

Chapitre 04

4.2 Variables Aléatoires Continues

4.2.1. Définition

Une variable aléatoire est dite **continue** si elle peut prendre **toutes les valeurs** dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une **mesure** sont de type continu.

Exemples :

Les variables aléatoires,

- le masse corporelle des individus pour une espèce animale donnée,
- taux de glucose dans le sang,
- etc.

sont des **variables aléatoires continues**.

4.2.2 Fonction de Densité de Probabilités

Dans le cas d'une **variable aléatoire continue**, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies **dans un intervalle donné**. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement $\{X = a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a, b]$ tel que $P(a \leq X \leq b)$.

Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par X tend alors vers une fonction que l'on appelle **fonction densité de probabilité** ou **densité de probabilité**.

On appelle **densité de probabilité** toute application continue par morceaux :

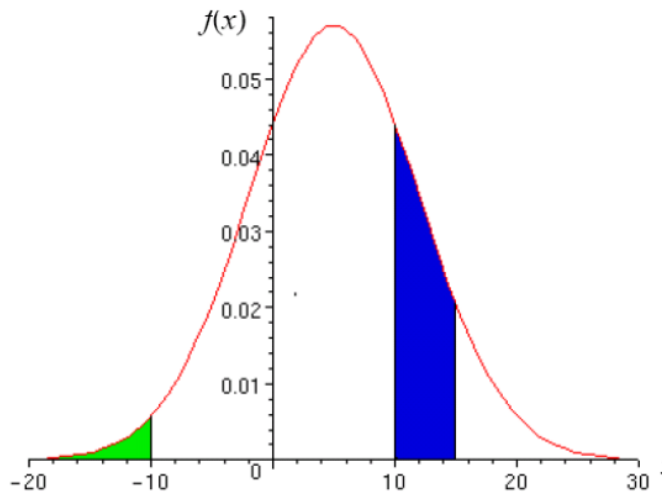
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

telle que :

$$(P_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$$

$$(P_2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{en supposant que } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ existe})$$



Soit une **fonction densité de probabilité** $f(x)$:

(1) l'aire hachurée **en vert** correspond à la probabilité

$$P(X < -10)$$

(2) l'aire hachurée **en bleu** correspond à la probabilité

$$P(+10 < X < +15)$$

Remarque : Cette fonction densité de probabilité est une loi de probabilité car l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de x définies.

Si comme pour les variables aléatoires discrètes, on définit la **fonction de répartition** de X par :

$$\begin{aligned} F_X: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto F_X(t) = P(X < t) \end{aligned}$$

alors la relation entre la **fonction de répartition** F_X et la fonction **densité de probabilité** $f(x)$ est la suivante :

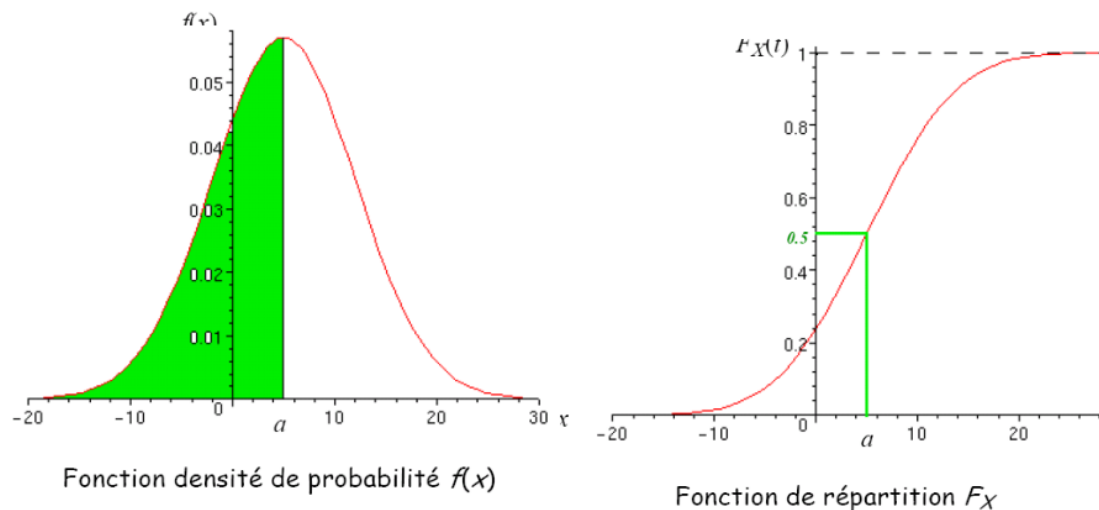
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

Soit X une **variable aléatoire absolument continue** de densité f et de fonction de répartition F_X , alors :

$$(P_1) \quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{avec } a < b$$

$$(P_2) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad P(x = a) = 0 \quad \text{si } f \text{ est continue à droite du point } a.$$

La **fonction de répartition** correspond aux **probabilités cumulées** associées à la variable aléatoire continue sur l'intervalle d'étude (graphe ci-dessous).



L'aire **hachurée en vert** sous la courbe de la fonction densité de probabilité correspond à la probabilité $P(X < a)$ et vaut **0,5** car ceci correspond exactement à la moitié de l'aire totale sous la courbe. Cette probabilité correspond à la valeur de la fonction de répartition au **point d'inflexion de la courbe** (voir cours analyse).

4.2.3. Fonction de Répartition

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire **absolument continue** X alors :

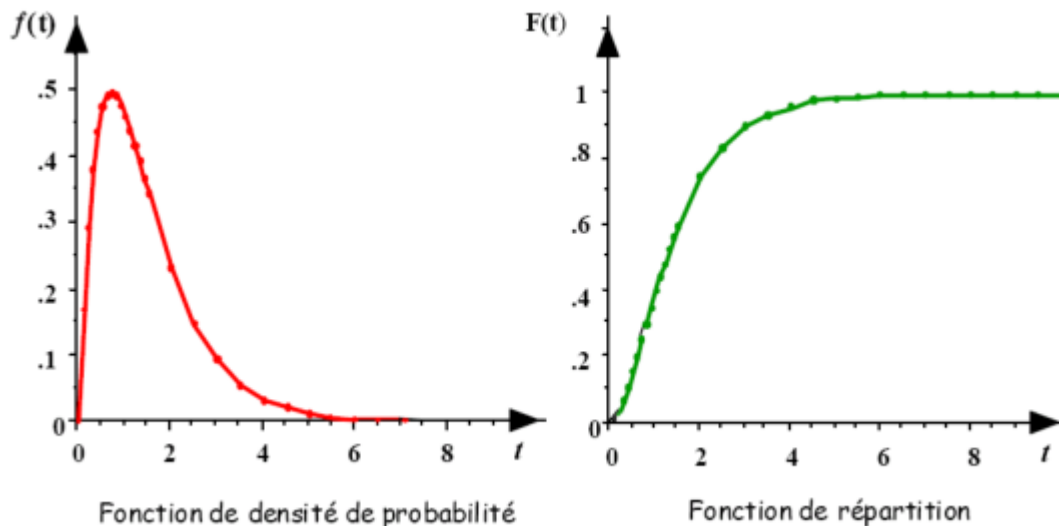
- (P₁) F_X est continue sur \mathbb{R} , dérivable en tout point où f est continue et alors $F_X' = f$
- (P₂) F_X est croissante sur \mathbb{R}
- (P₃) F_X est à valeurs dans $[0,1]$
- (P₄) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

Exemple :

Dans une population de **canards colverts**, lors d'une alerte, l'ensemble des individus quittent leur lieu de repos. Ainsi à $t = 0$, la surface de l'étang est déserte et la probabilité qu'un canard regagne l'étang entre les temps t_1 et t_2 (en minutes) est donnée par :

$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ avec $f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$ qui représente la fonction **densité de probabilité**.

La primitive de $f(t)$, $F_T(t)$, **fonction de répartition** est de la forme :



L'évolution de la recolonisation de l'étang par les *canards colverts* en fonction du temps est donnée par la **courbe rouge**. On observe ainsi que plus de 50 % des canards se posent sur l'étang au cours des 2 premières minutes qui suivent l'alerte. Au bout de 7 minutes, tous les canards ont regagné l'étang. La distribution des probabilités cumulées est donnée sur la **courbe verte**.

4.2.4 Espérance Mathématique d'une variable aléatoire continue :

Si X est une **variable aléatoire absolument continue** de densité f , on appelle **espérance** de X , le réel $E(X)$, défini par :
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$
 si cette intégrale est **convergente**.

Exemple :

Si on reprend l'exemple de la recolonisation de l'étang par les canards colverts, la durée moyenne pour la recolonisation est :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t(2e^{-t} - 2e^{-2t}) dt = 3/2$$

Sous ce modèle, la **durée moyenne de recolonisation** pour l'ensemble de la population de canards colverts est de **1,5 minutes**.

Remarque : Dans cet exemple, la variable étudiée t ne peut prendre que des valeurs dans $[0, +\infty[$

Remarque : Dans le cas continu, $E(X+Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f(x,y) dx dy$. La propriété P_1 est vérifiée quelques soient les relations de dépendance ou d'indépendance statistique entre les deux variables.

4.2.5. Variance Mathématique d'une variable aléatoire continue :

Si X est une variable aléatoire **continue** donnée par sa densité de probabilité alors la variance de X est le nombre réel positif tel que :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2$$