vec{n}_{21} la normale à la surface allant de 2 vers 1)

4) Déterminer l'énergie due à la polarisation de cette sphère diélectrique à partir de l'intégrale $\int \vec{P} \cdot \vec{E} d\tau$ où $d\tau$ est l'élément de volume

Problème 2 (Examen ordinaire 2019)

On considère un diélectrique cylindrique, de hauteur h , très long, creux de rayon interne a et extérieure $b > a$. Ce diélectrique LHI possède une permittivité réelle ϵ .

On place sur l'axe Oz un fil conducteur infini chargé uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$

- 1) En utilisant les propriétés de symétries et d'invariances trouver le sens et les variables dont dépend le champ électrique créé par le fil seul. Montrer que ce champ vaut $\vec{E}_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$.
- 2) En utilisant le théorème de Gauss, établir le champ diélectrique \vec{D} en tout point de l'espace.
- 3) En déduire l'expression du champ électrique \vec{E} puis le champ de polarisation \vec{E}_p pour $a < r < b$
- 4) En déduire l'expression du vecteur polarisation \vec{P} .
- 5) En déduire les densités charges de polarisation volumique ρ_p et surfaciques $\sigma_{p1(r=a)}$ et $\sigma_{p2(r=b)}$

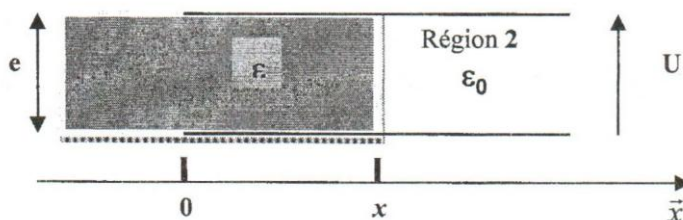
Problème 3.

Un condensateur est formé par deux armatures planes métalliques en regard portées à une différence de potentiel U . On note S la surface des armatures, b leur largeur et l leur longueur. Les dimensions des armatures sont très grandes devant leur écartement e .

Une lame diélectrique homogène linéaire et isotrope de permittivité ϵ est partiellement introduite de façon quasistatique entre les armatures de ce condensateur.

On notera x la distance introduite entre les armatures

1. a) Ecrire la condition de passage pour la composante normale \vec{D} entre le conducteur et le diélectrique (région 1), puis entre le conducteur et l'air (région 2)
- b) Ecrire la relation de passage pour la composante tangentielle du champ \vec{E} entre le diélectrique et l'air.
2. **Etablir à partir des résultats de la question 1**, l'expression de la capacité C du condensateur.
3. Donner l'expression de la force qui agit sur le diélectrique.
4. On considère que le condensateur est rempli de diélectrique
 - a) Calculer la nouvelle capacité
 - b) exprimer l'énergie dépensée pour la polarisation du diélectrique W_p et l'énergie dépensée par le générateur pour déplacer le diélectrique W_f . Conclusion.



Exercices

$$\rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}, \quad \rightarrow \rho_p = -\text{div } \vec{P} \quad \rightarrow \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dZ}$$

① \vec{P} : vecteur polarisation

② $d\vec{p}$: moment dipolaire d'un volume dZ ds
le cas d'une distribution continue.

③ \vec{n} : normale à la surface du diélectrique.

1)

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

$$\vec{P} = P \vec{e}_z \quad \text{uniforme} \Rightarrow \rho_p = 0$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta \quad \text{en coordonnées } (r, \theta, z)$$

2) Polarisation Radiale

$P_0 = \text{ste}$

$$\vec{P} = \left(\frac{P_0 R}{r} \right) \vec{e}_r$$

$$\textcircled{1} \rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

$$\vec{P} \begin{cases} P_r = P_0/r \\ P_\theta = 0 \\ P_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{div } (\vec{P}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_\theta + \frac{\partial}{\partial z} P_z$$

$$\underline{\underline{\text{div } \vec{P} = 0}}$$

$$\textcircled{2} \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_0$$

3)

$$\vec{E} = P_0 \cos \theta \vec{e}_r + P_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$$

cylindre

$$\textcircled{1} \sigma_p = P_0 \cos \theta$$

$$\textcircled{2} \rho_p = -\frac{2 P_0 \cos \theta}{r}$$

avec $\vec{P} \begin{cases} P_r = P_0 \cos \theta \\ P_\theta = P_0 \sin \theta \\ P_z = 0 \end{cases}$

Pr1

1) 1) Polarisation instantanée.

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = P$$

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) = -\frac{2P}{r}$$

$$\boxed{\sigma_p = P \quad \text{et} \quad \rho_p = -\frac{2P}{r}}$$

$$Q = \sigma_p S_{\text{sphère}} + \int \rho_p dV = P \times 4\pi R^2 + \int_0^R 4\pi r^2 dr \left(-\frac{2P}{r}\right) = 0$$

$$\boxed{Q = 0}$$

$$2) \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow r < R \rightarrow \vec{E}_1, \vec{D}_1$$

$$\rightarrow r > R \rightarrow \vec{E}_2, \vec{D}_2$$

symétrie sphérique $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r = E(r) \vec{e}_r$
(invariance θ et φ)

$$d\vec{S} = dS \vec{e}_r; \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} E dS = E \times 4\pi r^2 \text{ sur } \Sigma: \text{sphère}(0, r)$$

r fixe.

$$\times \text{ Pour } r < R \quad E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi r'^2 \left(\frac{2P}{r'}\right) dr'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}} \quad \uparrow \rho_p \neq 0$$

$$\times \text{ Pour } r > R \quad \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \vec{0}}$$

$$3) \vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2 \quad \vec{P}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 = \vec{0}}$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1 \quad \vec{P}_1 = \vec{P} \Rightarrow \boxed{\vec{D}_1 = \epsilon_0 \left(-\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\right) + \vec{P} = \vec{0}}$$

$$\text{or } \underline{\sigma = 0} \quad ; \quad \begin{aligned} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} &= \sigma \\ (\vec{0} - \vec{0}) \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Bien vérifiée.}$$

$$4) W_p = \frac{1}{2} \int \vec{P} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int \left(-\frac{P^2}{\epsilon_0}\right) dV = -\frac{1}{2} \int_0^R \frac{P^2}{\epsilon_0} 4\pi r^2 dr$$

$$\boxed{W_p = -\frac{2\pi P^2 R^3}{3\epsilon_0}}$$

Problème 2

Diélectrique cylindrique hauteur h , rayons $b > a$, $\epsilon_1, \epsilon_2, \lambda$.

1/ Fil infini, $\lambda = \text{cte}$ o: sens: tout Plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ ou $M \in O\vec{z}$ est un plan Π^* d'Antisymétrie $\Rightarrow \vec{E} \perp \Pi^* \Rightarrow \vec{E} = E \vec{e}_r$

invariances: symétrie cylindrique: ne dépend pas de ϕ
 f.l infini: ne dépend de z

$\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(r) \quad \vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

on applique le th de Gauss: \Rightarrow surface de Gauss: cylindre de rayon r de hauteur h et d'axe $O\vec{z}$.

0,5pt \rightarrow th de Gauss: $\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ avec $d\phi = \lambda dl$

$d\vec{S} = ds \vec{e}_r \Rightarrow \phi = \iint E \cdot ds = E \times S = E \times 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$

1pt $\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

2/ On utilise le th de Gauss pour \vec{D} .

même symétrie et invariances que pour \vec{E} .

$\vec{D} = D \vec{e}_r$ car tout Plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ ou $M \in O\vec{z}$ est un plan Π^* d'Antisym $\Rightarrow \vec{D} \perp \Pi^* \Rightarrow \vec{D} = D \vec{e}_r$

0,5pt invariances: sym. cylindrique; cylindre $\infty \Rightarrow \vec{D}(r)$

th de Gauss: $\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{int}}$

on a 3 zones:

0,5 $\rightarrow r < a$

$$D_1 \times 2\pi r h = \lambda h \Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r$$

0,5 $\rightarrow a < r < b$

$$D_2 \times 2\pi r h = \lambda h \Rightarrow \vec{D}_2 = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r$$

0,5 $\rightarrow r > b$

$$D_3 = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r$$

(donc $\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}_3$ ne dépend que des charges libres.)

3°/ pour $a < r < b$ dans le diélectrique:

On sait que $\vec{D}_2 = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r$ et $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} \vec{e}_r$$

(1pt)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \quad (\text{pour } a < r < b)$$

$$\vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_0$$

(1pt)

$$\vec{E}_p = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} \vec{e}_r - \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_p = \frac{\lambda}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \vec{e}_r. \quad ! Rq: \text{on peut remplacer } \epsilon \text{ par } \epsilon \epsilon_r$$

4°/

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \quad \text{ou bien}$$

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

(1pt)

$$\vec{P} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r$$

ou bien $\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r.$

5°/

(1pt)

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P} \quad \text{or} \quad \vec{P} \Big|_{r=a}^{r=b} \begin{matrix} P_r = P(r) \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\rho_p = \text{div} \vec{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \times \frac{\lambda}{2\pi r} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \right) = 0.$$

(ce n'est pas car il est UNIFORME !)

\Rightarrow

(1pt)

$$\sigma_{p1}(r=a) = \vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{P}(a) \cdot (-\vec{e}_r) = -P(a)$$

$$\sigma_{p1}(R_1) = -\frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)$$

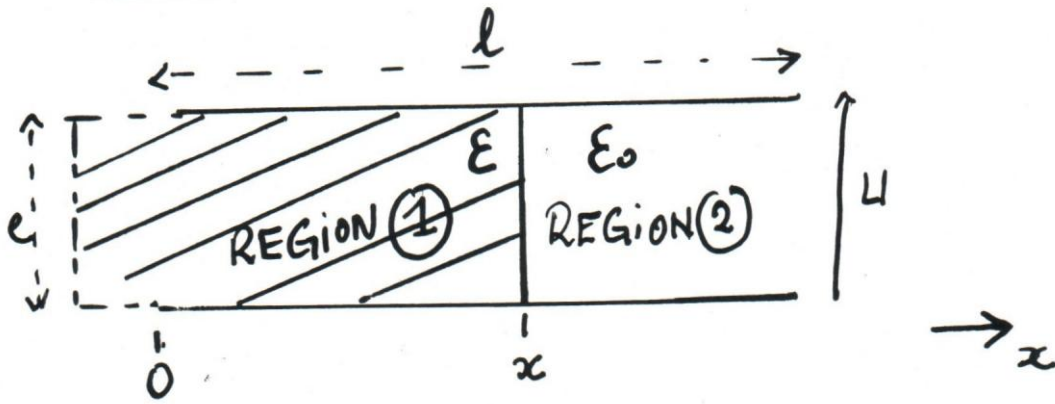
(1pt)

$$\sigma_{p2}(r=b) = \vec{P}(b) \cdot \vec{n} = \vec{P}(b) \cdot (\vec{e}_r) = P(b)$$

$$\sigma_{p2} = +\frac{\lambda}{2\pi b} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)$$

(4)

Problème 3



$$S = b \times l$$

$$b, l \gg e$$

$$u.$$

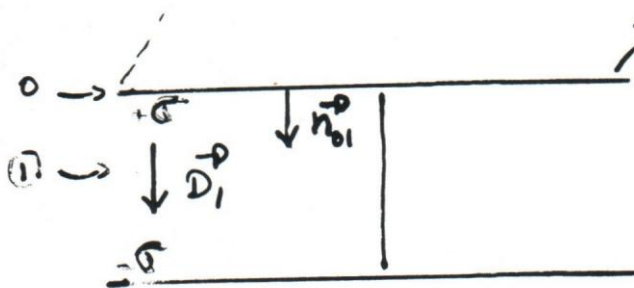
1°/ a) \vec{D} entre le conducteur et la région (1) ?

relation de passage . Conducteur région (0)

. ϵ , région (1)

densité de charges σ : supérieure
 $-\sigma$: inférieure

$$\left(\begin{array}{l} -\sigma \\ +\sigma \end{array} \right)$$



$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_0) \cdot \vec{n}_{0,1} = \sigma$$

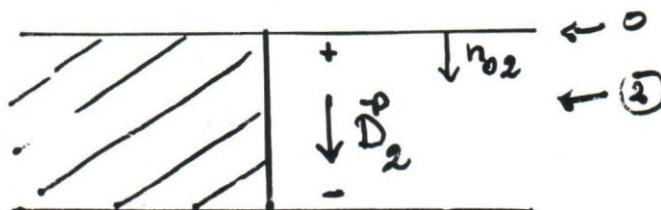
$\vec{D}_0 = \vec{0}$ car conducteur

$$\Rightarrow \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{0,1} = \sigma \quad \vec{D}_1 \text{ et } \vec{n}_{0,1} \text{ m\^e sens} \Rightarrow \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{0,1} = D_1$$

$D_1 = \sigma$
$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon}$

$$\text{or } \vec{D}_1 = \epsilon \vec{E}_1 \Rightarrow$$


relation de passage (0) et (2) (ϵ_0) ?



$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{1,2} = \sigma$$

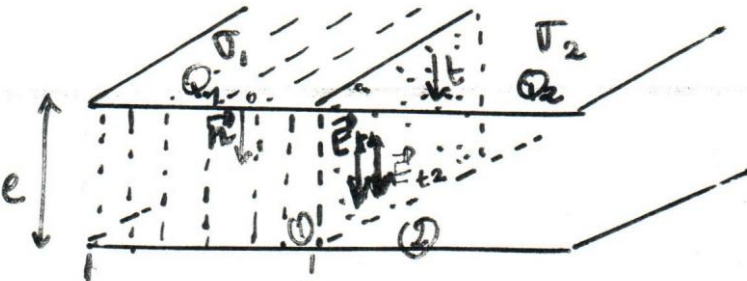
$$\vec{D}_1 = \vec{0} \quad (5)$$

On n'a pas la même densité de charges sur ① et ②


 $\Rightarrow V_1$ pour ① et V_2 pour ② Q_1, Q_2

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = \sigma_1 \\ E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon} \end{array} \right\} \text{ et } \left. \begin{array}{l} D_2 = \sigma_2 \\ E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2. \quad \leftarrow \text{eq 1}$$

b) Relation de passage entre Composante tangentielle de \vec{E} entre ① \rightarrow ②



$$\begin{array}{l} \text{①} \rightarrow \text{②} \\ E_{t1} = E_{t2} \\ \Downarrow \\ \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \quad (\text{eq 2}) \end{array}$$

2) Expression de C du condensateur? à partir de 1!

$Q = C V$ charge totale $C = \frac{Q}{V} ?$

$Q = Q_1 + Q_2$ conservation de la charge

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V \\ Q_2 = C_2 V \end{cases} \Rightarrow C = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = C_1 + C_2$$

$$V = \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 = E_1 \cdot e \quad \text{et} \quad E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon} \quad (\text{eq 2}) \quad \text{et} \quad Q_1 = \sigma_1 S_1$$

$$\hookrightarrow C_1 = \frac{Q_1}{V} = \frac{\sigma_1 S_1}{E_1 \cdot e} = \frac{\sigma_1 S_1}{\sigma_1 e} \cdot \epsilon = \frac{\epsilon S_1}{e} \Rightarrow C_1 = \frac{\epsilon S_1}{e}$$

$Q_1 \rightarrow S_1 \rightarrow \sigma_1$
 $Q_2 \rightarrow S_2 \rightarrow \sigma_2$

de même $\dots \Rightarrow C_2 = \frac{\epsilon_0 S_2}{e}$

$$\Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon S_1}{e} + \frac{\epsilon_0 S_2}{e}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon x b}{e} + \frac{\epsilon_0 (l-x) \cdot b}{e}} \quad \text{eq 3}$$

$S_1 = x \times b$
 $S_2 = (l-x) \times b$

3°/ Force qui agit sur le Diélectrique? $\vec{F} = \vec{F}(x)$

$$\vec{F} \begin{vmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F = + \frac{\partial W}{\partial x} / u = dx$$

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{\epsilon b}{e} - \frac{\epsilon_0 b}{e} \right)$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{b}{e} V^2 (\epsilon - \epsilon_0)$$

~~ϵ_e, ϵ_r~~ $\rightarrow \epsilon$ donnée

Rq: Essayer de n'utiliser que les données de l'énoncé

4) a) Condensateur rempli de diélectrique $\Rightarrow x = l$

$$(eq 3) \Rightarrow C' = \frac{l \times b}{e} \cdot \epsilon \quad (eq 3')$$

b). Energie de Polarisation? W_P

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \cdot \vec{E}$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\epsilon_0} \epsilon_0 E^2 d\tau + \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\epsilon} \vec{P} \cdot \vec{E} d\tau}_{W_P}$$

$$W_P = \frac{1}{2} \int_{\epsilon} \vec{P} \cdot \vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{2} \int (\epsilon - \epsilon_0) E^2 d\tau$$

$$\left(E = \frac{V}{e} \Rightarrow \frac{E^2}{e^2} = \frac{V^2}{e^2} = \frac{d\tau}{e} \right) \Rightarrow \begin{cases} W_P = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{V^2}{e^2} \cdot S \cdot e \\ W_P = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{V^2}{e} \cdot b \times h \end{cases}$$

Energie de déplacement $W_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

$$F = \frac{1}{2} \frac{b^2 V^2}{e} (\epsilon - \epsilon_0)$$

$$W_F = \int \frac{1}{2} \frac{b^2 V^2}{e} (\epsilon - \epsilon_0) \cdot d\ell = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{V^2}{e} \cdot b \times h = W_F$$

Conclusion $\Rightarrow \boxed{W_P = W_F}$

(7)

Electromagnétisme des MILIEUX

TD3 2

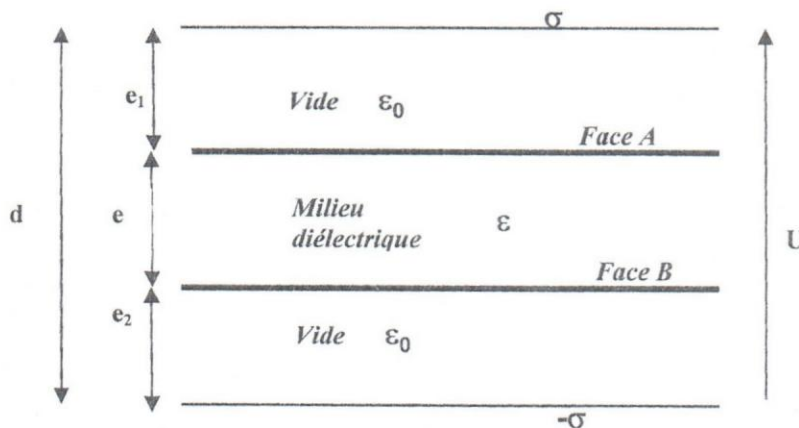
responsable : Mr Zoheir

Problème 1

Un condensateur est formé par deux armatures planes métalliques en regard portées à une différence de potentiel U . On note S la surface des armatures et leurs armatures sont très grandes devant leur écartement d .

Une lame diélectrique LHI de permittivité ϵ et d'épaisseur e de face supérieure **A** et inférieure **B**, est introduite entre les armatures de ce condensateur, le reste est vide d'épaisseur e_1 et e_2 (Voir Figure ci-dessous).

Les deux armatures portent les charges (libres) surfaciques σ et $-\sigma$



- 1) Déterminez les expressions des vecteurs diélectriques dans le vide \vec{D}_0 et dans la lame diélectrique noté \vec{D} tout en justifiant leurs sens
- 2) Déterminez les expressions des champs électrostatiques \vec{E}_0 et \vec{E} respectivement dans le vide et le diélectrique
- 3) Déterminez la valeur du vecteur polarisation \vec{P} dans le milieu. Donnez sa valeur dans le vide
- 4) Calculez les densités de charges de polarisations surfaciques σ_{pA} sur la face **A** et σ_{pB} sur la face **B**, et la densité de charge volumique ρ_p .
- 5) En déduire le champ de polarisation \vec{E}_p en justifiant son sens
- 6) Exprimez σ en fonction de σ_p
- 7) Déterminez l'expression de la capacité C du condensateur en fonction de S , d , e , ϵ_r et ϵ_0
- 8) On remplace la lame diélectrique par une lame conductrice en cuivre de même épaisseur. Calculez la nouvelle capacité C_0 en fonction de S , d , e et ϵ_0
- 9) Comparez C et C_0 . Conclusion

Problème 2

Un aimant permanent cylindrique de rayon R est uniformément aimanté suivant son axe \vec{Oz} . On note $\vec{M} = M\vec{e}_z$ son aimantation (figure 1)

On note α_1 et α_2 les demi angles sous lesquelles on voit, à partir d'un point P de l'axe les deux surfaces de base Sb_1 et Sb_2 . (figure 2)

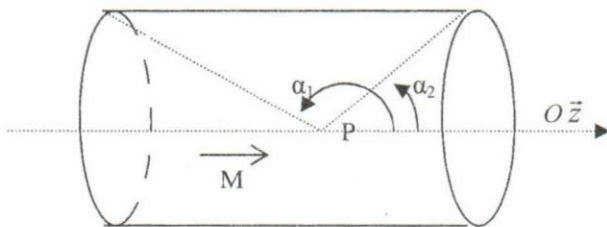


Figure 2

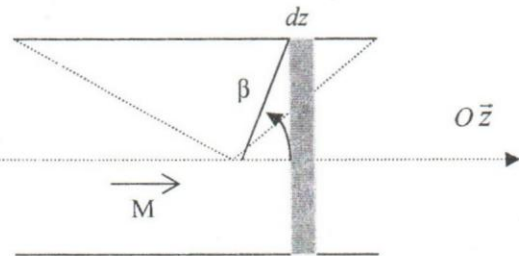


Figure 3

- 1) Calculer les différents courants d'aimantation.
- 2) On suppose connue l'expression du champ magnétique créé par une spire de rayon R parcourue par un courant i en son axe ($\vec{b} = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \beta \cdot \vec{u}_z$).
- a) En considère que la couronne d'épaisseur dz , de rayon R , vue sous l'angle β (fig.3) est parcourue par un courant élémentaire dI_m d'aimantation. Donner l'expression de dI_m
- b) En déduire l'expression du champ d'aimantation élémentaire créé par ce courant élémentaire au point P .
- c) En déduire l'expression du champ d'aimantation totale au point P en fonction de \vec{M} , α_1 , α_2 et μ_0
- 3) Trouver l'expression du champ $\vec{B}(P=O)$ et calculer sa valeur au centre du cylindre :

Application numérique : $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$ $M=10^6$ A/m.

problème 3

- 1) Compléter les équations de Maxwell dans le cas d'un milieu aimanté et diélectrique

$$\text{Div } \vec{D} = \dots \quad \text{rot } \vec{E} = \dots \quad \text{Div } \vec{B} = \dots \quad \text{rot } \vec{H} = \dots$$

- 2) a) Réécrire ces équations dans le cas d'un milieu LHI diélectrique (ϵ) et non aimanté (μ_0)
- b) Exprimer, dans ce milieu (ϵ, μ_0), les champs \vec{D} et \vec{H} en fonction de \vec{E} et \vec{B}
- c) Etablir, dans ce milieu (ϵ, μ_0), l'équation d'Alembert pour \vec{B} (en fonction de $\Delta \vec{B} \dots$)

1°) $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $(\perp \perp i) \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0$

sens de \vec{E} $\rightarrow +\sigma \rightarrow -\sigma$. on neglige les effets de
Bords car $e \ll S$.

donc sens de \vec{D} et \vec{D}_0 de $+\sigma$ vers $-\sigma$

on écrit la relation de passage entre la lame
conductrice et le vide $\vec{n} \downarrow$ vide $\vec{D}_{\text{lame (cond)}} = \vec{0}$ car conducteur
la relation de passage.

$(\vec{D}_0 - \vec{D}_{\text{lame (cond)}}) \cdot \vec{n} = +\sigma$ $\Rightarrow \vec{D}_0 \cdot \vec{n} = \sigma$
 \vec{n} : de lame \rightarrow vide $\Rightarrow D_0 = \sigma$ dans le vide

dans le diélectrique: on écrit la relation de passage du
vide vers le diélectrique $(\vec{D}_0 - \vec{D}) \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{D}_0 \cdot \vec{n} = \vec{D} \cdot \vec{n} \Rightarrow D_0 = D = \sigma$

2°) $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$ $\Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{\vec{D}_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$
 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{n}$ $(R_g: \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{1}{\epsilon_0} \vec{n}$
 $\vec{E} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{n})$

3°) dans le milieu $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\Rightarrow \vec{P} = \epsilon \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (avec $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{n}$ et $\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$) $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$ ou
 $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{n}$ ou
Dans le vide $\vec{P} = \vec{0}$ $\vec{P} = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \sigma \vec{n}$ ou
pas de Polarisation | Rg: sens de \vec{P} celui de \vec{n} car $\epsilon - \epsilon_0 > 0$
 $\epsilon - (\epsilon_r - 1) > 0$ $\epsilon_r > 1$

4) * densité surfacique: en général $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}_s$

\vec{n}_s : normale à la surface (sortante)

, Pour la Face A.

$$\vec{n}_s = -\vec{n} \Rightarrow \text{(avec } \vec{P} = +P\vec{n})$$

$\vec{n} \downarrow \vec{P} \downarrow$

$$\Rightarrow \sigma_{PA} = \vec{P} \cdot (-\vec{n}) = -P$$

Pour la Face B $\Rightarrow \vec{n}_s = +\vec{n}$

$$\Rightarrow \sigma_{PB} = \vec{P} \cdot (+\vec{n}) = +P$$

* densité volumique: $\vec{P} = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \sigma \vec{n} \Rightarrow P = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \sigma$

$P = \text{constante}$
 \vec{P} uniforme.

$$\Rightarrow \text{comme } \rho_p = -\text{div } \vec{P} \Rightarrow \rho_p = 0,$$

5)

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_p$$

\vec{E}_{ext} champ extérieur ici champ dû par le vide $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0$

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_p \Rightarrow \vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_0$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{n} \quad \vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \Rightarrow \vec{E}_p = \sigma \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \vec{n}$$

$$\text{ou bien } \vec{E}_p = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \right) \vec{n}$$

$$\text{ou bien encore, } \vec{E}_p = \vec{E}_0 \left(\frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \right)$$

Comme $\epsilon_r < 1 \Rightarrow 1 - \epsilon_r < 0 \Rightarrow$ sens de \vec{E}_p OPPOSE à \vec{n} (et \vec{E}_0)

$$\text{on sait que } \sigma_{PA} = -P \quad \sigma_{PB} = +P \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{n} \text{ et } \vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

$$\text{et } \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{n} \Rightarrow P = \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \sigma = \sigma_{PB} \Rightarrow \sigma = \frac{\epsilon}{(\epsilon - \epsilon_0)} \sigma_{PB}$$

$$\text{ou encore } \left\{ \begin{aligned} \sigma &= \frac{\epsilon_r}{(\epsilon_r - 1)} \sigma_{PB} = - \frac{\epsilon_r}{(\epsilon_r - 1)} \sigma_{PA} \\ \sigma &= - \frac{\epsilon}{(\epsilon - \epsilon_0)} \sigma_{PA} \end{aligned} \right.$$

(2)

70/

$$C = \frac{Q}{V} \quad (\text{eq 1})$$

$$Q = \sigma \cdot S$$

et

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{e_1} \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell}_0 + \int_{e_1}^{e_1+e_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_{e_1+e_2}^{e_1+e_2+e} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$V = E_0 \cdot e_1 + E \cdot e + E_0 \cdot e_2$$

$$V = E_0 (e_1 + e_2) + E \cdot e \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{e_1 + e_2}{\epsilon_0} + \frac{e}{\epsilon} \right)$$

on remplace ds l'eq (1) $\Rightarrow C = \frac{\sigma \cdot S}{\sigma \left(\frac{e_1 + e_2}{\epsilon_0} + \frac{e}{\epsilon} \right)} = \frac{S}{\frac{e_1 + e_2}{\epsilon_0} + \frac{e}{\epsilon}}$

(1pt)

$$C = \frac{S}{\frac{d-e}{\epsilon_0} + \frac{e}{\epsilon}}$$

car $e_1 + e_2 = d - e$.

on insère la lame par une lame conductrice.

ds la lame le champ est nul $\Rightarrow \sigma = \frac{Q}{V'} \quad V' = E_0 \cdot e_1 + E_0 \cdot e_2$

(1pt)

$$C_0 = \frac{Q}{V'} = \frac{\sigma S}{\sigma (e_1 + e_2)} = \frac{S}{\frac{e_1 + e_2}{\epsilon_0}}$$

90/ $C_0 = \frac{S}{\frac{e_1 + e_2}{\epsilon_0}}$ et $C = \frac{S}{\frac{e_1 + e_2}{\epsilon_0} + \frac{e}{\epsilon}}$ comme $\frac{e}{\epsilon} > 0$
 \Rightarrow

(0,5)

on a tj' $C_0 > C$

Conclusion: l'introduction du diélectrique diminue la Capacité du condensateur série.

19 Courants d'Aimantation: volumiques $\vec{J}^* = \nabla \times \vec{M}$
 surfaciques: $\vec{J}_s = \vec{M} \wedge \vec{n}$

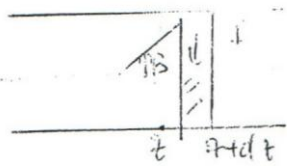
) $\vec{J}^ = \vec{0}$ car \vec{M} est uniforme.

*) $\vec{J}_s = \vec{M} \wedge \vec{n}$ \vec{n}_{SB1} ou \vec{n}_{SB2} ou $\vec{n}_{statique}$

x $\vec{M} \wedge \vec{n}_{SB1} = \vec{M} \wedge \vec{n}_{SB2} = \vec{e}$ car colinéaires.

x $\vec{M} \wedge \vec{n}_{statique} = \vec{M} \wedge \vec{e}_r = M(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) = M\vec{e}_\theta$
 car colinéaires radiales.

20



x champ créé par une spirale sur la moitié de son axe $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$

x champ créé par une couronne d'épaisseur dz et parcourue par un courant élémentaire $dI' \Rightarrow$

$dB = \frac{\mu_0}{2R} dI' \sin^3 \beta$ avec dI' courant d'aimantation

$dI' = \vec{J}_s^* dz$ \vec{J}_s^* densité de courant surfacique d'Aimantation

on suppose

$$\vec{J}_s^* = \frac{M}{2R} \vec{e}_\theta$$

$$\tan \beta = \frac{R}{z} \Rightarrow$$

$$dz = R \frac{d\beta}{\sin^2 \beta} \Rightarrow$$

$$dB = -\frac{\mu_0 M R}{2R} \frac{d\beta \sin^3 \beta}{\sin^2 \beta}$$

$$\Rightarrow dB(P) = -\frac{\mu_0 M}{2} \sin \beta d\beta \Rightarrow B(P) = -\frac{\mu_0 M}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \beta d\beta$$

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{e}_z$$

$$3) B(r=0) \Rightarrow \cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2 \Rightarrow \vec{B}(0) = \mu_0 M \cos \alpha_2$$

A.Numerique: $\alpha_2 = \pi/3$ $M = 10^6 \text{ A/m}$ $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$

$$B(0) = 4\pi 10^{-7} 10^6 \cos(\pi/3) = 2\pi 10^{-1} = 0,628 \text{ Tesla}$$

$$\boxed{B(0) = 0,628 \text{ Tesla}}$$

Question de cours. (6pt/20)

① 1pt + 0.5pt → ① $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ ② $\text{div } \vec{B} = 0$
③ 1pt + 0.5pt → ③ $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ④ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ($\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$)

2pt → ① $\oint_r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{(v)} \frac{\rho}{\epsilon_0} dv = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

② 1pt → ② $\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

③ 1pt → ③ $\oint_r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{(s)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \phi_B$

④ 1pt → ④ $\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left[\int_s \vec{j} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \int_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \right] = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}}$

3pt → ① $\rho = 0$ $\vec{j} = 0$ $\text{div } \vec{E} = 0$ $\text{div } \vec{B} = 0$
② 1pt → $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

b) $\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \dots$
$$= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}$$
$$= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$
$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

③ 2pt →
$$= \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B}$$
$$= -\Delta \vec{B}$$

$$\Rightarrow -\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

MILIEUX MAGNETIQUES

TD série 3

responsable Mr Zoheir

Problème 1 : Examen 2014. Faire la différence de notation de \vec{m} (minuscule) et \vec{M} (majuscule)

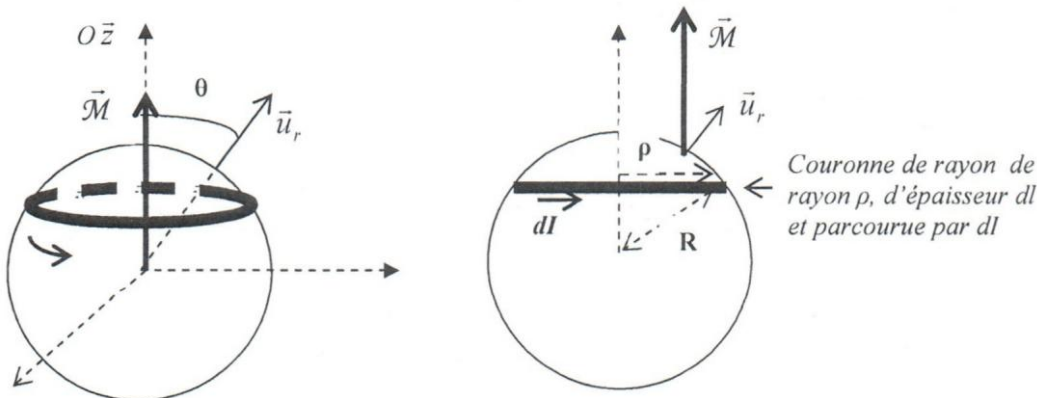
Une petite sphère homogène en acier, de centre O, de rayon R est placée dans le vide. Cette sphère possède un moment magnétique \vec{m} **constant** et est caractérisée par le vecteur aimantation $\vec{M} = M\vec{e}_z$.

On repérera la position d'un point P de l'espace par $r=OP$ et $\theta = (\vec{M}, \vec{r})$. On donne $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$

1) A L'extérieure de la sphère

En utilisant directement les formules usuelles du potentiel \vec{A} et le champ \vec{B} d'un dipôle magnétique déterminer, en tout point extérieur éloigné de la sphère en fonction de \vec{M} , le potentiel vecteur \vec{A} , puis les composantes de B_r et B_θ tel que $\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta$

- 2) A l'intérieure de la sphère : On admettra que ce milieu aimanté produit le même champ que si la sphère était creuse et parcourue par un courant de densité surfacique $\vec{j}_s = \vec{M} \wedge \vec{u}_r$ en chaque point P, où \vec{u}_r désigne le vecteur unitaire radial. Le champ \vec{B} est **supposé uniforme**. On donne le champ créé par une spire de rayon ρ parcourue par un courant dI en son axe $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\rho} dI \sin^3 \theta \vec{u}_z$, le courant dI est celui parcourue par la couronne d'épaisseur dl



Sphère Aimantée

- Exprimer dI en fonction de \vec{j}_s et R et $d\theta$
 - Déterminer en fonction de \vec{M} , le champ \vec{B}_0 au centre de la sphère qui est aussi le champ en tout point à l'intérieur de la sphère.
 - Exprimer ce champ $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}_0$ dans le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ où $\vec{u}_z = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$
- 3) Vérifier la continuité des composantes normales et la discontinuité des composantes tangentielles à partir des relations de passage du milieu 1 interne vers le milieu 2 externes. On donne $\vec{B}_{\text{ext}} - \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$

Problème 2

Un fil rectiligne, très long, conducteur, de rayon a et de susceptibilité magnétique χ_m , est parcouru par un courant volumique uniforme d'intensité totale I .

1. a) Donner l'expression de la densité volumique de courant \vec{J} à une distance $r=OP>a$ l'extérieur
- b) établir les expressions des champs \vec{H} et \vec{B} à une distance $r=OP>a$ à l'extérieur du fil. On utilisera pour cela le théorème d'Ampère sur un contour circulaire de rayon r .
2. a) Donner l'expression de la densité du courant \vec{J} à une distance $r=OP<a$ l'intérieur du fil.
- b) En déduire l'expression des champs \vec{H} et \vec{B} à l'intérieur du fil.
- c) Donner l'expression de l'aimantation \vec{M}
3. En déduire les expressions de densités d'aimantations volumique \vec{J}^* et surfacique \vec{J}_s^* .

Problème 3 :

1) a) Soient deux milieux aimantés notés 1 et 2. On note \vec{j}_{sc} , \vec{j}_{sm1} et \vec{j}_{sm2} les densités surfaciques respectives de conduction et d'aimantation dans ces deux milieux, \vec{n}_{12} le vecteur unitaire à la surface allant de 1 vers 2. Ecrire les relation de passage des composantes tangentielles des excitations \vec{H}_1 et \vec{H}_2 entre les milieux 1 et 2.

b) Réécrire la même relation pour les composantes tangentielles des champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2

2) Un très long barreau cylindrique d'axe Oz de rayon R possède une aimantation:

$$\vec{M} = kr^2 \vec{e}_\theta \quad \text{où } r \text{ la distance du point à l'axe et } k \text{ étant une constante}$$

- a) Déterminer les densités de courant surfaciques \vec{j}_{sa} et volumiques d'aimantation \vec{j}_{sv}
- b) Etablir le champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace
- c) Vérifier la relation de passage à travers la surface en fonction de \vec{B}_1 et \vec{B}_2
- d) Déterminer les champs d'excitation en tout point de l'espace.

Problème 4

1/ Sachant que les susceptibilités magnétiques χ_m et χ_m^* peuvent être respectivement définies

$$\text{selon : } \vec{M} = \chi_m \vec{H} \text{ (eq.1) et } \vec{M} = \chi_m^* \frac{\vec{B}}{\mu_0} \text{ (eq.2)}$$

L'équation 1 est celle vue en cours. Nous adoptons ici l'équation 2.

Etablir la relation donnant χ_m^* (eq. 2) en fonction, **uniquement**, de la perméabilité relative μ_r .

2/ L'espace délimité par un solénoïde torique, à section carrée, est rempli d'un milieu magnétique de susceptibilité magnétique χ_m^* et de perméabilité magnétique relative μ_r .

Le rayon moyen du solénoïde est R et le côté de la section carrée a .

2.a) Trouver l'expression du champ \vec{H} en fonction de la distance r à l'axe du tore lorsque les N spires du solénoïde sont parcourues par un courant d'intensité I .

2.b) Donner l'expression de \vec{B} .

2.c) En déduire l'expression de \vec{M}

2.d) Calculer l'énergie magnétique ε_m stockée par un tel solénoïde.

2.e) Montrer que l'expression trouvée de l'énergie se met sous la forme : $\varepsilon_m = \frac{1}{2} \mu_r L_0 I^2$

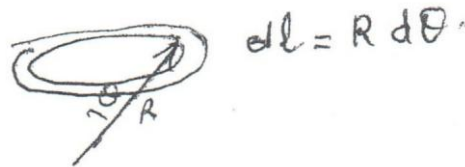
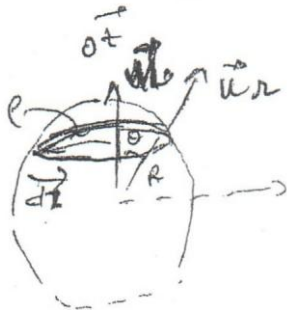
2.f) Que représente la quantité L_0 ? Donner son expression

Problème: I

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}$$

$$\vec{M} = M \vec{e}_z \quad \text{vecteur d'Aimantation}$$

$$= \cos \theta \quad \vec{r} = \vec{OP} \quad \theta = (\vec{M}, \vec{r})$$



I) Extérieure: $r \gg R$ éloigné \rightarrow sphère \equiv dipôle magnétique

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M} \quad \text{on remplace}$$

(1pt) ou \rightarrow

$$\vec{A} = \frac{1}{3} \mu_0 \frac{R^3}{r^3} (\vec{M} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{A} = \frac{1}{3} \mu_0 M \frac{R^3}{r^2} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

(1pt)

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_m \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

$$\vec{B}_{\text{ext}} = - \mu_0 \text{grad}_m \left(\frac{R^3}{3} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$


Les composantes.

(0,5) \rightarrow $B_r = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{M \cos \theta}{r^2} \right)$ soit $B_r = \frac{2}{3} \mu_0 M \left(\frac{R}{r} \right)^3 \cos \theta$

(0,5) \rightarrow $B_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{M \cos \theta}{r^2} \right)$ soit $B_\theta = \frac{1}{3} \mu_0 M \left(\frac{R}{r} \right)^3 \sin \theta$

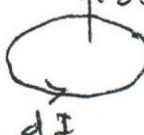
2^e Inhérence:

a) $dl = R \cdot d\theta$



$dI = \int_S dl = \int_S R \cdot d\theta$

b) $\vec{B}_{int} = \vec{B}_0(r=0)$ car uniforme.



$d\vec{B}_0 = dB_0 \vec{e}_3$ (soit symétrie sphérique soit règle du tire-bouchon) (donnée)

$dB_0 = \mu_0 \frac{dI}{2\ell} \sin^3 \theta$

$dI = \int_S R d\theta$ $\vec{j}_s = \vec{M} \wedge \vec{u}_r \Rightarrow j_s = M \sin \theta$

"spires de rayon" $\rightarrow \rho = R \sin \theta$ d'épaisseur $dl = R d\theta$ parcourus par dI

$dI = j_s dl = M R \sin \theta d\theta$

$\Rightarrow dB_0 = \mu_0 \frac{dI}{2\ell} \sin^3 \theta = \frac{1}{2} \mu_0 M \sin^3 \theta \cdot d\theta$

$\rightarrow B_0 = \int dB_0 \sin \theta \quad \vec{B}_0 = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} = \frac{2}{3} \mu_0 M \vec{e}_z$

c) $\vec{B}_0 = \frac{2}{3} \mu_0 M \vec{e}_z = \frac{2}{3} \mu_0 M (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$

$\rightarrow \vec{B}_{int} \rightarrow \begin{cases} B_{int r} = \frac{2}{3} \mu_0 M \cos \theta \rightarrow \text{composante normale à la surface} \\ B_{int \theta} = -\frac{2}{3} \mu_0 M \sin \theta \rightarrow \text{tangentielle à la surface} \end{cases}$

3^e $\vec{B}_{ext} : \begin{cases} B_{ext r} = \frac{2}{3} \mu_0 M \frac{R^3}{r^3} \cos \theta \rightarrow \text{composante normale} \\ B_{ext \theta} = \frac{1}{3} \mu_0 M \frac{R^3}{r^3} \sin \theta \rightarrow \text{composante tangentielle} \end{cases}$ (à la surface $r=R$).

à la surface $r=R$ $\vec{n} = \vec{e}_r \Rightarrow B_{int r} = B_{ext r}$ Continuité de la composante normale

$\rightarrow (\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int}) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ (ou $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{j}_s$) normale

replaces $\Rightarrow (B_{ext \theta} - B_{int \theta}) \vec{e}_\theta = \mu_0 j_s \vec{e}_\theta = \mu_0 M \cos \theta \rightarrow \text{vrai} \Rightarrow \text{discontinuité de la composante tangentielle}$

②

Problème 2

Correction

fil très long; conducteur, rayon a , χ_m ; I volumique uniforme.

10/ a) \vec{J} pour $r > a$ à l'extérieur?

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \vec{J} = J \vec{e}_z \text{ et } d\vec{S} = dS \vec{e}_z \Rightarrow$$

$$I = \iint J dS = J \times \pi a^2 \text{ courant total} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z}$$

b) \vec{H} , \vec{B} à partir du th d'Ampère \Rightarrow

$$\int_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum i$$

\rightarrow fil \propto lg \Rightarrow symétrie par translation $z \Rightarrow \cancel{z}$

\rightarrow cylindre \Rightarrow par rotation de $\theta \rightarrow \cancel{\theta}$

$$\vec{H}(r, \theta, z) = \vec{H}(r)$$

\rightarrow Plan (\vec{r}, \vec{z}) de symétrie $\Rightarrow \vec{H} \perp (\vec{r}, \vec{z}) \Rightarrow \vec{H} = H \vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow \vec{H}(r, \theta, z) = H(r) \vec{e}_\theta$$

on prend comme contour γ : Cercle $(0, r) \Rightarrow$

sur γ : r fixe $\Rightarrow \vec{H}(r)$ est uniforme

$$d\vec{\ell} = d\ell \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \cdot d\ell \Rightarrow$$

$$\int \vec{H} d\vec{\ell} = H \int d\ell = H \times 2\pi r = \sum i ?$$

Courant intérieur à $\gamma \Rightarrow$ Courant Total $\sum i = I = J\pi a^2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{car on est à l'extérieur} \quad \mu = \mu_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta}$$

2°) a) $r < 0 \leq a$

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z \quad \text{uniforme car } I \text{ uniforme.}$$

b) m raisonnement

$$r: C(0, r < a)$$

$$\vec{H}(r) = H(r) \vec{e}_\theta$$

$$\int_r \vec{H} d\vec{\ell} = \sum_{\text{intérieurs à } r} i =$$



$$\sum i = I'$$

$$H \times 2\pi r = I' = \iint \vec{J} d\vec{S}' = \frac{I}{\pi a^2} \times (\pi r^2) = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2$$

$$H \times 2\pi r = I \frac{r^2}{a^2}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$$

c) $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\vec{M} = \frac{\chi_m I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$$

3°)

$$\vec{J}^* = \text{rot } \vec{M}$$

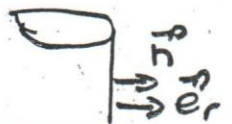
$$\vec{J}^* = \frac{\chi_m I}{2\pi a^2} \vec{e}_z$$

avec $\vec{M}(r) \vec{e}_\theta$

$$M(r) \vec{e}_\theta$$

sur face $\vec{J}_\theta^* = \vec{M} \wedge \vec{n}$

$$\vec{n} = \vec{e}_r$$



(4)

$$\vec{J}_z^* = M (\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r) = -M \vec{e}_z = -\frac{\chi_m I}{2\pi a^2} \vec{e}_z$$

B3]

$$1^o a) \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{sc} \\ \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{sc} \wedge \vec{n}_{12} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$b) \vec{n}_{12} \wedge \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}_2 - \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} + \vec{M}_1 \right) = \vec{J}_{sc}$$

$$\vec{J}_M = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{J}_{sc} + \mu_0 \vec{n}_{12} \wedge \vec{M}_2 - \mu_0 \vec{n}_{12} \wedge \vec{M}_1$$

$$\text{ou} \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{12} \wedge \vec{M}_2 = -\vec{M}_2 \wedge \vec{n}_{12} = \vec{M}_2 \wedge \vec{n}_{21} = \vec{J}_{s1} \\ -\vec{n}_{12} \wedge \vec{M}_1 = \vec{M}_1 \wedge \vec{n}_{12} = \vec{J}_{s2} \end{array} \right.$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{J}_s + \vec{J}_{s1} + \vec{J}_{s2}$$

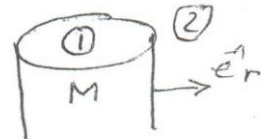
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 (\vec{J}_s + \vec{J}_{s1} + \vec{J}_{s2}) \\ \text{ou bien} \left\{ \begin{array}{l} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 (\vec{J}_s + \vec{J}_{s1} + \vec{J}_{s2}) \wedge \vec{n}_{12} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$2^o \vec{M} = k r^2 \vec{u}_\theta$$

\vec{J}_{sa} : surfacique?

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. cylindriques

\vec{J}_{va} : volumique?



$$\vec{J} = \vec{M} \wedge \vec{n} \quad \vec{n} = \vec{e}_r$$

$$\vec{J}_{sc} = k r^2 \vec{u}_\theta \wedge \vec{e}_r = -k r^2 \vec{u}_z$$

NB: le cylindre $\infty \Rightarrow$ pas de flux à travers les 2 surfaces de bases.

$$\vec{J}_{va} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r \vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & k r^3 & 0 \end{vmatrix} = 3 k r \vec{u}_z$$

(5)

b) On utilise le théorème d'Ampère. $\int_r \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{int} i$

seus:
 • or ici on a symétrie cylindrique. le plan (\vec{r}, \vec{z}) est un plan de symétrie \perp au courant $\Rightarrow \vec{B} \perp (\vec{r}, \vec{z})$
 $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$

invariances? : cylindre très long \Rightarrow invariance $\perp z$

cylindre \Rightarrow symétrie $\perp \vec{z}$

Donc le champ B ne dépend que de $r \Rightarrow B(M) = B(r)$

en conclusion: $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$

$\int_r \vec{B} d\vec{\ell}$: Γ ? cercle de centre $(0, r) \Rightarrow$ sur Γ \vec{B} est unif.

$$\int_r \vec{B} d\vec{\ell} = \int_r B d\ell = B \int_0^{2\pi} r d\theta = B \times 2\pi r$$

on a 2 cas: $r < R$ $B \times 2\pi r = \mu_0 \int_V \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_0^r 2\pi k r' \times r' dr' = \mu_0 k \pi r^2$
 $B \times 2\pi r = \mu_0 k \pi r^2 \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 k r \vec{u}_\theta$

$r > R$ $B \times 2\pi r = \mu_0 \int_V \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\ell}$
 $B \times 2\pi r = \mu_0 (2k\pi R^3 - kR^2 \times 2\pi R) = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

1c) Relation de passage:

$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_{z=R} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ car pas de courant de conduction $\vec{j}_{sc} = \vec{0}$
 on a donc $(\vec{0} - \mu_0 k R^2 \vec{u}_\theta) = \mu_0 (-k R^2 \vec{u}_\theta) \wedge \vec{u}_r$
 $= -\mu_0 k R^2 \vec{u}_\theta$ relation vérifiée

d) $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$
 $r < R$ $\vec{H} = \frac{\mu_0 k r^2 \vec{u}_\theta}{\mu_0} - k r^2 \vec{u}_\theta = \vec{0}$
 $r > R$ $\vec{M} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H} = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$

(6)

$$29 d). \quad \mathcal{E}_m = \int \frac{B^2}{2\mu} d\tau$$

$$B = \mu \frac{NI}{2\pi r}$$

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

l'intégration sur z donne a et sur $\theta \rightarrow 2\pi$

$$\mathcal{E}_m = \mu \frac{N^2 I^2}{2} \int \frac{1}{4\pi^2} \lambda^2 r dr d\theta dz$$

$$= \mu \frac{N^2 I^2 a}{4\pi} \int_{R-a/2}^{R+a/2} \frac{dr}{r} = \mu \frac{N^2 I^2 a}{4\pi} \ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right)$$

$$\left\{ \mathcal{E}_m = \frac{\mu N^2 I^2 a}{4\pi} \ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right) \right\}$$

$$21 e) \quad \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mu_0 L_0 I^2 \Rightarrow L_0 = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right)$$

f) L_0 : inductance propre du solénoïde en l'absence du milieu matériel.

Pr4

$$\vec{M} = \chi_m^* \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{eq 2})$$

on sait que

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{et } \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\chi_m^* \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} (1 - \chi_m^*) = \frac{\mu \vec{H}}{\mu_0} (1 - \chi_m^*) = \mu_r \vec{H} (1 - \chi_m^*)$$

$$\Rightarrow \mu_r (1 - \chi_m^*) = 1 \quad \Rightarrow \quad \chi_m^* = 1 - \frac{1}{\mu_r} = \frac{1 - \mu_r}{\mu_r}$$

2°) On sait que \vec{H} , \vec{B} et \vec{M} à l'ext sont nuls \Rightarrow
 $(\vec{H}_{\text{ext}} = \vec{0}, \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_{\text{ext}} = \vec{0})$

$$\int_{\Gamma} \vec{H}_{\text{int}} \cdot d\vec{\ell} = NI \quad \text{contour } \Gamma(0; r)$$

\vec{H} ne depend que de r ; $\vec{H}(M) = \vec{H}(r) = H(r) \vec{e}_\theta // d\vec{\ell}$
 H cste sur Γ pour r fixe $\Rightarrow H \times 2\pi r = NI$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\text{int}} = \frac{NI}{2\pi r} \end{array} \right.$$

b)

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ et } \vec{H}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu \vec{H} = \mu \frac{NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

$$c) \quad \vec{M} = \chi_m^* \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \chi_m^* \frac{\mu}{\mu_0} \frac{NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \chi_m^* \mu_r \frac{NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

$$M = (1 - \mu_r) \frac{NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta. \quad \text{m relatives.}$$

(7)