

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN QUANG HUY

ĐỘ NHẠY NGHIỆM CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN QUANG HUY

ĐỘ NHẠY NGHIỆM CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cam đoan.....	ii
Tóm tắt nội dung.....	iii
Lời cảm ơn.....	iv
Danh sách ký hiệu.....	v
Mở đầu.....	1
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.....	3
1.1. Các không gian thường dùng.....	3
1.1.1. Không gian metric.....	3
1.1.2. Không gian tuyến tính định chuẩn.....	6
1.1.3. Không gian Hilbert.....	8
1.1.4. Không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff.....	9
1.1.5. Không gian đối ngẫu.....	10
1.2. Ánh xạ đa trị.....	11
1.2.1. Định nghĩa.....	11
1.2.2. Tính nửa liên tục trên và tính nửa liên tục dưới của ánh xạ đa trị.....	11
1.3. Các bài toán trong lý thuyết tối ưu.....	13
Chương 2. Độ nhảy nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng.	15
2.1. Các khái niệm cơ bản.....	15
2.2. Các kết quả bổ trợ.....	17
2.3. Các tính chất liên tục của nghiệm bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số.....	20
2.4. Các trường hợp đặc biệt.....	30

2.5. Một vài ứng dụng	32
2.6. Kết luận	35
Chương 3. Tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán biên phân phụ thuộc tham số	36
3.1. Tính liên tục Hölder của nghiệm của $P(\theta, \lambda)$	37
3.2. Các kết quả bổ trợ	39
3.3. Chứng minh Định lý 3.1	45
3.4. Kết luận	50
Kết luận chung	52
Tài liệu tham khảo	53

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 05 năm 2015

Học viên

Trần Quang Huy

TÓM TẮT NỘI DUNG

Cũng giống như trong nhiều ngành toán học khác, các vấn đề chủ yếu được nghiên cứu trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân là sự tồn tại nghiệm, tính liên tục của tập nghiệm theo tham số, và các thuật toán tìm nghiệm. Nội dung chính trong luận văn này là bài toán dưới đây.

Xét H là một không gian Hilbert thực, M và Λ là hai tập tham số khác rỗng lấy trong hai không gian định chuẩn nào đó, $f : H \times M \rightarrow H$ là một ánh xạ đơn trị, $K : \Lambda \rightarrow 2^H$ là một ánh xạ đa trị nhận giá trị là các tập lồi đóng, khác rỗng. Xét bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số

$$\begin{cases} \text{Tìm } x \in K(\lambda) \text{ sao cho} \\ \langle f(x, \mu), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K(\lambda), \end{cases} \quad (0.1)$$

trong đó $(\mu, \lambda) \in M \times \Lambda$ là cặp tham số của bài toán và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là ký hiệu tích vô hướng trong H . Với cặp tham số $(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in M \times \Lambda$ cho trước, ta có thể xem (0.1) như là một bài toán nhiều của bất đẳng thức biến phân dưới đây

$$\begin{cases} \text{Tìm } x \in K(\bar{\lambda}) \text{ sao cho} \\ \langle f(x, \bar{\mu}), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K(\bar{\lambda}). \end{cases} \quad (0.2)$$

Giả sử \bar{x} là một nghiệm của (0.2). Chúng ta muốn biết xem liệu (0.1) có thể có nghiệm $x = x(\lambda, \mu)$ ở gần \bar{x} khi (λ, μ) ở gần $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ hay không, và hàm $x(\mu, \lambda)$ có đáng điệu như thế nào? Hay nói một cách khác là ta cần nghiên cứu độ nhạy của nghiệm \bar{x} đối với sự thay đổi của (μ, λ) .

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình, BGH trường THPT Nhân Chính và các bạn trong lớp Cao học K7A trường Đại học Khoa học, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, 2015

Trần Quang Huy

Học viên Cao học Toán K7A,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

DANH SÁCH KÝ HIỆU

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$B(a, r)$	Hình cầu mở tâm a , bán kính r
$\overline{B}(a, r)$	Hình cầu đóng tâm a , bán kính r
\overline{B}_X	Hình cầu đơn vị trong X
A_δ	Tập những điểm cách A không quá δ
$d(A, B)$	Khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A, B
$\ \cdot\ $	Chuẩn
U_{x_0}	Lân cận của x_0
X^*	Không gian đối ngẫu của X
$F : X \rightrightarrows Y$	Ánh xạ đa trị từ X vào Y
$N_K(x)$	Nón pháp tuyến của tập K tại x
$\partial\varphi(x)$	Dưới vi phân của φ tại x
$\text{dom } G$	Miền hữu hiệu của G
$\text{graf } G$	Đồ thị của G

MỞ ĐẦU

Lý thuyết bất đẳng thức biến phân đã ra đời cách đây hơn 50 năm với các công trình quan trọng của G. Stampacchia, P. Hartman, G. Fichera, J. L. Lions và F.E. Brower. Trong suốt thời gian đó, lý thuyết này đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước. Đã có rất nhiều những bài báo, những cuốn sách đề cập bất đẳng thức biến phân và ứng dụng của chúng. Hiện nay, những bài toán phụ thuộc tham số đang được các nhà toán học và các nhà khoa học trong những chuyên ngành khác quan tâm nghiên cứu rất nhiều. Những kết quả đó đã được ứng dụng trong rất nhiều lĩnh vực. Vậy lý thuyết biến phân nghiên cứu vấn đề gì? Sau đây, chúng tôi xin đưa ra một số bài toán của bất đẳng thức biến phân.

Giả sử K là một tập lồi đóng trong một không gian định chuẩn X , và $f : K \rightarrow X^*$ là một ánh xạ đơn trị từ K vào không gian đối ngẫu X^* của X . Bài toán “Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho $\langle f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0$ với mọi $x \in K$ ” được gọi là bất đẳng thức biến phân xác định bởi toán tử f trên tập K .

Nếu $F : K \rightarrow 2^{X^*}$ là một ánh xạ đa trị từ K vào X^* thì bài toán “Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho tồn tại $x^* \in F(\bar{x})$ thỏa mãn $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \geq 0$ với mọi $x \in K$ ” được gọi là *bất đẳng thức biến phân suy rộng* xác định bởi tập K và toán tử F .

Khi toán tử $f(F)$ phụ thuộc tham số μ và tập hạn chế K phụ thuộc tham số λ nào đó thì bài toán trên được gọi là *bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số* (hay tương ứng là bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số). Ở đây, (μ, λ) là cặp tham số của bài toán.

Bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số và bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số, cùng với các ứng dụng khác nhau của chúng là nội dung chính trong luận văn này.

Luận văn bao gồm ba chương:

• Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kết quả quen thuộc của các không gian được dùng trong luận văn này; các khái niệm và một số kết quả của ánh xạ đa trị; nhắc lại bài toán tối ưu.

• Chương 2. Độ nhảy nghiệm của bài toán biến phân suy rộng.

Chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm cơ bản; các kết quả phụ trợ; các tính chất liên tục của nghiệm bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số; các trường hợp đặc biệt và các ứng dụng.

• Chương 3. Tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán biến phân phụ thuộc tham số.

Trong chương này, chúng tôi trình bày các tính chất liên tục Hölder của nghiệm của $P(\theta, \lambda)$; các kết quả bổ trợ sẽ dùng trong chứng minh các định lý chính; cuối cùng là các kết quả về tính liên tục kiểu Lipchitz - Hölder của ánh xạ nghiệm theo tham số.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015

Trần Quang Huy

Học viên Cao học Toán K7A

Chuyên ngành Toán ứng dụng

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Các không gian thường dùng

1.1.1. Không gian metric

1.1.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. Một tập hợp X được gọi là một *không gian metric* nếu: a) Với mỗi cặp phần tử $x, y \in X$ đều có xác định, theo một quy tắc nào đó, một số thực $\rho(x, y)$, gọi là “khoảng cách giữa x và y ”; b) quy tắc trên thỏa mãn các tiên đề dưới đây:

- 1) $\rho(x, y) > 0$ nếu $x \neq y$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (tính phản xạ).
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ với mọi $x, y \in X$ (tính đối xứng).
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ với mọi $x, y, z \in X$ (bất đẳng thức tam giác).

Hàm số $\rho(x, y)$ được gọi là *metric* của không gian, và cặp (X, ρ) được gọi là không gian metric.

Sau đây, chúng ta xét một vài ví dụ về không gian metric.

Ví dụ 1.2. 1) Một tập M bất kỳ của đường thẳng thực \mathbb{R} , với khoảng cách thông thường $\rho(x, y) = |x - y|$ (độ dài đoạn thẳng nối x và y), là một không gian metric.

2) Tổng quát hơn, trong không gian k chiều \mathbb{R}^k , có thể xác định khoảng cách giữa hai điểm $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ và $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$ như sau

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (\xi_i - \eta_i)^2},$$

là một không gian metric.

3) Trong tập các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a, b]$, có thể xác định khoảng cách giữa hai hàm $x(t)$ và $y(t)$ như sau

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|,$$

là một không gian metric. Không gian metric này được ký hiệu là $\mathbb{C}_{[a,b]}$.

4) Trong tập các hàm số trên, nếu ta lấy khoảng cách như sau

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt,$$

thì cũng thu được một không gian metric.

1.1.1.2. Sự hội tụ trong không gian metric

Từ đây trở về sau, ta viết không gian metric ngắn gọn là X thay cho (X, ρ) . Khi nói đến không gian metric X thì ta hiểu rằng trên đó đã xác định một metric ρ nào đó.

Trong không gian metric, nhờ có khái niệm về khoảng cách nên ta có thể định nghĩa khái niệm giới hạn như sau.

Định nghĩa 1.3. Ta nói một dãy điểm x_1, x_2, \dots của một không gian metric X *hội tụ* tới điểm x của không gian đó nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

Ta viết $x_n \rightarrow x$ hoặc $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Điểm x được gọi là *giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

1.1.1.3. Tập mở và tập đóng

Định nghĩa 1.4. (Lân cận).

Một hình cầu tâm a , bán kính $r(0 < r < +\infty)$, trong một không gian metric X , là tập

$$B(a, r) = \{x : \rho(x, a) < r\}.$$

Hình cầu $B(a, r)$ cũng được gọi là một r - lân cận của a . Mọi tập con của X chứa một r - lân cận của nào đó của a được gọi là một *lân cận* của a .

Định nghĩa 1.5. (Điểm trong).

Ta nói x là một điểm trong của tập A nếu tồn tại một lân cận của x nằm hoàn toàn trong A .

Định nghĩa 1.6. (Tập mở).

Một tập được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm thuộc nó đều là điểm trong.

Định nghĩa 1.7. (Tập đóng).

Một tập là đóng nếu mọi phần tử không thuộc nó đều là điểm trong của phần bù của nó.

Định nghĩa 1.8. (Bao đóng).

Giả sử A là một tập con của X . Giao của tất cả các tập hợp đóng chứa A được gọi là *bao đóng* của tập hợp A , ký hiệu là \overline{A} .

Từ các khái niệm trên, với $a \in X$, $r > 0$, ta có các tập hợp sau đây:

- $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ gọi là hình cầu mở tâm a , bán kính r .
- $\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$ gọi là hình cầu đóng tâm a , bán kính r .
- Hình cầu đơn vị trong X ký hiệu là \overline{B}_X .

1.1.1.4. Không gian metric đủ

Trong không gian metric X , ta có khái niệm dãy Cauchy như sau: Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là dãy Cauchy nếu $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ khi $n, m \rightarrow \infty$.

Một không gian metric X mà trong đó mọi dãy Cauchy đều hội tụ (tới một phần tử thuộc X) gọi là *không gian đủ*.

Các không gian như: đường thẳng thực \mathbb{R} với khoảng cách thông thường là một không gian metric đủ; không gian \mathbb{R}^k với khoảng cách thông thường cũng là không gian metric đủ, ...

1.1.1.5. Ánh xạ liên tục

Cho hai không gian metric X và Y (với các metric tương ứng là ρ_X và ρ_Y). Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là *liên tục* tại điểm $x_0 \in X$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thỏa mãn $\rho_X(x, x_0) < \delta$ thì $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Ánh xạ f được gọi là *liên tục* nếu nó liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

1.1.1.6. Khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp

Cho A là một tập hợp trong không gian metric X . Với mỗi điểm $x \in X$, ta đặt

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\},$$

và gọi $\rho(x, A)$ là khoảng cách từ x đến tập A . Hiển nhiên $\rho(x, A) = 0$ khi và chỉ khi có một dãy $\{y_n\} \subset A$ sao cho $y_n \rightarrow x$. Do đó $\rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

Tập $A_\delta = \{x \in X : \rho(x, A) \leq \delta\}$ gồm những điểm cách tập A không quá δ , gọi là δ -bao của A .

Nếu A, B là hai tập trong không gian metric X thì $B \subset A_\delta$ có nghĩa là mọi điểm của B đều cách A một khoảng không vượt quá δ . Khi đó, số

$$d(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset B_\delta, B \subset A_\delta\},$$

gọi là *khoảng cách Hausdorff* giữa hai tập A và B .

1.1.2. Không gian tuyến tính định chuẩn

1.1.2.1. Định nghĩa

Trong phần trên, ta đã nghiên cứu các vấn đề liên quan đến khoảng cách như sự hội tụ và tính liên tục. Trong giải tích còn có nhiều vấn đề khác nữa liên quan đến các phép toán tuyến tính như: cộng hai phần tử và nhân một phần tử với một số. Để nghiên cứu vấn đề này, ta dựa vào khái niệm không gian vectơ và khái niệm không gian tuyến tính định chuẩn.

Định nghĩa 1.9. (Không gian vectơ).

Một tập X được gọi là một không gian vectơ nếu:

- a) Ứng với mỗi cặp phần tử $x, y \in X$ xác định, theo một quy tắc nào đó, phần tử thuộc X , gọi là tổng của x với y , và được ký hiệu là $x + y$; ứng với mỗi phần tử $x \in X$ và mỗi số thực α xác định, theo một quy tắc nào đó, một phần tử của X , gọi là tích của x với α và được ký hiệu là $\alpha \cdot x$.
- b) Các quy tắc trên thỏa mãn 8 điều kiện sau đây với mọi $x, y, z \in X$ và với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
- 1) $x + y = y + x$.
 - 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$.
 - 3) Tồn tại một phần tử 0 sao cho $x + 0 = x$ (phần tử này được gọi là phần tử không).
 - 4) Ứng với mỗi $x \in X$ ta có phần tử $-x \in X$ sao cho $x + (-x) = 0$ (phần tử $-x$ được gọi là phần tử đối của x).
 - 5) $1 \cdot x = x$.
 - 6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
 - 7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
 - 8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Định nghĩa 1.10. (Không gian tuyến tính định chuẩn).

Cho X là một không gian tuyến tính trên trường \mathbb{K} , một chuẩn trên X là hàm số $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- 1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ với mọi $\lambda \in \mathbb{K}$.
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ với mọi $x, y \in X$.

Khi đó $\|\cdot\|$ gọi là một chuẩn trên X và không gian $(X, \|\cdot\|)$ được gọi là *không gian tuyến tính định chuẩn*.

1.1.2.2. Tính liên tục

Giả sử X và Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn. Một toán tử A từ X vào Y được gọi là *liên tục* nếu $x_n \rightarrow x_0$ trong X luôn kéo theo $Ax_n \rightarrow Ax_0$

trong Y . Một toán tử tuyến tính A từ X vào Y là liên tục khi và chỉ khi nó bị chặn.

Trong không gian vectơ X ta xác định một chuẩn, nghĩa là ứng với mỗi phần tử $x \in X$, ta có một số $\|x\| \geq 0$ thỏa mãn các điều kiện trong Định nghĩa 1.10. Nếu ta đặt

$$\rho(x, y) = \|x - y\|,$$

thì ρ là một metric trên X . Tức là ta lại có một không gian metric.

Ta có một số kết quả sau đây:

- 1) $x_n \rightarrow x_0$ có nghĩa là $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.
- 2) Nếu $x_n \rightarrow x_0$ thì $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$, hay là chuẩn $\|\cdot\|$ là một hàm liên tục của x .
- 3) Mọi dãy hội tụ đều bị chặn. Tức là nếu $\{x_n\}$ hội tụ thì tồn tại số $M \geq 0$ sao cho với mọi n thì $\|x_n\| \leq M$.
- 4) Nếu $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$ thì $x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$. Nếu $x_n \rightarrow x_0$ và $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ thì $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha_0 x_0$. Hay các phép toán $x + y$ và αx là liên tục. Ta nói rằng cấu trúc đại số tương thích với cấu trúc tôpô.

1.1.2.3. Tính Lipschitz

Cho X là không gian định chuẩn. Ta nói rằng f là hàm Lipschitz trên tập $D \subset X$ nếu tồn tại $k > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

Hàm f được gọi là Lipschitz địa phương tại $x \in X$ nếu tồn tại số $\varepsilon > 0$ sao cho f là hàm Lipschitz trên hình cầu $B(x, \varepsilon) \cap D$.

Hàm f được gọi là Lipschitz địa phương trên tập D nếu nó Lipschitz địa phương tại mọi điểm thuộc D .

1.1.3. Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.11. (Không gian tiền Hilbert).

Một không gian vectơ thực X được gọi là không gian tiền Hilbert nếu trên X có xác định một hàm hai biến (x, y) , gọi là tích vô hướng của hai vectơ x và y , thỏa mãn

- 1) $(x, y) = (y, x)$.
- 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
- 3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 4) $(x, x) > 0$ nếu $x \neq 0$, $(x, x) = 0$ nếu $x = 0$.

Hơn nữa ta chứng minh được $(x, x) = \|x\|^2$, tức là $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ xác định một chuẩn trong không gian X . Nói cách khác, không gian tiền Hilbert định nghĩa như trên là một không gian định chuẩn và đo đó cũng là một không gian metric.

Mặt khác ta cũng chứng minh được tích vô hướng (x, y) là một hàm liên tục đối với x và y .

Định nghĩa 1.12. (Không gian Hilbert).

Một không gian tiền Hilbert đủ gọi là *không gian Hilbert*.

Trên không gian Hilbert X , ta có: Với mỗi vectơ $a \in X$, hệ thức

$$f(x) = (a, x),$$

xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ trên không gian X với $\|f\| = \|a\|$. Ngược lại, bất kỳ phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ nào trên một không gian Hilbert X cũng đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $f(x) = (a, x)$, trong đó a là một vectơ thuộc X thỏa mãn $\|f\| = \|a\|$.

Mỗi toán tử tuyến tính liên tục A trong không gian Hilbert X xác định một phiếm hàm song tuyến tính liên tục $f(x, y) = (Ax, y)$ nghiệm đúng $\|f\| = \|A\|$. Ngược lại bất kỳ phiếm hàm song tuyến tính liên tục $f(x, y)$ nào trên X cũng có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $f(x, y) = (Ax, y)$, trong đó A là một toán tử tuyến tính liên tục trên X thỏa mãn $\|f\| = \|A\|$.

1.1.4. Không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff

Định nghĩa 1.13. Cho một tập X bất kỳ. Ta nói một họ \mathcal{T} những tập con của X là một tôpô (hay xác định một cấu trúc tôpô) trên X nếu

- i) Hai tập \emptyset và X đều thuộc \mathcal{T} .

- ii) \mathcal{T} đóng kín đối với phép giao hữu hạn, tức là giao của một số hữu hạn các tập thuộc \mathcal{T} cũng là một tập thuộc \mathcal{T} .
- iii) \mathcal{T} đóng kín đối với phép hợp bất kỳ, tức là hợp của một số bất kỳ (hữu hạn hoặc vô hạn) các tập hợp thuộc \mathcal{T} cũng là tập thuộc \mathcal{T} .

Một tập X cùng với tôpô \mathcal{T} trên X được gọi là một *không gian tôpô*, ký hiệu là (X, \mathcal{T}) .

Vì họ các tập mở trong một không gian metric thỏa mãn các điều kiện trên, nên các không gian metric đều là không gian tôpô.

Định nghĩa 1.14. lân cận của một điểm x trong một không gian tôpô X là bất cứ tập hợp nào bao hàm một tập mở chứa x . Nói cách khác V là một lân cận của x nếu có một tập mở G sao cho $x \in G \subset V$.

Định nghĩa 1.15. (Ánh xạ liên tục).

Cho X, Y là hai không gian tôpô. Một ánh xạ f từ X vào Y được gọi là liên tục tại x_0 nếu với mọi lân cận U_{y_0} của điểm $y_0 = f(x_0)$ đều có một lân cận V_{x_0} của điểm x_0 sao cho $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$, nghĩa là $x \in V_{x_0} \Rightarrow f(x) \in U_{y_0}$.

Ánh xạ f được gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Định nghĩa 1.16. (Không gian Hausdorff).

Không gian tôpô (X, \mathcal{T}) được gọi là T_2 -không gian (*không gian Hausdorff*) nếu với hai điểm phân biệt x_1, x_2 thuộc X luôn tồn tại hai tập mở U, V sao cho $x_1 \in U, x_2 \in V$ và $U \cap V = \emptyset$.

1.1.5. Không gian đối ngẫu

Nếu X là một không gian vectơ tôpô thì tập hợp các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X gọi là *không gian đối ngẫu* của X và được ký hiệu là X^* . Đó là một không gian vectơ với các phép toán tự nhiên:

- $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$
- $(\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x).$

Nếu X là không gian định chuẩn thì ta có thể đưa vào trong X^* một chuẩn để nó biến thành một không gian định chuẩn đủ (không gian Banach).

Với X là không gian Banach, ta có không gian đối ngẫu X^* . Gọi X^{**} là không gian đối ngẫu của X^* . Trong trường hợp $X = X^{**}$ thì X được gọi là không gian Banach phản xạ.

1.2. Ánh xạ đa trị

1.2.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.17. (Ánh xạ đa trị).

Cho X, Y là hai tập hợp bất kỳ. Một ánh xạ $F : X \rightrightarrows Y$ được gọi là *ánh xạ đa trị* nếu F chuyển $x \in X$ thành một tập hợp $F(x) \subset Y$. $F(x)$ gọi là ảnh của x .

Sau này, ta sẽ dùng ký hiệu $F : X \rightrightarrows Y$ để chỉ F là một ánh xạ đa trị từ X vào Y .

Nếu F là một ánh xạ đa trị từ X vào Y thì ta có:

- 1) $A \subset X$, $F(A) = \cup F(x)$ với $x \in A$, được gọi là ảnh của tập hợp A .
- 2) Với $y \in Y$, tập $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ được gọi là tiền ảnh của y .
- 3) $B \subset Y$, $F^{-1}(B) = \cup F^{-1}(y) \subset X$ với $y \in B$, là tiền ảnh của B .
- 4) $\text{dom } F = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$ là miền hữu hiệu của F .
- 5) $\text{graf } F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ gọi là đồ thị của F .

Từ Định nghĩa 1.17, ta có khái niệm ánh xạ đa trị đóng như sau.

Định nghĩa 1.18. (Ánh xạ đa trị đóng).

Cho X, Y là các không gian tôpô, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị. Nếu $\text{graf } F$ là tập đóng thì F được gọi là *ánh xạ đa trị đóng* (hoặc ánh xạ có đồ thị đóng), hay tương đương: $(x_n, y_n) \in \text{graf } F$, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Rightarrow (x, y) \in \text{graf } F$ tức là $y_n \in \text{graf } F(x_n) \Rightarrow y \in F(x)$.

1.2.2. Tính nửa liên tục trên và tính nửa liên tục dưới của ánh xạ đa trị

Định nghĩa 1.19. (Tính nửa liên tục trên).

Ta nói ánh xạ đa trị F là nửa liên tục trên tại $x \in \text{dom } F$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x) \subset V$ tồn tại một lân cận mở U của x sao cho $F(x) \subset V$ với mọi $x \in U$.

Nếu F là nửa liên tục trên tại mọi điểm thuộc $\text{dom } F$, thì F được gọi là nửa liên tục trên ở trong X .

Định nghĩa 1.20. (Tính nửa liên tục dưới).

Ta nói ánh xạ đa trị F là *nửa liên tục dưới* tại $x \in \text{dom } F$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x) \cap V \neq \emptyset$ tồn tại một lân cận mở U của x sao cho $F(x) \cap V \neq \emptyset$ với mọi $x \in U \cap \text{dom } F$.

Nếu F là nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x \in \text{dom } F$ thì F được gọi là nửa liên tục dưới ở trên X .

Định nghĩa 1.21. (Tính liên tục).

Ta nói ánh xạ đa trị F liên tục tại $x \in \text{dom } F$ nếu F đồng thời vừa liên tục trên và vừa liên tục dưới tại x . Nếu F liên tục tại mọi điểm thuộc $\text{dom } F$ thì F được gọi là liên tục trên X .

Sau đây, ta xét một vài ví dụ về tính nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới và liên tục của ánh xạ đa trị.

Ví dụ 1.22. Ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } x < 0, \\ \{-1, 1\} & \text{nếu } x = 0, \\ \{1\} & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

là nửa liên tục trên ở trong \mathbb{R} , nhưng không nửa liên tục dưới tại $x = 0$. Do vậy F không là ánh xạ liên tục.

Ví dụ 1.23. Ánh xạ đa trị

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{nếu } x \neq 0, \\ \{0\} & \text{nếu } x = 0, \end{cases}$$

nửa liên tục dưới tại $x = 0$ nhưng không nửa liên tục trên tại đó. Do đó nó cũng không là ánh xạ liên tục.

1.3. Các bài toán trong lý thuyết tối ưu

1) **Bài toán tối ưu** Cho D là một tập khác rỗng của không gian X . Bài toán: Tìm điểm $x_0 \in D$ thỏa mãn $F(x_0) \leq F(x)$ với mọi $x \in D$, ta viết

$$F(x_0) = \min_{x \in D} F(x).$$

x_0 được gọi là *nghiệm tối ưu toàn cục* của bài toán. Nếu tìm được $x_0 \in D$ sao cho tồn tại một lân cận U của x_0 để $F(x_0) \leq F(x)$ với mọi $x \in U \cap D$, thì bài toán được gọi là *bài toán tối ưu địa phương* và x_0 được gọi là *nghiệm tối ưu địa phương* của bài toán.

2) **Bài toán bất đẳng thức biến phân:** Gọi X^* là không gian đối ngẫu của X . Nếu $x \in X$, $f \in X^*$, ta định nghĩa $\langle x, f \rangle = f(x)$ là giá trị của f tại x . Cho $D \subset X$ là tập lồi, đóng, khác rỗng. Cho ánh xạ $A : D \rightarrow X^*$, $\phi : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \pm\infty$. Tìm $u \in D$ sao cho

$$\langle A(u), v - u \rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0, \quad \forall v \in D.$$

3) **Bài toán điểm cân bằng:** Cho D là tập con khác rỗng của không gian X , $f : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $f(\bar{x}, y) \geq 0$ với mọi $y \in D$.

4) **Bài toán điểm bất động:** Cho X là không gian Hilbert, $D \subset X$ là tập hợp con khác rỗng, $T : D \rightarrow D$ là ánh xạ đơn trị. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

5) **Bài toán cân bằng Nash:** Cho $D_i \in X_i$, $i \in I$ là các tập con khác rỗng trong X_i (với I là tập hữu hạn các phần tử, $i \in I$, X_i là những không gian). Đặt $D = \prod_{i \in I} D_i$ và xét các hàm $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$. Với mỗi $x = (x_i)_{i \in I} \in D$, ta đặt $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$. Tìm $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I} \in D$ sao cho

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i), \quad \forall y_i \in D_i.$$

6) **Bài toán điểm yên ngựa:** Cho $D_1, D_2 \in X$ và $\varphi : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Tìm (\bar{x}_1, \bar{x}_2) sao cho $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in D_1 \times D_2$ và

$$\varphi(\bar{x}_1, y_2) \leq \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq \varphi(y_1, \bar{x}_2), \quad \forall (y_1, y_2) \in D_1 \times D_2.$$

7) **Bài toán bù:** Cho C là nón lồi, đóng trong X . Gọi C^* là nón cực của C . Xét ánh xạ $T : C \rightarrow C^*$, với X^* là không gian tôpô đối ngẫu của X . Tìm $\bar{x} \in X$ sao cho $\bar{x} \in C$, $T(\bar{x}) \in C^*$, $\langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle = 0$.

8) **Bài toán tựa tối ưu loại I:** Cho K là tập hợp khác rỗng của không gian Y nào đó, $S : D \times K \rightarrow 2^D$, $T : D \times K \rightarrow 2^K$ là các ánh xạ đa trị, $F : K \times D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số. Tìm điểm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

- 1) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$,
- 2) $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,
- 3) $F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) = \min_{x \in S(\bar{x}, \bar{y})} F(\bar{y}, \bar{x}, x)$.

9) **Bài toán tựa tối ưu loại II:** Tiếp theo cho $S_i : D \rightarrow 2^D$, $i = 1, 2$, $T : D \rightarrow 2^K$ là các ánh xạ đa trị, $F : K \times D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số. Tìm điểm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

- 1) $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$,
- 2) $F(y, \bar{x}, x) \geq F(y, \bar{x}, x)$ với mọi $x \in S_2(\bar{x})$, $y \in T(\bar{x}, x)$.

Chương 2

Độ nhạy nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng

Trong chương này chúng ta sẽ thiết lập một số kết quả về độ nhạy nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng có tham số trong không gian Banach phản xạ.

Do hệ điều kiện cần cực trị bậc nhất của một bài toán tối ưu bất kỳ có thể viết dưới dạng một bất đẳng thức biến phân hoặc bất đẳng thức biến phân suy rộng nên hầu hết các kết quả về bất đẳng thức biến phân và bất đẳng thức biến phân suy rộng đều có ứng dụng trong tối ưu hóa. Nói riêng ra, các kết quả về độ nhạy nghiệm của các bất đẳng thức biến phân suy rộng có những hệ quả trực tiếp đối với ánh xạ nghiệm của các bài toán quy hoạch lồi có tham số.

2.1. Các khái niệm cơ bản

Ta ký hiệu X là không gian Banach phản xạ với không gian đối ngẫu X^* . Chuẩn trong X và trong X^* đều được ký hiệu là $\|\cdot\|$. Ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản sau:

- Khoảng cách từ điểm $z \in X$ đến tập A được định nghĩa bởi

$$d(z, A) = \inf\{\|z - x\| : x \in A\}.$$

Quy ước $\inf \emptyset = +\infty$ và $A + \emptyset = \emptyset$.

- **Tập lồi:** Tập hợp $A \subset X$ được gọi là *tập lồi* nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$, $t \in [0, 1]$ thì $tx_1 + (1 - t)x_2 \in A$.

- **Vectơ pháp tuyến:** Vectơ $x^* \in X^*$ được gọi là vectơ pháp tuyến của tập lồi A tại \bar{x} nếu nó thỏa mãn

$$\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in A.$$

- **Nón pháp tuyến** của tập K tại x được định nghĩa bởi công thức

$$N_K(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x \rangle \leq 0 \ \forall y \in K\}, & x \in K, \\ \emptyset, & x \notin K. \end{cases} \quad (2.1)$$

- **Hàm lồi:** Cho X là không gian lồi địa phương, $D \subset X$, $f : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, ta có

$$\text{epi } f = \{(x, r) \in D \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

Hàm f được gọi là lồi nếu $\text{epi } f$ là tập lồi trong không gian tích $X \times \mathbb{R}$.

- **Dưới vi phân:** Cho $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm lồi và $x \in X$ sao cho $\varphi(x) \neq +\infty$. Dưới vi phân của φ tại x được ký hiệu bởi $\partial\varphi(x)$ và được xác định bởi công thức

$$\partial\varphi(x) = \{x^* \in X^* : \varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle \ \forall y \in X\}. \quad (2.2)$$

Giả sử $F : X \rightarrow 2^{X^*}$ là một ánh xạ đa trị, bất đẳng thức biến phân suy rộng xác định bởi ánh xạ F và tập lồi K là bài toán tìm $x \in K$ thỏa mãn bao hàm thức

$$0 \in F(x) + N_K(x). \quad (2.3)$$

Từ công thức (2.1) suy ra rằng $x \in X$ thỏa mãn (2.3) khi và chỉ khi $x \in K$ và tồn tại $x^* \in F(x)$ sao cho

$$\langle x^*, y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Nếu $F(x) = \{f(x)\}$, trong đó $f : X \rightarrow X^*$ là ánh xạ đơn trị, thì (2.3) trở thành

$$0 \in f(x) + N_K(x), \quad (2.4)$$

và bài toán tương ứng được gọi là bất đẳng thức biến phân xác định bởi ánh xạ f và K .

Giả sử (Λ, d) và (M, d) là các không gian metric. Giả sử $x_0 \in X$, $\lambda_0 \in \Lambda$ và $\mu_0 \in M$. Giả sử $F : X \times M \rightarrow 2^{X^*}$, $K : \Lambda \rightarrow 2^X$ là hai ánh xạ đa trị. Ta luôn giả sử rằng $K(\cdot)$ nhận giá trị lồi, đóng, khác rỗng. Bài toán tìm $x = x(\mu, \lambda)$ thỏa mãn bao hàm thức

$$0 \in F(x, \mu) + N_{K(\lambda)}(x), \quad (2.5)$$

trong đó $(\mu, \lambda) \in M \times \Lambda$ là một cặp tham số, được gọi là bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số. Lưu ý rằng $x \in X$ thỏa mãn (2.5) khi và chỉ khi $x \in K(\lambda)$ và tồn tại $x^* \in F(x, \mu)$ sao cho

$$\langle x^*, y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K(\lambda).$$

2.2. Các kết quả bổ trợ

Cho $G : X \rightarrow 2^{X^*}$ là ánh xạ đa trị. Các tập

$$\text{dom } G = \{x \in X : G(x) \neq \emptyset\}$$

và

$$\text{graf } G = \{(x, x^*) \in X \times X^* : x^* \in G(x)\}$$

tương ứng được gọi là miền hữu hiệu và đồ thị của G .

Định nghĩa 2.1. Ánh xạ G được gọi là *nửa liên tục dưới theo nghĩa Hausdorff* tại $x_0 \in X$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một lân cận U của x_0 trong X sao cho

$$G(x_0) \subset G(x) + \varepsilon B_{X^*},$$

với mọi $x \in U$, trong đó

$$B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| < 1\}.$$

Định nghĩa 2.2. Ánh xạ G được gọi là *đê-mi liên tục* tại $x_0 \in X$ nếu với mỗi tập mở $V \subset X^*$ trong tôpô yếu* của X^* thỏa mãn $G(x_0) \subset V$ tồn tại một lân cận U của x_0 trong X sao cho $G(x) \subset V$ với mọi $x \in U$.

G được gọi là *hê-mi liên tục* tại $x_0 \in X$ nếu với mọi $x \in X$, $\bar{t} \in [0, 1]$ và với mọi tập mở yếu* $V \subset X^*$ thỏa mãn

$$G(\bar{t}x_0 + (1 - \bar{t})v) \subset V,$$

tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$G(tx_0 + (1 - t)x_0) \subset V$$

với mọi $t \in [0, 1]$ mà $|1 - \bar{t}| < \delta$.

Định nghĩa 2.3. Ánh xạ $G : X \rightarrow 2^{X^*}$ được gọi là *đơn điệu* nếu với mọi $(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in \text{graf } G$ ta có

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

Ta nói G *đơn điệu cực đại* nếu G là đơn điệu và không tồn tại ánh xạ đơn điệu $G' : X \rightarrow 2^{X^*}$ sao cho $\text{graf } G$ là tập con thực sự của $\text{graf } G'$.

Sau đây chúng ta sẽ phát biểu tiêu chuẩn để kiểm tra tính đơn điệu cực đại của một ánh xạ đa trị.

Bổ đề 2.4. *Giả sử $G : X \rightarrow 2^{X^*}$ là một toán tử đơn điệu, hê-mi liên tục. Nếu $U \subset \text{dom } G$ là tập hợp sao cho với mọi $x \in U$ ta có $G(x)$ là tập lồi đóng thì khi đó G là đê-mi liên tục tại mỗi điểm $x_0 \in U$.*

Bổ đề 2.5. *Giả sử $G : X \rightarrow 2^{X^*}$ là một toán tử đơn điệu, đê-mi liên tục. Nếu với mọi $x \in X$, tập $G(x)$ là lồi đóng thì G là toán tử đơn điệu cực đại.*

Bổ đề dưới đây sẽ cho phép chúng ta kiểm tra tính đơn điệu cực đại của tổng hai toán tử đơn điệu cực đại.

Bổ đề 2.6. *Nếu $G_1, G_2 : X \rightarrow 2^{X^*}$ là các toán tử đơn điệu cực đại thỏa mãn điều kiện $\text{int}(\text{dom } G_1) \cap \text{dom } G_2 \neq \emptyset$, trong đó $\text{int } D$ ký hiệu phần trong tôpô của tập D , thì khi đó tổng $G_1 + G_2 : X \rightarrow 2^{X^*}$ xác định bởi công thức*

$$(G_1 + G_2)(x) = G_1(x) + G_2(x),$$

cũng là toán tử đơn điệu cực đại.

Sau đây là kết quả chính của lý thuyết toán tử đơn điệu cực đại.

Bổ đề 2.7. Nếu $G : X \rightarrow 2^{X^*}$ là đơn điệu cực đại và $\text{dom } G$ là bị chặn thì G là toàn ánh, nghĩa là $\bigcup_{x \in X} G(x) = X^*$.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ cần đến các khái niệm về tính đơn điệu chặt và đơn điệu đều (theo hàm cỡ ω) của ánh xạ đa trị $G : X \rightarrow 2^{X^*}$.

Định nghĩa 2.8. Ánh xạ $G : X \rightarrow 2^{X^*}$ được gọi là *đơn điệu chặt* nếu cho bất kỳ $(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in \text{graf } G$, $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle > 0.$$

Ta thấy rằng nếu $F : X \rightarrow 2^{X^*}$ là đơn điệu chặt thì bài toán (2.3) có nhiều nhất một nghiệm. Thật vậy, giả sử rằng $x_1, x_2 \in K$ là hai nghiệm của bài toán (2.3), khi đó tồn tại $x_1^* \in F(x_1)$, $x_2^* \in F(x_2)$ thỏa mãn

$$\langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0, \quad \langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Do đó

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \leq 0.$$

Do tính đơn điệu của F , ta có

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

Vì vậy

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle = 0.$$

Từ tính đơn điệu chặt của F ta suy ra $x_1 = x_2$.

Định nghĩa 2.9. Giả sử ω là một hàm số không giảm trên $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ sao cho $\omega(t) > 0$ với mọi $t > 0$. Ánh xạ G được gọi là ω -đơn điệu đều nếu với mọi $(x_1, x_1^*) \in \text{graf } G$ ta có

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq \omega(\|x_2 - x_1\|)\|x_2 - x_1\|. \quad (2.6)$$

Nếu $\omega(t) = \alpha t$, $\alpha > 0$ thì (2.6) trở thành

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq \omega\|x_2 - x_1\|^2. \quad (2.7)$$

Trong trường hợp này G được gọi là đơn điệu mạnh.

2.3. Các tính chất liên tục của nghiệm bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số dạng (2.5), trong đó $F(x, \mu)$, $K(\lambda)$, M , Λ được định nghĩa như trong Mục 2.1. Giả sử $(x_0, \mu_0, \lambda_0) \in X \times M \times \Lambda$ là bộ ba thỏa mãn điều kiện

$$0 \in F(x_0, \mu_0) + N_{K(\lambda_0)}(x_0). \quad (2.8)$$

Kết quả đầu tiên của chúng ta về độ nhạy nghiệm của bài toán (2.5) đối với sự thay đổi của cặp tham số (μ, λ) được phát biểu như sau.

Định lý 2.10. *Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

- a) *Với mọi $\mu \in M$, $F(\cdot, \mu)$ là toán tử đơn điệu cực đại.*
- b) *Tồn tại lân cận U của x_0 sao cho với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ để nếu*

$$(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in \text{graf } F(\cdot, \mu) \cap (U \times X^*),$$

với $\mu \in M$ nào đó, và

$$\|x_2 - x_1\| > \varepsilon,$$

thì

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle > \delta.$$

- c) *Tồn tại lân cận U' của x_0 , lân cận W của μ_0 và hằng số $\gamma > 0$ sao cho $F(x, \mu) \neq \emptyset$ với mọi $(x, \mu) \in U' \times W$,*

$$\sup\{\|x^*\| : x^* \in F(x, \mu), x \in U', \mu \in W\} < \gamma, \quad (2.9)$$

và với mọi $x \in U$, $F(x, \cdot)$ là nửa liên tục dưới theo nghĩa Hausdorff tại mọi điểm $\mu \in W$.

- d) *Tồn tại hàm số $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa mãn*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = 0,$$

lân cận U'' của x_0 và lân cận V của λ_0 sao cho

$$K(\lambda') \cap U'' \subset K(\lambda) + \beta(d(\lambda', \lambda))\overline{B}_X, \quad \forall \lambda', \lambda \in V. \quad (2.10)$$

Khi đó tồn tại lân cận \widetilde{W} của μ_0 , lân cận \widetilde{V} của λ_0 sao cho với mọi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ tồn tại duy nhất nghiệm $x = x(\mu, \lambda) \in U$ của bất đẳng thức biến phân suy rộng sau đây

$$0 \in F(x, \mu) + N_{K(\lambda)}(x). \quad (2.11)$$

Hơn nữa, $x(\mu_0, \lambda) = x_0$ và hàm $(\mu, \lambda) \mapsto x(\mu, \lambda)$ liên tục trên $\widetilde{W} \times \widetilde{V}$.

Các nhận xét dưới đây sẽ giúp chúng ta hiểu rõ hơn về các giả thiết a) \rightarrow d).

Nhận xét 2.11. Nếu tồn tại một hằng số $\alpha > 0$ sao cho với mọi $\mu \in M$ và $(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in \text{graf } F(\cdot, \mu)$, bất đẳng thức (2.7) được nghiệm đúng thì b) được thỏa mãn. Cũng dễ thấy rằng nếu tồn tại một hàm không giảm $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\omega(t) > 0$ khi $t > 0$, sao cho với mọi $\mu \in M$ và với mọi $(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in \text{graf } F(\cdot, \mu)$, bất đẳng thức (2.6) nghiệm đúng, thì b) được thỏa mãn.

Nhận xét 2.12. Nếu a) và b) được thỏa mãn, với mọi $\mu \in M$, hạn chế của ánh xạ $F(\cdot, \mu)$ trên U là đơn điệu chặt. Thật vậy, do a), $F(\cdot, \mu)$ là đơn điệu. Giả sử rằng tồn tại $(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in \text{graf } F(\cdot, \mu) \cap (U \times X^*)$, $x_1 \neq x_2$ thỏa mãn

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle = 0.$$

Đặt $\varepsilon = \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|$. Với mọi $\delta > 0$, ta có $\|x_2 - x_1\| > \varepsilon$. Ta lại có

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle = 0 < \delta.$$

Điều này mâu thuẫn với b).

Nhận xét 2.13. Nếu $F(x, \mu) = \{f(x, \mu)\}$, trong đó $f : X \times M \rightarrow X^*$ là ánh xạ đơn trị và liên tục thì c) thỏa mãn.

Nhận xét 2.14. Giả sử rằng Λ là một tập con trong không gian định chuẩn và $\beta(t) = k(t)$, trong đó $k > 0$ là một hằng số. Khi đó (2.10) trở thành

$$K(\lambda') \cap U'' \subset K(\lambda) + k\|\lambda' - \lambda\|\overline{B}_X$$

với mọi $\lambda, \lambda' \in V$. Trong trường hợp này, ta nói rằng $K(\cdot)$ là giả Lipschitz tại (λ_0, x_0) . Theo thuật ngữ trong [8] và [12], ánh xạ $K(\cdot)$ là có tính chất Aubin tại (λ_0, x_0) . Các tác giả của [10] đã đề nghị thay cụm từ “có tính chất Aubin” bởi cụm từ “liên tục Aubin”. Dễ thấy rằng nếu $K(\cdot)$ liên tục Aubin tại (λ_0, x_0) thì d) thỏa mãn.

Nhận xét 2.15. Nếu với mọi $\mu \in M$, ánh xạ $F(\cdot, \mu)$ có giá trị lồi, đóng, đơn điệu và hê-mi liên tục trên X , thì a) thỏa mãn. Để chứng minh điều đó ta chỉ cần áp dụng Bổ đề 2.4 và Bổ đề 2.5.

Nhận xét 2.16. Định lý 2.22 dưới đây là trường hợp đặc biệt của Định lý 2.10, trong đó F là một ánh xạ đơn trị.

Khái niệm đơn điệu đều (theo một hàm cỡ ω nào đó) của các toán tử đã tỏ ra rất hữu ích trong Giải tích hàm phi tuyến. Trong [11] và [9] đã chỉ ra rằng có thể đặc trưng tính lồi đều của các không gian Banach bằng cách sử dụng tính đơn điệu đều của các toán tử. Lưu ý rằng lớp các toán tử đơn điệu mạnh là khá hẹp và không thích hợp cho việc thiết lập những đặc trưng như thế.

Dưới đây là một số ví dụ về các toán tử là ω - đơn điệu đều (với một hàm cỡ ω nào đó) mà không là đơn điệu mạnh.

Ví dụ 2.17. Xét ánh xạ $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ được xác định bởi công thức

$$F(u) = \{|u|^{p-2}u\},$$

với mọi $u \in \mathbb{R}$, trong đó $p > 2$ là một hằng số cho trước. Khi đó tồn tại một hằng số c sao cho

$$(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v, u - v) \geq c|u - v|^p,$$

với mọi $u, v \in \mathbb{R}$. Do đó $F(\cdot)$ là một toán tử ω đơn điệu đều với $\omega(t) := ct^{p-1}$.

Chú ý 2.18. Có thể chứng tỏ rằng $F(\cdot)$ không là toán tử đơn điệu mạnh.

Ví dụ 2.19. Giả sử $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(x) = x^4$. Vì φ là một hàm lồi khả vi liên tục nên

$$\partial\varphi(x) = \{\varphi'(x)\}.$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(y) - \varphi'(x), y - x \rangle &= (4y^3 - 4x^3)(y - x) \\ &= 4(y^2 + xy + x^2)(x - y)^2 \\ &\geq (y - x)^4. \end{aligned}$$

Vì vậy $F(\cdot) = \partial\varphi(\cdot)$ là ω - đơn điệu đều, trong đó $\omega(t) = t^3$. Chú ý rằng toán tử F này không đơn điệu mạnh.

Ví dụ 2.20. Giả sử $X = L^p([0, 1])$, $p > 2$, là không gian Banach gồm các hàm đo được xác định trên $[0, 1]$, sao cho

$$\int_0^1 |x(s)|^p ds < +\infty.$$

Theo định nghĩa,

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(s)|^p ds \right)^{1/p}.$$

Đặt

$$\phi(x) = \frac{1}{p} \cdot \|x\|^p, \quad \forall x \in X.$$

Xét ánh xạ $f : X \rightarrow 2^{X^*}$ được xác định bởi công thức $F(\cdot) := \partial\phi(\cdot)$. Nhận xét rằng $F(\cdot)$ là một ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc. ta có

$$\|tx + (1-t)y\|^p \leq t\|x\|^p + (1-t)\|y\|^p - \frac{1}{p^{2p}}c(t)\|x-y\|^p,$$

với mọi $x, y \in X$ và $t \in [0, 1]$, trong đó

$$c(t) = t(1-t)^p + t^p(1-t).$$

Sử dụng sự kiện này và lập luận trong chứng minh của Mệnh đề 2.26 của Mục 2.5 trong chương này, ta thu được

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^p,$$

với mọi $x, y \in X$, $x^* \in F(x)$, $y^* \in F(y)$, trong đó $\alpha = \frac{2}{p^2 2^p}$. Điều này chứng tỏ rằng F là toán tử ω - đơn điệu đều với $\omega(t) = \alpha t^{p-1}$. Tuy nhiên, F không là đơn điệu mạnh. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại $\beta > 0$ sao cho

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^p,$$

với mọi $x, y \in X$, $x^* \in F(x)$, $y^* \in F(y)$. Cho $x = 2y$, $y \neq 0$ ta có

$$\langle x^* - y^*, y \rangle \geq \beta \|y\|^2,$$

với mọi $y \in X$, $x^* \in F(2y)$, $y^* \in F(y)$. Theo Mệnh đề 2.1 trong [9],

$$F(x) = \{x^* \in X : \langle x^*, x \rangle = \|x\|^p, \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\}.$$

Vậy ta có

$$\beta \|y\|^2 \leq \langle x^* - y^*, y \rangle = 2^{p-1} \|y\|^p - \|y\|^p = (2^{p-1} - 1) \|y\|^p.$$

Từ đây suy ra

$$\beta \leq (2^{p-1} - 1) \|y\|^{p-2}.$$

Vì bất đẳng thức này không thỏa mãn với $y \in X$ có chuẩn đủ nhỏ nên ta đi đến mâu thuẫn.

Chứng minh Định lý 2.10: Giả sử rằng các giả thiết a) - d) được thỏa mãn. Khi đó, do c) và d), tồn tại các hằng số $s > 0$, $\bar{\delta} > 0$ sao cho

$$B(x_0, s) \subset U \cap U' \cap U'', \quad B(\lambda_0, \bar{\delta}) \subset V,$$

và

$$\beta(d(\lambda, \lambda_0)) < s, \quad \forall \lambda \in B(\lambda_0, \bar{\delta}). \quad (2.12)$$

Do cách chọn $s > 0$ và $\bar{\delta} > 0$, ta có

$$\sup\{\|x^*\| : x^* \in F(x, \mu), x \in \bar{B}(x_0, s), \mu \in W\} \leq \gamma, \quad (2.13)$$

$$K(\lambda') \cap \bar{B}(x_0, s) \subset K(\lambda) + \beta(d(\lambda', \lambda)) \bar{B}_X, \quad (2.14)$$

với mọi $\lambda', \lambda \in B(\lambda_0, \bar{\delta})$. Thay $\lambda' = \lambda_0$ vào (2.14), ta thấy rằng với mỗi $\lambda \in B(\lambda_0, \bar{\delta})$ tồn tại $z_\lambda \in K(\lambda)$ thỏa mãn

$$\|z_\lambda - x_0\| \leq \beta(d(\lambda, \lambda_0)) < s.$$

Do đó ta có $K(\lambda) \cap B(x_0, s) \neq \emptyset$ với mọi $\lambda \in B(\lambda_0, \bar{\delta})$. Cố định một cặp $(\mu, \lambda) \in W \times B(\lambda_0, \bar{\delta})$ và xét bao hàm thức

$$0 \in F(x, \mu) + N_{K(\lambda) \cap \bar{B}(x_0, s)}(x). \quad (2.15)$$

Vì $K(\lambda) \cap B(x_0, s)$ là tập lồi đóng, toán tử nón pháp tuyến

$$x \longmapsto N_{K(\lambda) \cap \bar{B}(x_0, s)}(x), \quad (2.16)$$

là đơn điệu cực đại (xem [13, p. 859]). Do a) nên $F(\cdot, \mu)$ cũng là đơn điệu cực đại. Do c) và do cách chọn s , ta có

$$\bar{B}(x_0, s) \subset \text{int}(\text{dom } F(\cdot, \mu)).$$

Vì miền hữu hiệu của toán tử (2.16) là tập bị chặn và khác rỗng $K(\lambda) \cap \overline{B}(x_0, s)$ nên theo Bổ đề 2.6, ánh xạ đa trị

$$x \longmapsto F(x, \mu) + N_{K(\lambda) \cap \overline{B}(x_0, s)}(x) \quad (2.17)$$

là đơn điệu cực đại với miền hữu hiệu bị chặn. Theo Bổ đề 2.7 tồn tại vectơ $x = x(\mu, \lambda) \in K(\lambda) \cap \overline{B}(x_0, s)$ thỏa mãn bao hàm thức (2.15). Vì $F(\cdot, \mu)$ là đơn điệu chặt (theo nhận xét 2.12), vectơ $x = x(\mu, \lambda)$ là xác định duy nhất. Do (2.15), tồn tại $z_{\mu, \lambda}^* \in F(x(\mu, \lambda), \mu)$ sao cho

$$\langle z_{\mu, \lambda}^*, z - x(\mu, \lambda) \rangle \geq 0, \quad \forall z \in K(\lambda) \cap \overline{B}(x_0, s).$$

Nói riêng ra,

$$\langle z_{\mu, \lambda}^*, z_\lambda - x(\mu, \lambda) \rangle \geq 0. \quad (2.18)$$

Do (2.14) và do $x(\mu, \lambda) \in K(\lambda) \cap \overline{B}(x_0, s)$, tồn tại $z_0 \in K(\lambda_0)$ thỏa mãn

$$\|x(\mu, \lambda) - z_0\| \leq \beta(d(\lambda, \lambda_0)).$$

Do (2.8), tồn tại $x_0^* \in F(x_0, \mu_0)$ sao cho

$$\langle x_0^*, z - x_0 \rangle \geq 0,$$

với mọi $z \in K(\lambda_0)$. Nói riêng ra,

$$\langle x_0^*, z_0 - x_0 \rangle \geq 0. \quad (2.19)$$

Vì $F(\cdot, \mu)$ là đơn điệu cực đại, giá trị của nó phải là các tập lồi đóng yếu* trong X^* (xem [13, Proposition 32.6]). Như vậy $F(x_0, \mu)$, $\mu \in M$ là các tập con lồi đóng yếu* trong X^* . Hơn nữa do c) ta có $F(x_0, \mu) \neq \emptyset$. Vì X là không gian Banach phản xạ nên tồn tại $y_\mu^* \in F(x_0, \mu)$ thỏa mãn

$$d(x_0^*, F(x_0, \mu)) = \inf_{z^* \in F(x_0, \mu)} \|x_0^* - z^*\| = \|x_0^* - y_\mu^*\|. \quad (2.20)$$

Sử dụng (2.18) và (2.19), và tính đơn điệu của $F(\cdot, \mu)$ ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle z_{\mu, \lambda}^* - y_\mu^*, x(\mu, \lambda) - x_0 \rangle \\ &\leq \langle z_{\mu, \lambda}^* - y_\mu^*, x(\mu, \lambda) - x_0 \rangle + \langle x_0^*, z_0 - x_0 \rangle + \langle z_{\mu, \lambda}^*, z_\lambda - x(\mu, \lambda) \rangle \\ &= \langle z_{\mu, \lambda}^*, z_\lambda - x_0 \rangle + \langle y_\mu^*, x(\mu, \lambda) - x_0 \rangle + \langle x_0^*, z_0 - x_0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle z_{\mu,\lambda}^*, z_\lambda - x_0 \rangle + \langle y_\mu^*, x(\mu, \lambda) - x_0 \rangle + \langle y_\mu^*, z_0 - x_0 \rangle + \\
&\quad + \langle x_0^* - y_\mu^*, z_0 - x_0 \rangle \\
&= \langle z_{\mu,\lambda}^*, z_\lambda - x_0 \rangle + \langle y_\mu^*, z_0 - x(\mu, \lambda) \rangle + \langle x_0^* - y_\mu^*, z_0 - x_0 \rangle \\
&\leq \|z_{\mu,\lambda}^*\| \cdot \|z_\lambda - x_0\| + \|y_\mu^*\| \cdot \|x(\mu, \lambda) - z_0\| + \|x_0^* - y_\mu^*\| \cdot \|z_0 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Do (2.13) ta có

$$\begin{aligned}
&\|z_{\mu,\lambda}^*\| \leq \gamma, \quad \|y_\mu^*\| \leq \gamma, \\
&\|x(\mu, \lambda) - z_0\| \leq \beta(d(\lambda, \lambda_0)), \quad \|z_\lambda - z_0\| \leq \beta(d(\lambda, \lambda_0)), \\
&\|z_0 - x_0\| \leq \|z_0 - x(\mu, \lambda)\| + \|x(\mu, \lambda) - x_0\| \leq \beta(d(\lambda, \lambda_0)) + s < 2s.
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$0 \leq \langle z_{\mu,\lambda}^* - y_\mu^*, x(\mu, \lambda) - x_0 \rangle \leq 2\gamma\beta d(\lambda, \lambda_0) + 2s\|x_0^* - y_\mu^*\|. \quad (2.21)$$

Ta khẳng định rằng $\|x_0^* - y_\mu^*\| \rightarrow 0$ khi $\mu \rightarrow \mu_0$. Thực vậy, từ c) suy ra rằng ánh xạ đa trị $F(x_0, \cdot)$ là nửa liên tục dưới Hausdorff tại μ_0 . Do đó với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta' > 0$ sao cho

$$F(x_0, \mu_0) \subset F(x_0, \mu) + \varepsilon\beta_{x^*}, \quad \forall \mu \in B(\mu_0, \delta').$$

Vì $x_0^* \in F(x_0, \mu_0)$ nên

$$d(x_0^*, F(x_0, \mu)) < \varepsilon.$$

Do (2.20) ta có

$$\|x_0^* - y_\mu^*\| < \varepsilon, \quad \forall \mu \in B(\mu_0, \delta').$$

Như vậy ta đã chứng minh được rằng $\|x_0^* - y_\mu^*\| \rightarrow 0$ khi $\mu \rightarrow \mu_0$.

Chú ý rằng từ (2.21) ta có

$$\langle z_{\mu,\lambda}^* - y_\mu^*, x(\mu, \lambda) - x_0 \rangle \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

khi $(\mu, \lambda) \rightarrow (\mu_0, \lambda_0)$. Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng giả thiết b). Giả sử $\varepsilon > 0$ cho trước, chọn $\delta > 0$ sao cho tính chất được phát biểu trong b) nghiệm đúng. Do (2.22), tồn tại $\theta > 0$ sao cho với mọi cặp (μ, λ) thỏa mãn $d(\mu, \mu_0) < \theta$, $d(\lambda, \lambda_0) < \theta$ ta có

$$\langle z_{\mu,\lambda}^* - y_\mu^*, x(\mu, \lambda) - x_0 \rangle \leq \delta.$$

Vì $(x(\mu, \lambda), z_{\mu, \lambda}^*), (y_\mu^*, x_0) \in \text{graf } F(\cdot, \mu)$ nên từ b) ta suy ra rằng đánh giá

$$\|x(\mu, \lambda) - x_0\| \leq \varepsilon$$

nghiệm đúng với mọi cặp (μ, λ) mà $d(\mu, \mu_0) < \theta$ và $d(\lambda, \lambda_0) < \theta$. Điều này cho thấy rằng $x(\mu_0, \lambda_0) = x_0$ và $x(\mu, \lambda) \rightarrow x_0$ khi $(\mu, \lambda) \rightarrow (\mu_0, \lambda_0)$. Do đó tồn tại lân cận mở \widetilde{W} của μ_0 , lân cận mở \widetilde{V} của λ_0 sao cho $\widetilde{W} \subset W$, $\widetilde{V} \subset B(\lambda_0, \delta)$ và $x(\mu, \lambda) \in B(x_0, s)$ với mọi cặp $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$. Với mọi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$, do $x = x(\mu, \lambda)$ thỏa mãn (2.15) và do

$$N_{K(\lambda) \cap \overline{B}(x_0, s)} x(\mu, \lambda) = N_{K(\lambda)} x(\mu, \lambda),$$

ta có

$$0 \in F(x(\mu, \lambda), \mu) + N_{K(\lambda)}(x(\mu, \lambda)).$$

Điều này chứng tỏ rằng $x = x(\mu, \lambda)$ là nghiệm của bài toán (2.11).

Ta còn phải chứng minh rằng hàm $(\mu, \lambda) \mapsto x(\mu, \lambda)$ liên tục trên $\widetilde{W} \times \widetilde{V}$. Giả sử $(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ được cho tùy ý. Đặt $\bar{x} = x(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$, ta có

$$0 \in F(\bar{x}, \bar{\mu}) + N_{K(\bar{\lambda})}(\bar{x}).$$

Bây giờ thay cho bộ ba (x_0, μ_0, λ_0) , chúng ta xét bộ ba $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$.

Chú ý rằng các giả thiết a), b) không phụ thuộc vào việc chọn bộ ba (x_0, μ_0, λ_0) . Do c) và d) nên ta có W và V tương ứng là các lân cận của $\bar{\mu}$ và $\bar{\lambda}$, trong khi U, U' và U'' là các lân cận của \bar{x} . Vì vậy các giả thiết a) \rightarrow d), ở đó (x_0, μ_0, λ_0) được thay thế bởi $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$, vẫn có hiệu lực. Khi đó theo kết quả đã được thiết lập trong phần trước của chứng minh này, tồn tại các lân cận mở $\overline{W} \in \widetilde{W}$ và $\overline{V} \in \widetilde{V}$ tương ứng của $\bar{\mu}$ và $\bar{\lambda}$ sao cho với mỗi $(\mu, \lambda) \in \overline{V} \times \overline{W}$ tồn tại duy nhất vectơ $u = u(\mu, \lambda)$ thỏa mãn (2.11), đồng thời $u(\mu, \lambda) \rightarrow \bar{x}$ khi $u(\mu, \lambda) \rightarrow (\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ và $u(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = \bar{x}$. Với mọi cặp $(\mu, \lambda) \in M \times \Lambda$, vì (2.11) có nhiều nhất một nghiệm nên ta phải có $u(\mu, \lambda) = x(\mu, \lambda)$ với mọi $(\mu, \lambda) \in \overline{W} \times \overline{V}$. Tính liên tục của hàm $x(\mu, \lambda)$ tại $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ suy ra từ tính liên tục của hàm $u(\mu, \lambda)$ tại $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$. Định lý được chứng minh. \square

Bây giờ chúng ta chỉ ra rằng dưới những điều kiện chặt hơn các điều kiện a) \rightarrow d), ánh xạ nghiệm $x = x(\mu, \lambda)$ của bài toán (2.11) có tính chất liên tục kiểu Lipschitz - Hölder, mạnh hơn tính chất liên tục nói trong kết luận của Định lý 2.10.

Định lý 2.21. *Giả sử rằng a) và các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

b') *Tồn tại lân cận U của x_0 và hằng số $\alpha > 0$ sao cho nếu ta có $(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in \text{graf } F(\cdot, \mu) \cap (U \times X^*)$ với một phần tử $\mu \in M$ nào đó thì*

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq \alpha \|x_2 - x_1\|^2. \quad (2.23)$$

c') *Tồn tại lân cận U' của x_0 , lân cận W của μ_0 và hằng số $l > 0$ sao cho $F(x, \mu) \neq \emptyset$ với mọi $(x, \mu) \in U' \times W'$ và*

$$h(F(x_1, \mu_1), F(x_2, \mu_2)) \leq l(\|x_1 - x_2\| + d(\mu_1, \mu_2)), \quad (2.24)$$

với mọi $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in U' \times W$, trong đó

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

ký hiệu khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp $A, B \subset X^$.*

d') *Tồn tại lân cận U' của μ_0 , lân cận V của λ_0 và hằng số $k > 0$ sao cho*

$$K(\lambda') \cap U'' \cap K(\lambda) + kd(\lambda', \lambda)\overline{B}_X, \quad \forall \lambda, \lambda' \in V. \quad (2.25)$$

Khi đó tồn tại lân cận \widetilde{W} của μ_0 , lân cận \widetilde{V} của λ_0 , các hằng số $k_1, k_2 > 0$ sao cho với mọi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ tồn tại duy nhất nghiệm $x = x(\mu, \lambda) \in U$ của bài toán (2.11) thỏa mãn đẳng thức $x(\mu_0, \lambda_0) = x_0$ và

$$\|x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda)\| \leq k_1 d(\mu', \mu) + k_2 d(\lambda', \lambda)^{1/2},$$

với mọi $(\mu', \lambda'), (\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$.

Chứng minh. Trước tiên ta chỉ ra rằng các giả thiết a) \rightarrow d) của Định lý 2.10 được thỏa mãn. Hiển nhiên b') suy ra b) và d') suy ra d). Từ c') ta có $x_0 \in \text{int}(\text{dom } F(\cdot, \mu_0))$. Vì $F(\cdot, \mu_0)$ là đơn điệu cực đại nên $F(x_0, \mu_0)$ phải là tập bị chặn (xem [13, Proposition 32.33]). Do c') và do tính bị chặn của tập $F(x_0, \mu_0)$ tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho tính chất (2.9) nghiệm đúng. Vì vậy chứng minh của Định lý 2.10 áp dụng được vào trường hợp đang xét.

Theo Định lý 2.10, tồn tại các lân cận \widetilde{W} , \widetilde{V} và duy nhất một hàm liên tục $x(\mu, \lambda)$ xác định trên $\widetilde{W} \times \widetilde{V}$ sao cho với mọi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ ta có $x = x(\mu, \lambda)$ là nghiệm của (2.11).

Giả sử $s, \bar{\delta}$ được chọn như trong chứng minh của Định lý 2.10. Gọi $\widetilde{W}, \widetilde{V}$ và $x = x(\mu, \lambda)$ tương ứng là các lân cận và ánh xạ nghiệm được xây dựng như trong chứng minh của Định lý 2.10. Lấy tùy ý $(\mu', \lambda'), (\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$. Do

$$x(\mu, \lambda) \in K(\lambda) \cap \overline{B}(x_0, s) \subset K(\lambda) \cap U''$$

và do (2.25) nên tồn tại $z \in K(\lambda')$ sao cho

$$\|x(\mu, \lambda) - z\| \leq kd(\lambda, \lambda'). \quad (2.26)$$

Tương tự, do $x(\mu, \lambda') \in K(\lambda') \cap B(x_0, s) \subset K(\lambda') \cap U''$ và do (2.25) nên tồn tại $y \in K(\lambda)$ sao cho

$$\|x(\mu, \lambda') - y\| \leq kd(\lambda, \lambda'). \quad (2.27)$$

Vì $x(\mu, \lambda)$ (và $x(\mu, \lambda')$) là nghiệm bao hàm thức

$$0 \in F(x, \mu) + N_{K(\lambda)}(x),$$

(tương ứng $0 \in F(x, \mu) + N_{K(\lambda')}(x)$), tồn tại $y^* \in F(x(\mu, \lambda), \mu)$ ($z^* \in F(x(\mu, \lambda), \mu)$ tương ứng) sao cho

$$\begin{aligned} \langle y^*, y - x(\mu, \lambda) \rangle &\geq 0, \\ \langle z^*, z - x(\mu, \lambda') \rangle &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Từ (2.23) và (2.26) - (2.28) ta có

$$\begin{aligned} \alpha \|x(\mu, \lambda') - x(\mu, \lambda)\|^2 &\leq \langle z^* - y^*, x(\mu, \lambda') - x(\mu, \lambda) \rangle \\ &\leq \langle z^* - y^*, x(\mu, \lambda') - x(\mu, \lambda) \rangle + \langle y^*, y - x(\mu, \lambda) \rangle + \langle z^*, z - x(\mu, \lambda') \rangle \\ &= \langle z^*, z - x(\mu, \lambda) \rangle + \langle y^*, y - x(\mu, \lambda') \rangle \\ &\leq \|z^*\| \cdot \|z - x(\mu, \lambda)\| + \|y^*\| \cdot \|y - x(\mu, \lambda')\| \\ &\leq 2\gamma kd(\lambda, \lambda'). \end{aligned}$$

Do đó

$$\|x(\mu, \lambda') - x(\mu, \lambda)\| \leq \frac{2\gamma k}{\alpha} \cdot d(\lambda, \lambda')^{1/2}. \quad (2.29)$$

Tiếp theo do $x(\mu, \lambda')$ (và $x(\mu', \lambda')$) là nghiệm của bao hàm thức

$$0 \in F(x, \mu) + N_{K(\lambda')}(x),$$

(tương ứng, $0 \in F(x, \mu') + N_{K(\lambda')}(x)$), tồn tại $u^* \in F(x(\mu, \lambda'), \mu)$ ($v^* \in F(x(\mu', \lambda'), \mu')$ tương ứng) sao cho

$$\begin{aligned} \langle u^*, x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda') \rangle &\geq 0, \\ \langle v^*, x(\mu, \lambda') - x(\mu', \lambda') \rangle &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Do (2.24) nên tồn tại $\omega^* \in F(x(\mu', \lambda'), \mu)$ thỏa mãn

$$\|v^* - \omega^*\| \leq ld(\mu', \mu). \quad (2.31)$$

Từ b') và (2.30) suy ra

$$\begin{aligned} \alpha \|x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda')\|^2 &\leq \langle \omega^* - u^*, x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda') \rangle \\ &\leq \langle \omega^* - u^*, x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda') \rangle + \langle u^*, x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda') \rangle + \\ &\quad + \langle v^*, x(\mu, \lambda') - x(\mu', \lambda') \rangle \\ &= \langle \omega^* - v^*, x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda') \rangle \\ &\leq \|\omega^* - v^*\| \cdot \|x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda')\|. \end{aligned}$$

Do đó sử dụng (2.31) ta có

$$\alpha \|x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda')\| \leq ld(\mu', \mu). \quad (2.32)$$

Kết hợp (2.29) với (2.32) ta có

$$\begin{aligned} \|x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda)\| &\leq \|x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda')\| + \|x(\mu, \lambda') - x(\mu, \lambda)\| \\ &\leq \frac{l}{\alpha} d(\mu', \mu) + \left[\frac{2\gamma k}{\alpha} d(\lambda', \lambda) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Đặt $k_1 = \frac{1}{\alpha}$, $k_2 = \left[\frac{2\gamma k}{\alpha} \right]^{1/2}$, ta có các hằng số thỏa mãn tính chất liên tục kiểu Lipschitz- Hölder nói trong kết luận của định lý. \square

2.4. Các trường hợp đặc biệt

Trong mục này, chúng ta nghiên cứu bài toán (2.5) cho trường hợp $F(x, \mu) = \{f(x, \mu)\}$, trong đó $f : X \times M \rightarrow X^*$ là một ánh xạ đa trị. Giả sử $(x_0, \mu_0, \lambda_0) \in X \times M \times \Lambda$ thỏa mãn

$$0 \in f(x_0, \mu_0) + N_{K(\lambda_0)}(x_0).$$

Kết quả sau đây được suy từ Định lý 2.10.

Định lý 2.22. *Giả sử rằng d) và các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

- $b_1)$ Với mọi $\mu \in M$, $f(\cdot, \mu)$ là toán tử đơn điệu và hê-mi liên tục.
 $b_2)$ Tồn tại lân cận U của x_0 sao cho với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ với tính chất: nếu $x_1, x_2 \in U$, $\mu \in M$ và $\|x_2 - x_1\| > \varepsilon$ thì

$$\langle (x_2, \mu) - f(x_1, \mu), x_2 - x_1 \rangle > \delta.$$

- $b_3)$ Tồn tại lân cận U' của x_0 , lân cận W của μ_0 và hằng số $\gamma > 0$ sao cho

$$\sup \{ \|f(x, \mu)\| : x \in U', \mu \in W \} \leq \gamma$$

và, với mọi $x \in U$, $f(x, \cdot)$ là liên tục trên W .

Khi đó tồn tại lân cận \widetilde{W} của μ_0 , lân cận \widetilde{V} của λ_0 sao cho với mọi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ tồn tại duy nhất nghiệm $x = x(\mu, \lambda) \in U$ của bất đẳng thức biến phân có tham số sau

$$0 \in f(x, \mu) + N_{K(\lambda)}(x). \quad (2.33)$$

Hơn nữa, $x(\mu_0, \lambda_0) = x_0$ và hàm $(\mu, \lambda) \mapsto x(\mu, \lambda)$ là liên tục trên $\widetilde{W} \times \widetilde{V}$.

Chứng minh. Để chứng minh, ta chỉ cần để ý rằng $b_1)$ kéo theo a) (xem Bổ đề 2.4 và Bổ đề 2.5) và áp dụng Định lý 2.10. \square

Định lý 2.23. *Giả sử rằng d) và các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

- $b'_1)$ Tồn tại lân cận U của x_0 , lân cận W của μ_0 sao cho f liên tục trên $U \times W$.

- $b'_2)$ Ánh xạ $f(\cdot, \mu)$ là đơn điệu chặt với mọi $\mu \in W$, và

$$\langle f(y, \mu) - f(x, \mu), y - x \rangle \rightarrow 0 \text{ khi } y \rightarrow x \quad \text{đều theo } \mu \in W.$$

Khi đó tồn tại lân cận \widetilde{W} của μ_0 , lân cận \widetilde{V} của λ_0 sao cho với mọi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ tồn tại duy nhất nghiệm $x = x(\mu, \lambda) \in U$ của bất đẳng thức biến phân có tham số sau

$$0 \in f(x, \mu) + N_{K(\lambda)}(x). \quad (2.34)$$

Hơn nữa, $x(\mu_0, \lambda_0) = x_0$ và hàm $(\mu, \lambda) \mapsto x(\mu, \lambda)$ là liên tục trên $\widetilde{W} \times \widetilde{V}$.

Kết quả sau đây được suy trực tiếp từ Định lý 2.21.

Định lý 2.24. *Giả sử rằng $b_1)$, $d')$ và các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

$b_2'')$ *Tồn tại lân cận U của x_0 và hằng số $\alpha > 0$ sao cho với mọi (x_1, μ) , $(x_2, \mu) \in U \times M$ ta có*

$$\langle f(x_2, \mu) - f(x_1, \mu), x_2 - x_1 \rangle \geq \alpha \|x_2 - x_1\|^2.$$

$b_3'')$ *Tồn tại lân cận U' của x_0 , lân cận W của μ_0 và hằng số $l > 0$ sao cho*

$$\|f(x_1, \mu_1) - f(x_2, \mu_2)\| \leq l(\|x_1 - x_2\| + d(\mu_1, \mu_2)),$$

với mọi $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in U' \times W$.

Khi đó tồn tại lân cận \widetilde{W} của μ_0 , lân cận \widetilde{V} của λ_0 và các hằng số $k_1, k_2 > 0$ sao cho với mỗi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ tồn tại duy nhất nghiệm $x = x(\mu, \lambda) \in U$ của bài toán (2.33). Hơn nữa, $x(\mu_0, \lambda_0) = x_0$ và

$$\|x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda)\| \leq k_1 d(\mu', \mu) + k_2 d(\mu', \mu)^{1/2},$$

với mọi $(\mu', \lambda'), (\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$.

2.5. Một vài ứng dụng

Trong mục này, chúng ta sẽ áp dụng các kết quả đã thu được trong Mục 2.3 để nghiên cứu độ nhạy nghiệm của các bài toán quy hoạch lồi có tham số.

Định nghĩa 2.25. Hàm $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là lồi mạnh nếu tồn tại hằng số $\rho > 0$ sao cho

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) - \rho t(1-t)\|x_1 - x_2\|^2,$$

với mọi $t \in [0, 1]$ và $x_1, x_2 \in X$.

Giữa tính lồi mạnh và tính đơn điệu mạnh của ánh xạ dưới vi phân có một mối quan hệ chặt chẽ. Điều đó được thể hiện trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 2.26. *Nếu $\varphi(\cdot)$ là lồi mạnh thì tồn tại hằng số $\alpha > 0$ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in X$, $x_1^* \in \partial\varphi(x_1)$, $x_2^* \in \partial\varphi(x_2)$, ta có*

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq \alpha \|x_2 - x_1\|^2. \quad (2.35)$$

Chứng minh. Với mọi $x, y \in X$ và $t \in (0, 1)$, ta có

$$\varphi(x + t(y - x)) - \varphi(x) \leq t(\varphi(y) - \varphi(x)) - \rho t(1 - t)\|y - x\|^2.$$

Do đó với mọi $x^* \in \partial\varphi(x)$ thì

$$t \langle x^*, y - x \rangle \leq t(\varphi(y) - \varphi(x)) - \rho t(1 - t)\|y - x\|^2,$$

hay

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq (\varphi(y) - \varphi(x)) - \rho(1 - t)\|y - x\|^2, \quad (2.36)$$

với mọi $x, y \in X$ và $x^* \in \partial\varphi(x)$. Giả sử rằng $x_1, x_2 \in X$, $x_1^* \in \partial\varphi(x_1)$, $x_2^* \in \partial\varphi(x_2)$.

Từ (2.36) ta có

$$\begin{aligned} \langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle &\leq \varphi(x_2) - \varphi(x_1) - \rho(1 - t)\|x_2 - x_1\|^2, \\ \langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle &\leq \varphi(x_1) - \varphi(x_2) - \rho(1 - t)\|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức này theo từng vế, ta được

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 2\rho(1 - t)\|x_2 - x_1\|^2.$$

Cho $t \rightarrow 0$ và đặt $\alpha = 2\rho$, ta có (2.35). Mệnh đề được chứng minh. \square

Chú ý rằng nếu hàm $\varphi(\cdot)$ không được giả thiết là khả vi Frechet trên X thì ánh xạ $x \mapsto \partial\varphi(x)$ nói chung không phải là ánh xạ đơn trị.

Bây giờ ta có thể phát biểu hai kết quả về độ nhạy nghiệm của các bài toán quy hoạch lồi với hàm mục tiêu lồi mạnh. Giả sử $\varphi : X \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm thực sao cho với mọi $\mu \in M$, $\varphi(\cdot, \mu)$ là một hàm lồi. Ký hiệu $\partial\varphi(\cdot, \mu)$ được dùng để chỉ dưới vi phân của hàm $\varphi(\cdot, \mu)$. Xét bài toán

$$\varphi(x, \mu) \rightarrow \min, \quad \text{với } x \in K(\lambda), \quad (2.37)$$

trong đó $(\mu, \lambda) \in M \times \Lambda$ là cặp tham số. Giả sử x_0 là nghiệm của (2.37) với $(\mu, \lambda) = (\mu_0, \lambda_0) \in M \times \Lambda$ là cặp tham số cho trước.

Định lý 2.27. *Giả sử rằng d) và các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

$c_1)$ Với mọi $\mu \in M$, hàm $\varphi(\cdot, \mu)$ là nửa liên tục dưới trên X .

$c_2)$ Tồn tại lân cận U của x_0 sao cho với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ với tính chất: Nếu $x_1^* \in \partial_x \varphi(x_1, \mu)$, $x_2^* \in \partial_x \varphi(x_2, \mu)$ ở đó $x_1, x_2 \in U$, $\mu \in M$ và $\|x_2 - x_1\| > \varepsilon$ thì

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle > \delta.$$

$c_3)$ Tồn tại lân cận U' của x_0 , lân cận W của μ_0 và hằng số $\gamma > 0$ sao cho $\partial_x \varphi(x, \mu) \neq \emptyset$ với mọi $(x, \mu) \in U' \times W$,

$$\sup\{\|x^*\| : x^* \in \partial_x \varphi(x, \mu), x \in U', \mu \in W\} < \gamma,$$

và với mọi $x \in U$, ánh xạ đa trị $\partial_x \varphi(x, \cdot)$ là nửa liên tục dưới theo nghĩa Hausdorff tại mọi điểm $\mu \in W$.

Khi đó tồn tại lân cận \widetilde{W} của μ_0 , lân cận \widetilde{V} của λ_0 sao cho với mọi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ tồn tại duy nhất nghiệm $x = x(\mu, \lambda) \in U$ của bài toán tối ưu (2.37). Ngoài ra, $x(\mu_0, \lambda_0) = x_0$ và hàm $(\mu, \lambda) \mapsto x(\mu, \lambda)$ là liên tục trên $\widetilde{W} \times \widetilde{V}$.

Chứng minh. Chỉ cần lưu ý rằng x là nghiệm của (2.37) khi và chỉ khi x là nghiệm của bất đẳng thức biến phân sau đây

$$0 \in \partial_x \varphi(x, \mu) + N_{K(\lambda)}(x).$$

Đặt $F(x, \mu) = \partial_x \varphi(x, \mu)$. Với mọi $\mu \in M$, $F(\cdot, \mu)$ là toán tử đơn điệu cực đại (xem [13, Proposition 32.17]). Do đó ta có thể áp dụng Định lý 2.10 để thu được kết luận mong muốn. \square

Định lý 2.28. *Giả sử d') và các điều kiện sau được thỏa mãn:*

$c_2)$ Tồn tại lân cận U của x_0 và hằng số $\alpha > 0$ sao cho: Nếu $x_1^* \in \partial_x(x_1, \mu)$, $x_2^* \in \partial_x(x_2, \mu)$, ở đó $\mu \in M$ và $x_1, x_2 \in U$ thì

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq \alpha \|x_2 - x_1\|^2.$$

$c_3)$ Tồn tại lân cận U' của x_0 , lân cận W của μ_0 và hằng số $l > 0$ sao cho với mọi $(x, \mu) \in U' \times W$, $\varphi(\cdot, \mu)$ có đạo hàm Frechet $\varphi'_x(x, \mu)$, và

$$\|\varphi'_x(x_1, \mu_1) - \varphi'_x(x_2, \mu_2)\| \leq l(\|x_1 - x_2\| + d(\mu_1, \mu_2))$$

với mọi $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in U' \times W$.

Khi đó tồn tại lân cận \widetilde{W} của μ_0 , lân cận \widetilde{V} của λ_0 , và hằng số $k_1, k_2 > 0$ sao cho với mọi $(\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$ tồn tại duy nhất nghiệm $x = x(\mu, \lambda) \in U$ của bài toán (2.37). Hơn nữa, $x(\mu_0, \lambda_0) = x_0$ và

$$\|x(\mu', \lambda') - x(\mu, \lambda)\| \leq k_1 d(\mu', \mu) + k_2 d(\lambda', \lambda)^{1/2},$$

với mọi $(\mu', \lambda'), (\mu, \lambda) \in \widetilde{W} \times \widetilde{V}$.

Chứng minh. Định lý này được suy ra từ Định lý 2.21 bằng cách tương tự như Định lý 2.27 suy từ Định lý 2.10. \square

2.6. Kết luận

Trong chương này, chúng ta đã sử dụng một số kết quả của lý thuyết toán tử đơn điệu cực đại để thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục kiểu Lipschitz-Hölder theo nhiều nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số trong không gian Banach phản xạ.

Chương 3

Tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán biến phân phụ thuộc tham số

Giả sử $p > 1$, $m, n \geq 1$. Chuẩn trong \mathbb{R}^n được ký hiệu bởi $|\cdot|$. Giả sử $L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm đo được theo nghĩa Lebesgue, xác định trên $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty.$$

Theo định nghĩa chuẩn trong không gian $L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ được cho bởi

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Giả sử

$$W^{1,p}([a, b], \mathbb{R}^n) = \{x \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n)\}$$

là không gian Sobolev của các hàm x có đạo hàm (theo nghĩa phân bố) thuộc $L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$. Chuẩn trong không gian $W^{1,p}$ được cho bởi công thức

$$\|x\|_{1,p} = (\|x\|_p^p + \|\dot{x}\|_p^p)^{1/p}.$$

Với mỗi cặp $(\theta, \lambda) \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{2n}$, ở đó $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ta xét bài toán sau

$$P(\theta, \lambda) \quad \begin{cases} \text{Tìm } x = x(\theta, \lambda) \in W^{1,p}([a, b], \mathbb{R}^n) \text{ sao cho} \\ J(x, \theta) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t), \theta(t)) dt \rightarrow \inf \\ x(a) = \lambda_1, \quad x(b) = \lambda_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm thực. Như vậy $P(\theta, \lambda)$ là bài toán biến phân cơ sở phụ thuộc tham số. Ở đây $\theta \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ và $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ là các tham số của bài toán.

Giả sử rằng $\bar{x} = \bar{x}(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$ là nghiệm của $P(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$. Dưới những điều kiện nhất định, $P(\theta, \lambda)$ có duy nhất nghiệm $x = x(\theta, \lambda)$. Mục đích của chúng ta trong chương này là khảo sát các tính chất liên tục kiểu Lipschitz-Hölder của hàm $x(\theta, \lambda)$ khi cặp (θ, λ) thay đổi trong một lân cận của $(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$.

3.1. Tính liên tục Hölder của nghiệm của $P(\theta, \lambda)$

Trước tiên, chúng ta đưa ra các giả thuyết sau:

$H_1)$ Với hầu khắp $t \in [a, b]$, hàm $L(t, \cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và với mọi $x, y \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$, $z \in L_p([a, b], \mathbb{R}^m)$, hàm

$$t \longmapsto L(t, x(t), y(t), z(t))$$

là khả tổng trên $[a, b]$.

$H_2)$ Với hầu khắp $t \in [a, b]$, hàm

$$\begin{aligned} L(t, \cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\longmapsto L(t, u, v, w) \end{aligned}$$

có các đạo hàm riêng $L_u(t, u, v, w)$ và $L_v(t, u, v, w)$ liên tục Hölder bậc $p - 1$, nghĩa là tồn tại hằng số $l > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} |L_u(t, u, v, w) - L_u(t, u', v', w')| &\leq l(|u - u'|^{p-1} + |v - v'|^{p-1} + |w - w'|^{p-1}), \\ |L_v(t, u, v, w) - L_v(t, u', v', w')| &\leq l(|u - u'|^{p-1} + |v - v'|^{p-1} + |w - w'|^{p-1}) \end{aligned}$$

với mọi $u, v, u', v' \in \mathbb{R}^n$ và $w, w' \in \mathbb{R}^m$. Hơn thế nữa, tồn tại các hàm $\tilde{x}, \tilde{y} \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ và $\tilde{z} \in L_p([a, b], \mathbb{R}^m)$ sao cho các hàm

$$\beta(t) = |L_u(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))|, \quad \gamma(t) = |L_v(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))|,$$

thuộc $L_q([a, b], \mathbb{R})$. Ở đây $q > 0$ là số thực thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

H_3) Với hầu khắp $t \in [a, b]$, và với mọi $\omega \in \mathbb{R}^n$, hàm $L(t, \cdot, \cdot, w) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là lõi mạnh bậc p đều theo $\omega \in \mathbb{R}^m$, nghĩa là tồn tại hằng số $\rho > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} L(t, su + (1-s)u', sv + (1-s)v', w) &\leq \\ &\leq sL(t, u, v, w) + (1-s)L(t, u', v', w) - ps(1-s)(|u - u'|^p + |v - v'|^p), \end{aligned}$$

với mọi $(u, u'), (v, v') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $s \in [0, 1]$ và $w \in \mathbb{R}^m$.

Định lý 3.1. Giả sử rằng các giả thiết $H_1) - H_3)$ được thỏa mãn. Khi đó tồn tại các hằng số $l_0 > 0$, $l_1 > 0$, các lân cận U và W tương ứng của \bar{x} và $\bar{\theta}$, và lân cận V của $\bar{\lambda}$ sao cho với mọi $(\theta, \lambda) \in W \times V$, bài toán $P(\theta, \lambda)$ có nghiệm duy nhất $x(\theta, \lambda) \in U$. Ngoài ra, $x(\bar{\theta}, \bar{\lambda}) = \bar{x}$ và hàm $(\theta, \lambda) \mapsto x(\theta, \lambda)$ liên tục trên $W \times V$. Hơn nữa,

$$\|x(\theta, \lambda) - x(\theta', \lambda')\|_{1,p} \leq l_1 \|\theta - \theta'\|_p + l_0 |\lambda - \lambda'|^{1/p}, \quad (3.2)$$

với mọi $\theta, \theta' \in W$ và $\lambda, \lambda' \in V$.

Bổ đề 3.2. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số thực. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau:

$$i) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}, \text{ nếu } a_i \geq 0, b_i \geq 0 \text{ với mọi } i = \overline{1, n} \text{ và } p, q > 0 \text{ thỏa mãn } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$ii) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^r \leq \sum_{i=1}^n a_i^r, \text{ nếu } a_i > 0, \text{ với mọi } i = \overline{1, n} \text{ và } r \in [0, 1].$$

$$iii) \quad (u + v)^p \leq 2^{p-1}(u^p + v^p), \text{ với mọi } u, v \geq 0 \text{ và } p \geq 1.$$

$$iv) \quad \int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q}, \text{ với mọi hàm đo được } x(\cdot) \text{ và } y(\cdot) \text{ xác định trên } [a, b], \text{ trong đó } p, q > 0 \text{ và } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ta đặt $X = W^{1,p}([a, b], \mathbb{R}^n)$, $M = L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ và $\Lambda = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Với mỗi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, ta đặt

$$K(\lambda) = \{x \in X : x(a) = \lambda_1, x(b) = \lambda_2\}. \quad (3.3)$$

Khi đó (3.1) trở thành bài toán quy hoạch lồi sau đây:

$$P(\theta, \lambda) \quad \begin{cases} J(x, \theta) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t), \theta(t)) dt \rightarrow \inf \\ x \in K(\lambda). \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2. Các kết quả bổ trợ

Trong mục này chúng ta sẽ thiết lập các kết quả bổ trợ để chuẩn bị cho chứng minh Định lý 3.1.

Mệnh đề sau đây cho chúng ta thấy rằng ánh xạ $K(\cdot)$ là liên tục kiểu Lipschitz.

Mệnh đề 3.3. *Ánh xạ đa trị $K : \Lambda \rightarrow 2^X$ xác định bởi (3.3) có giá trị lồi, đóng, khác rỗng và tồn tại hằng số $k > 0$ sao cho*

$$K(\lambda) \subset K(\lambda') + k|\lambda - \lambda'| \overline{B}_X \quad (3.5)$$

với mọi $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, trong đó $|\lambda - \lambda'| = |\lambda_1 - \lambda'_1| + |\lambda_2 - \lambda'_2|$.

Chứng minh. Với mọi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, tính lồi của $K(\lambda)$ là hiển nhiên. Vì chuẩn $\|x\|_{1,p}$ tương đương với chuẩn $\|x\|_{1,p}^p = (\|\dot{x}\|_p^p + |x(a)|^p + |x(b)|^p)^{1/p}$ (xem [13, p. 1033]), nên dễ thấy $K(\lambda)$ là tập con lồi đóng. Ta chỉ còn phải chứng tỏ $K(\cdot)$ là liên tục Lipschitz.

Lấy tùy ý $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2) \in \Lambda$ và $x \in K(\lambda)$. Ta đặt

$$x_1(t) = x(t) - \lambda_1 + \lambda'_1, \quad x_2(t) = x(t) - \lambda_2 + \lambda'_2.$$

Khi đó $x_1(a) = \lambda'_1$, $x_2(b) = \lambda'_2$. Giả sử $\mu : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ là hàm thực xác định bởi công thức $\mu(t) = \frac{b-t}{b-a}$. Khi đó $\mu(a) = 1$, $\mu(b) = 0$ và $|\mu(t)| \leq 1$ với mọi $t \in [a, b]$. Đặt

$$y(t) = \mu(t)x_1(t) + (1 - \mu(t))x_2(t),$$

ta có $y(a) = \lambda'_1$, $y(b) = \lambda'_2$. Vậy $y \in K(\lambda')$. Vì

$$y(t) - x(t) = \mu(t)(\lambda_2 - \lambda_1 + \lambda'_1 - \lambda'_2) + \lambda'_2 - \lambda_2 \quad (3.6)$$

nên

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq |\mu(t)|(|\lambda_2 - \lambda'_2| + |\lambda_1 - \lambda'_1|) + |\lambda_2 - \lambda'_2| \\ &\leq 2(|\lambda_2 - \lambda'_2| + |\lambda_1 - \lambda'_1|), \end{aligned}$$

với mọi $t \in [a, b]$. Do đó,

$$\begin{aligned} \|y - x\|_p^p &\leq 2^p \int_a^b (|\lambda_1 - \lambda'_1| + |\lambda_2 - \lambda'_2|)^p dt \\ &\leq 2^p(b-a)(|\lambda_1 - \lambda'_1| + |\lambda_2 - \lambda'_2|)^p. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Từ (3.6) ta có

$$\dot{y}(t) - \dot{x}(t) = \frac{1}{a-b}(\lambda_2 - \lambda_1 + \lambda'_1 - \lambda'_2),$$

với hầu khắp $t \in [a, b]$. Vì vậy

$$\|\dot{y} - \dot{x}\|_p^p \leq \frac{b-a}{|a-b|^p}(|\lambda_1 - \lambda'_1| + |\lambda_2 - \lambda'_2|)^p. \quad (3.8)$$

Kết hợp (3.7) và (3.8) ta có

$$\|y - x\|_p^p + \|\dot{y} - \dot{x}\|_p^p \leq \left(2^p(b-a) + \frac{b-a}{|a-b|^p}\right)(|\lambda_1 - \lambda'_1| + |\lambda_2 - \lambda'_2|)^p.$$

Đặt $k = \left(2^p(b-a) + \frac{b-a}{|a-b|^p}\right)^{1/p}$, ta có

$$\|y - x\|_{1,p} \leq k|\lambda - \lambda'|.$$

Từ đây suy ra rằng tính chất (3.5) nghiệm đúng. Đó là điều phải chứng minh. \square

Với mỗi $\theta \in M$, ta ký hiệu $J_x(x, \theta)$ là đạo hàm Frechet của hàm số $J(\cdot, \theta)$ tại x . Bây giờ ta thiết lập một tính chất liên tục Hölder của $J_x(x, \theta)$ theo (x, θ) .

Mệnh đề 3.4. *Giả sử rằng các giả thiết $H_1)$ và $H_2)$ được thỏa mãn. Khi đó, với mỗi $\theta \in M$, phiếm hàm $J(\cdot, \theta)$ là khả vi Frechet theo x , tồn tại hằng số $k_1 > 0$ sao cho*

$$\|J_x(x_1, \theta_1) - J_x(x_2, \theta_2)\| \leq k_1(\|x_1 - x_2\|_{1,p}^{p/q} + \|\theta_1 - \theta_2\|_p^{p/q}), \quad (3.9)$$

với mọi $(x_i, \theta_i) \in X \times M$, $i = 1, 2$.

Chứng minh. Cố định $\theta \in M$ và xét phiếm hàm $J(\cdot, \theta)$. Với mỗi $\hat{s} \in M$, hàm $J(\cdot, \theta)$ khả vi Frechet tại \hat{x} . Thực vậy, giả sử $f(\hat{x}, \theta)$ là phiếm hàm tuyến tính xác định bởi công thức

$$f(\hat{x}, \theta)h = \int_a^b (\hat{L}_u(t)h(t) + \hat{L}_v(t)\dot{h}(t))dt,$$

với mọi $h \in X$, trong đó

$$\hat{L}_u(t) = L_u(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \theta(t)), \quad \hat{L}_v(t) = (t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \theta(t)).$$

Do $H_2)$ ta có

$$\begin{aligned} |\hat{L}_u(t)| &\leq |L_u(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))| + \\ &\quad + l(|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)|^{p-1} + |\dot{\hat{x}}(t) - \tilde{y}(t)|^{p-1} + |\theta(t) - \tilde{z}(t)|^{p-1}) \\ &= \beta(t) + l(|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)|^{p-1} + |\dot{\hat{x}}(t) - \tilde{y}(t)|^{p-1} + |\theta(t) - \tilde{z}(t)|^{p-1}), \\ |\hat{L}_v(t)| &\leq |L_v(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))| + \\ &\quad + l(|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)|^{p-1} + |\dot{\hat{x}}(t) - \tilde{y}(t)|^{p-1} + |\theta(t) - \tilde{z}(t)|^{p-1}) \\ &= \gamma(t) + l(|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)|^{p-1} + |\dot{\hat{x}}(t) - \tilde{y}(t)|^{p-1} + |\theta(t) - \tilde{z}(t)|^{p-1}), \end{aligned}$$

với hầu khắp $t \in [a, b]$. Vì $\beta(\cdot) \in L_q([a, b], \mathbb{R})$ và $\gamma(\cdot) \in L_q([a, b], \mathbb{R})$, ta suy ra $\hat{L}_u(t)$, $\hat{L}_v(t)$ thuộc $L_q([a, b], \mathbb{R}^n)$. Từ các bất đẳng thức i), iv) trong Bổ đề 3.2 suy ra rằng

$$\begin{aligned} |f(\hat{x}, \theta)h| &\leq \int_a^b |\hat{L}_u(t)h(t) + \hat{L}_v(t)\dot{h}(t)|dt \\ &\leq \int_a^b (|\hat{L}_u(t)|^q + |\hat{L}_v(t)|^q)^{1/q} (|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p)^{1/p} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_a^b (|\hat{L}_u(t)^q| + |\hat{L}_v(t)^q|) dt \right)^{1/q} \left(\int_a^b (|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p) dt \right)^{1/p} \\
&\leq \sigma \|h\|_{1,p},
\end{aligned}$$

trong đó

$$\sigma = \left(\int_a^b (|\hat{L}_u(t)^q| + |\hat{L}_v(t)^q|) dt \right)^{1/q}.$$

Điều này chứng tỏ rằng $f(\hat{x}, \theta)$ là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X . Chúng ta có

$$J(\hat{x} + h, \theta) - J(\hat{x}, \theta) - f(\hat{x}, \theta)h = o(h), \quad (3.10)$$

trong đó $o(h)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\|h\|$. Thực vậy,

$$\begin{aligned}
J(\hat{x} + h, \theta) - J(\hat{x}, \theta) - f(\hat{x}, \theta)h &= \int_a^b \left\{ L(t, \hat{x}(t) + h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \dot{h}(t), \theta(t)) - \right. \\
&\quad \left. - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \theta(t)) - \hat{L}_u(t)h(t) - \hat{L}_v(t)\dot{h}(t) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Sử dụng định lý giá trị trung bình và giả thiết H_2), ta có

$$\begin{aligned}
&|L(t, \hat{x}(t) + h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \dot{h}(t), \theta(t)) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \theta(t)) - \hat{L}_u(t)h(t) - \hat{L}_v(t)\dot{h}(t)| \\
&\leq \sup_{\mu \in [0,1]} \left\{ |L_u(t, \hat{x}(t) + \mu h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \mu \dot{h}(t), \theta(t)) - \hat{L}_u(t)||h(t)| + \right. \\
&\quad \left. + |L_v(t, \hat{x}(t) + \mu h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \mu \dot{h}(t), \theta(t)) - \hat{L}_v(t)\dot{h}(t)| \right\} \\
&\leq \sup_{\mu \in [0,1]} \{l(|\mu h(t)|^{p-1} + |\mu \dot{h}(t)|^{p-1})(|h(t)| + |\dot{h}(t)|)\} \\
&\leq l(|h(t)|^{p-1} + |\dot{h}(t)|^{p-1})(|h(t)| + |\dot{h}(t)|). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo Bổ đề 3.2 (i) ta có

$$\begin{aligned}
&l(|h(t)|^{p-1} + |\dot{h}(t)|^{p-1})(|h(t)| + |\dot{h}(t)|) \\
&= l(|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p) + l(|h(t)|^{p-1}|\dot{h}(t)| + |h(t)|^{p-1}|h(t)|) \\
&\leq l(|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p) + l(|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p)^{1/p} (|h(t)|^{(p-1)q} + |\dot{h}(t)|^{(p-1)q})^{1/q} \\
&= l(|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p) + l(|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p) \\
&= 2l(|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.11), (3.12) ta được

$$\begin{aligned} & |L(t, \hat{x}(t) + h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \dot{h}(t), \theta(t)) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \theta(t)) - \hat{L}_u(t)h(t) - \hat{L}_v(t)\dot{h}(t)| \\ & \leq 2l(|h(t)|^p + |\dot{h}(t)|^p). \end{aligned}$$

Do đó ta có

$$|J(\hat{x} + h, \theta) - J(\hat{x}, \theta) - f(\hat{x}, \theta)h| \leq 2l\|h\|_{1,p}^p.$$

Vì $p > 1$ nên từ bất đẳng thức đó ta suy ra (3.10). Ta chỉ còn phải chỉ ra rằng (3.9) nghiệm đúng. Lấy tùy ý $(x_1, \theta_1) \in X \times M$ và $(x_2, \theta_2) \in X \times M$. Áp dụng Bổ đề 3.2 và sử dụng giả thiết H_2), ta có

$$\begin{aligned} & |J_x(x_1, \theta_1)h - J_x(x_2, \theta_2)h| = |f(x_1, \theta_1)h - f(x_2, \theta_2)h| \\ & = \left| \int_a^b [L_u(t, x_1, \dot{x}_1, \theta_1)h - L_v(t, x_2, \dot{x}_2, \theta_2)h + L_v(t, x_1, \dot{x}_1, \theta_1)\dot{h} - L_v(t, x_2, \dot{x}_2, \theta_2)\dot{h}]dt \right| \\ & \leq \int_a^b |L_u(t, x_1, \dot{x}_1, \theta_1) - L_u(t, x_2, \dot{x}_2, \theta_2)||h|dt + \\ & \quad + \int_a^b |L_v(t, x_1, \dot{x}_1, \theta_1) - L_v(t, x_2, \dot{x}_2, \theta_2)||\dot{h}|dt \\ & \leq \int_a^b l(|x_1 - x_2|^{p-1} + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^{p-1} + |\theta_1 - \theta_2|^{p-1})|h|dt + \\ & \quad + \int_a^b l(|x_1 - x_2|^{p-1} + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^{p-1} + |\theta_1 - \theta_2|^{p-1})|\dot{h}|dt \\ & = \int_a^b l(|x_1 - x_2|^{p-1} + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^{p-1} + |\theta_1 - \theta_2|^{p-1})(|h| + |\dot{h}|)dt \\ & = \int_a^b \left\{ l(|x_1 - x_2|^{p-1})(|h| + |\dot{h}|) + l|\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^{p-1}(|h| + |\dot{h}|) + \right. \\ & \quad \left. + l(|\theta_1 - \theta_2|^{p-1})(|h| + |\dot{h}|) \right\} dt \\ & \leq l \int_a^b (|x_1 - x_2|^{(p-1)q} + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^{(p-1)q} + |\theta_1 - \theta_2|^{(p-1)q})^{1/q} (3(|h| + |\dot{h}|)^p)^{1/p} dt \end{aligned}$$

(Theo Bổ đề 3.2 i))

$$\begin{aligned}
&= l3^{1/p} \int_a^b (|x_1 - x_2|^p + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^p + |\theta_1 - \theta_2|^p)^{1/q} (|h| + |\dot{h}|) dt \\
&\leq l3^{1/p} \left(\int_a^b (|x_1 - x_2|^p + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^p + |\theta_1 - \theta_2|^p) dt \right)^{1/q} \left(\int_a^b (|h| + |\dot{h}|)^p dt \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

(Theo Bổ đề 3.2 iv))

$$\begin{aligned}
&\leq l3^{1/p} \left[\left(\int_a^b (|x_1 - x_2|^p + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^p) dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |\theta_1 - \theta_2|^p dt \right)^{1/q} \right] \times \\
&\quad \times \left(\int_a^b (|h| + |\dot{h}|)^p dt \right)^{1/p} \quad (\text{Theo Bổ đề 3.2 ii))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l3^{1/p} (||x_1 - x_2||_{1,p}^{p/q} + ||\theta_1 - \theta_2||_{1,p}^{p/q}) \left(\int_a^b (|h| + |\dot{h}|)^p dt \right)^{1/p} \\
&\leq l3^{1/p} 2^{1-1/p} (||x_1 - x_2||_{1,p}^{p/q} + ||\theta_1 - \theta_2||_{1,p}^{p/q}) \left(\int_a^b (|h| + |\dot{h}|)^p dt \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

(Theo Bổ đề 3.2 iii))

$$= k_1 (||x_1 - x_2||_{1,p}^{p/q} + ||\theta_1 - \theta_2||_{1,p}^{p/q}) ||h||_{1,p},$$

trong đó $k = l3^{1/p} 2^{1-1/p}$. Như vậy chúng ta đã chứng minh được rằng

$$|J_x(x_1, \theta_1)h - J_x(x_2, \theta_2)h| \leq k_1 (||x_1 - x_2||_{1,p}^{p/q} + ||\theta_1 - \theta_2||_{1,p}^{p/q}) ||h||_{1,p},$$

với mọi $h \in X$. Từ đây suy ra (3.9). Mệnh đề được chứng minh. \square

Mệnh đề 3.5. Dưới các giả thiết $H_1), H_2), H_3)$ tồn tại hằng số $\alpha > 0$ sao cho

$$\langle J_x(x_1, \theta) - J_x(x_2, \theta), x_1 - x_2 \rangle \geq \alpha ||x_1 - x_2||_{1,p}^p, \quad (3.13)$$

với mọi $x_1, x_2 \in X, \theta \in M$.

Chứng minh. Với mỗi $\theta \in M$ cố định, từ $H_3)$ suy ra rằng phiếm hàm $J(x, \theta)$ là lồi mạnh bậc p . Cụ thể là, chúng ta có

$$J(sx_1 + (1-s)x_2, \theta) \leq sJ(x_1, \theta) + (1-s)J(x_2, \theta) - \rho s(1-s) ||x_1 - x_2||_{1/p}^p \quad (3.14)$$

với mọi $x_1, x_2 \in X$, $s \in (0, 1]$, trong đó $\rho > 0$ là hằng số cho bởi H_3 .

Từ (3.14) suy ra rằng

$$\frac{1}{s}(J(x_2 + s(x_1 - x_2), \theta) - J(x_2, \theta)) \leq J(x_1, \theta) - J(x_2, \theta) - \rho(1 - s)\|x_1 - x_2\|_{1,p}^p. \quad (3.15)$$

Theo Mệnh đề 3.4, $J(x, \theta)$ là khả vi Frechet tại x_2 . Vì vậy cho $s \rightarrow 0$, từ (3.15) ta thu được

$$J_x(x_2, \theta)(x_1 - x_2) \leq J(x_1, \theta) - J(x_2, \theta) - \rho\|x_1 - x_2\|_{1,p}^p. \quad (3.16)$$

Thay đổi vai trò của x_1 và x_2 và lập luận tương tự như trên, ta thu được

$$J_x(x_1, \theta)(x_2 - x_1) \leq J(x_2, \theta) - J(x_1, \theta) - \rho\|x_2 - x_1\|_{1,p}^p. \quad (3.17)$$

Cộng các bất đẳng thức (3.16) và (3.17) về với về ta thu được

$$\langle J_x(x_1, \theta) - J_x(x_2, \theta), x_1 - x_2 \rangle \geq 2\rho\|x_1 - x_2\|_{1,p}^p$$

Đặt $\alpha = 2\rho$, ta có (3.13). Mệnh đề đã được chứng minh. \square

3.3. Chứng minh Định lý 3.1

Với mỗi cặp $(\theta, \lambda) \in M \times \Lambda$ cố định, xét bài toán $P(\theta, \lambda)$. Theo Mệnh đề 3.3, $K(\lambda)$ là tập con lồi đóng trong X . Do H_3 , tồn tại hằng số $\rho > 0$ sao cho (3.14) được thỏa mãn. Nói riêng ra, $J(\cdot, \theta)$ là một hàm lồi. Do đó $x = x(\theta, \lambda)$ là nghiệm của (3.4) khi và chỉ khi nó thỏa mãn bao hàm thức

$$0 \in J_x(x, \theta) + N_{K(\lambda)}(x). \quad (3.18)$$

Đặt $f(x, \theta) = J_x(x, \theta)$, ta thấy rằng $x = x(\theta, \lambda)$ là nghiệm của (3.18) khi và chỉ khi nó là nghiệm của bao hàm thức

$$0 \in f(x, \theta) + N_{K(\lambda)}(x). \quad (3.19)$$

Theo Mệnh đề 3.4 và Mệnh đề 3.5, tồn tại các hằng số $k_1 > 0$, $\alpha > 0$ sao cho

$$\|f(x_1, \theta_1) - f(x_2, \theta_2)\| \leq k_1(\|x_1 - x_2\|_{1,p}^{p/q} + \|\theta_1 - \theta_2\|_p^{p/q}), \quad (3.20)$$

$$\langle f(x_1, \theta) - f(x_2, \theta), x_1 - x_2 \rangle \geq \alpha \|x_1 - x_2\|_{1,p}^p, \quad (3.21)$$

với mọi $x_1, x_2 \in X$ và $\theta_1, \theta_2, \theta \in M$. Vì vậy, các điều kiện a), b), c) trong Định lý 2.10 được thỏa mãn. Mặt khác, theo Mệnh đề 3.3, $K(\cdot)$ là liên tục Lipschitz và do đó liên tục Aubin tại $(\bar{\lambda}, \bar{x})$. Do đó điều kiện d) trong Định lý 2.10 cũng được thỏa mãn. Theo Định lý 2.10, tồn tại các lân cận U, V và W tương ứng của $\bar{x}, \bar{\lambda}$ và $\bar{\theta}$ sao cho với mọi $(\theta, \lambda) \in W \times V$, bài toán (3.19) có nghiệm duy nhất $x = x(\theta, \lambda)$. Bên cạnh đó, $x(\bar{\theta}, \bar{\lambda}) = \bar{x}$ và hàm $(\theta, \lambda) \mapsto x(\theta, \lambda)$ là liên tục trên $W \times V$. Như vậy bài toán (3.4) có nghiệm duy nhất $x = x(\theta, \lambda)$ và hàm $x = x(\theta, \lambda)$ là liên tục trên $W \times V$.

Để nhận được (3.2) chúng ta sử dụng lược đồ chứng minh của Định lý 2.21 với một số thay đổi cần thiết. Lấy tùy ý $(\theta, \lambda), (\theta', \lambda') \in W \times V$. Vì $x(\theta, \lambda) \in K(\lambda) \cap U$, do tính chất Lipschitz của $K(\cdot)$ ta tìm được $z \in K(\lambda')$ sao cho

$$\|x(\theta, \lambda') - z\|_{1,p} \leq k_1 |\lambda - \lambda'|. \quad (3.22)$$

Tương tự, tồn tại $y \in K(\lambda)$ sao cho

$$\|x(\theta, \lambda') - y\|_{1,p} \leq k_1 |\lambda - \lambda'|. \quad (3.23)$$

Vì $x(\theta, \lambda), x(\theta, \lambda')$ tương ứng là nghiệm của các bao hàm thức

$$0 \in f(x, \theta) + N_{K(\lambda)}(x)$$

và

$$0 \in f(x, \theta) + N_{K(\lambda')}(x)$$

nên

$$\langle f(x(\theta, \lambda), \theta), y - x(\theta, \lambda) \rangle \geq 0 \quad (3.24)$$

và

$$\langle f(x(\theta, \lambda'), \theta), z - x(\theta, \lambda') \rangle \geq 0. \quad (3.25)$$

Từ (3.21), (3.24) và (3.25) ta có

$$\begin{aligned} \alpha \|x(\theta, \lambda) - x(\theta, \lambda')\|_{1,p}^p &\leq \langle f(x(\theta, \lambda), \theta) - f(x(\theta, \lambda'), \theta), x(\theta, \lambda) - x(\theta, \lambda') \rangle \\ &\leq \langle f(x(\theta, \lambda), \theta) - f(x(\theta, \lambda'), \theta), x(\theta, \lambda) - x(\theta, \lambda') \rangle + \\ &\quad \langle f(x(\theta, \lambda), \theta), y - x(\theta, \lambda) \rangle + \langle f(x(\theta, \lambda'), \theta), z - x(\theta, \lambda') \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle f(x(\theta, \lambda), \theta), y - x(\theta, \lambda') \rangle + \langle f(x(\theta, \lambda'), \theta), z - x(\theta, \lambda) \rangle \\
&\leq \|f(x(\theta, \lambda), \theta)\| \|y - x(\theta, \lambda')\|_{1,p} + \|f(x(\theta, \lambda'), \theta)\| \|z - x(\theta, \lambda)\|_{1,p}. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Từ tính liên tục của $f(\cdot, \cdot)$ (xem (3.20)) suy ra $f(\cdot, \cdot)$ bị chặn trên một lân cận của $(\bar{x}, \bar{\theta})$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $f(\cdot, \cdot)$ bị chặn trên một lân cận $U \times W$. Điều này có nghĩa là tồn tại hằng số $\eta > 0$ sao cho

$$\sup\{\|f(x, \theta)\| : x \in U, \theta \in W\} \leq \eta.$$

Do đó từ (3.26) ta có

$$\alpha \|x(\theta, \lambda) - x(\theta, \lambda')\|_{1,p}^p \leq \eta \|y - x(\theta, \lambda')\| + \eta \|z - x(\theta, \lambda)\|.$$

Kết hợp điều này với (3.22) và (3.23), ta được

$$\alpha \|x(\theta, \lambda) - x(\theta, \lambda')\|_{1,p}^p \leq 2\eta k_1 |\lambda - \lambda'|.$$

Đặt $l_0 = \left(\frac{2\eta k_1}{\alpha}\right)^{1/p}$ ta có

$$\|x(\theta, \lambda) - x(\theta, \lambda')\|_{1,p} \leq l_0 |\lambda - \lambda'|. \quad (3.27)$$

Bây giờ ta tiếp tục sử dụng kỹ thuật trên một lần nữa. Vì $x(\theta, \lambda'), x(\theta', \lambda')$ tương ứng là nghiệm của các bao hàm thức

$$0 \in f(x, \theta) + N_{K(\lambda)}(x)$$

và

$$0 \in f(x, \theta) + N_{K(\lambda')}(x)$$

nên

$$\langle f(x(\theta, \lambda'), \theta), x(\theta', \lambda') - x(\theta, \lambda') \rangle \geq 0 \quad (3.28)$$

và

$$\langle f(x(\theta', \lambda'), \theta'), x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda') \rangle \geq 0. \quad (3.29)$$

Do (3.20) nên

$$\|f(x(\theta', \lambda'), \theta) - f(x(\theta', \lambda'), \theta')\| \leq k_1 |\theta - \theta'|_p^{p/q}. \quad (3.30)$$

Kết hợp (3.21), (3.28) - (3.30) ta được

$$\alpha \|x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda')\|_{1,p}^p \leq \langle f(x(\theta, \lambda'), \theta) - f(x(\theta', \lambda'), \theta), x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda') \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\leq \langle f(x(\theta, \lambda'), \theta) - f(x(\theta', \lambda'), \theta), x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda') \rangle + \\
&\quad + \langle f(x(\theta, \lambda'), \theta), x(\theta', \lambda') - x(\theta, \lambda') \rangle + \langle f(x(\theta', \lambda'), \theta'), x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda') \rangle \\
&= \langle f(x(\theta', \lambda'), \theta') - f(x(\theta', \lambda'), \theta), x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda') \rangle \\
&\leq \|f(x(\theta', \lambda'), \theta') - f(x(\theta', \lambda'), \theta)\| \|x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda')\|_{1,p} \\
&\leq k_1 \|\theta - \theta'\|_p^{p/q} \|x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda')\|_{1,p}.
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\alpha \|x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda')\|_{1,p}^{p-1} \leq k_1 \|\theta - \theta'\|_p^{p/q}.$$

Do đó

$$\|x(\theta, \lambda') - x(\theta', \lambda')\|_{1,p} \leq \left(\frac{k_1}{\alpha}\right)^{1/p-1} \|\theta - \theta'\|_p^{p/q(p-1)} = l_1 \|\theta - \theta'\|_p, \quad (3.31)$$

trong đó $l_1 = \left(\frac{k_1}{\alpha}\right)^{1/p-1}$. Cuối cùng, bằng việc kết hợp (3.27) với (3.31) chúng ta có

$$\begin{aligned}
\|x(\theta', \lambda') - x(\theta, \lambda)\|_{1,p} &\leq \|x(\theta', \lambda') - x(\theta, \lambda')\|_{1,p} + \|x(\theta, \lambda') - x(\theta, \lambda)\|_{1,p} \\
&\leq l_1 \|\theta - \theta'\|_p + l_0 \|\lambda - \lambda'\|^{1/p}.
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 3.6. Giả sử rằng $X = W^{1,2}([0, 1], \mathbb{R})$, $M = L_2([0, 1], \mathbb{R})$ và $\Lambda = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Xét bài toán

$$P(\theta, \lambda) \quad \begin{cases} J(x, \theta) = \int_0^1 (x^2(t) + \dot{x}(t)^2 + 2t^3 \theta(t)(x(t) + \dot{x}(t))) dt \rightarrow \inf \\ x(0) = \lambda_1, \quad x(1) = \lambda_2. \end{cases}$$

Ta khẳng định các điều kiện $H_1) - H_3)$ được thỏa mãn. Thực vậy, vì

$$L(t, u, v, w) = u^2 + v^2 + 2t^3 w(u + v),$$

ta thấy ngay $H_1)$ được nghiệm đúng. Mặt khác, từ $L_u(t, u, v, w) = 2u + 2t^3 w$ và $L_v(t, u, v, w) = 2v + 2t^3 w$ suy ra rằng

$$|L_u(t, u, v, w) - L_u(t, u', v', w')| \leq 2(|u - u'| + |v - v'| + |w - w'|),$$

$$|L_v(t, u, v, w) - L_v(t, u', v', w')| \leq 2(|u - u'| + |v - v'| + |w - w'|),$$

với mọi $t \in [0, 1]$. Rõ ràng rằng H_2) thỏa mãn nếu ta chọn $\tilde{x}(t) \equiv 0$, $\tilde{y}(t) \equiv 0$, $\tilde{z}(t) \equiv 0$. Ta còn phải kiểm chứng H_3). Chú ý rằng, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ và $s \in [0, 1]$, ta có công thức

$$(sa + (1-s)b)^2 = sa^2 + (1-s)b^2 - s(1-s)(a-b)^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} L(t, su + (1-s)u', sv + (1-s)v', w) &= (su + (1-s)u')^2 + (sv + (1-s)v')^2 + \\ &\quad + 2t^3w(su + (1-s)u' + sv + (1-s)v') \\ &= su^2 + (1-s)u'^2 - s(1-s)(u-u')^2 + sv^2 + (1-s)v'^2 - s(1-s)(v-v')^2 + \\ &\quad + 2t^3w(su + sv + (1-s)(u' + v')) \\ &= s(u^2 + v^2 + 2t^3w(u+v)) + (1-s)(u'^2 + v'^2 + 2t^3w(u' + v')) - \\ &\quad - s(1-s)[(u-u')^2 + (v-v')^2] \\ &= sL(t, u, v, w) + (1-s)L(t, u', v', w') - s(1-s)[(u-u')^2 + (v-v')^2]. \end{aligned}$$

Vậy H_3) nghiệm đúng. Bây giờ ta đặt $\bar{\theta}(t) \equiv 0$, $\bar{\lambda} = \left(0, e - \frac{1}{e}\right)$. Khi đó ta có

$$P(\bar{\theta}, \bar{\lambda}) \quad \begin{cases} J(x, 0) = \int_0^1 (x^2(t) + \dot{x}(t)^2) dt \rightarrow \inf \\ x(0) = \lambda_1, \quad x(1) = e - \frac{1}{e}. \end{cases}$$

Nếu $P(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$ có nghiệm $\hat{x} \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ thì nghiệm này phải thỏa mãn phương trình Euler

$$\frac{d}{dt} L_v(t) = L_u(t)$$

hay $2\ddot{x} = 2x$. Bằng tính toán đơn giản, ta có thể chứng tỏ rằng $\hat{x}(t) = e^t - e^{-t}$ là nghiệm của phương trình Euler. Bây giờ ta chỉ ra rằng \hat{x} là nghiệm của $P(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$ trong $W^{1,2}([0, 1], \mathbb{R})$. Lấy tùy ý $x \in W^{1,2}([0, 1], \mathbb{R})$ và đặt $h = x - \hat{x}$ ta có $h(0) = h(1) = 0$ và $x = h + \hat{x}$. Do đó

$$J(x, 0) = J(\hat{x} + h, 0) = \int_0^1 [(\hat{x} + h)^2 + (\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (\hat{x}^2 + \dot{\hat{x}}^2) dt + \int_0^1 (h^2 + \dot{h}^2) dt + 2 \int_0^1 (h\hat{x} + \dot{h}\dot{\hat{x}}) dt \\
&\geq \int_0^1 (\hat{x}^2 + \dot{\hat{x}}^2) dt + 2 \int_0^1 (h\hat{x} + \dot{h}\dot{\hat{x}}) dt.
\end{aligned}$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần và đẳng thức $\ddot{x} = \hat{x}$, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\hat{x}^2 + \dot{\hat{x}}^2) dt + 2 \int_0^1 (h\hat{x} + \dot{h}\dot{\hat{x}}) dt \\
&= \int_0^1 (\hat{x}^2 + \dot{\hat{x}}^2) dt + 2 \int_0^1 (h\hat{x}) dt + 2\hat{x}h \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 (h\ddot{\hat{x}}) dt \\
&= \int_0^1 (\hat{x}^2 + \dot{\hat{x}}^2) dt + 2 \int_0^1 (h\hat{x}) dt - 2 \int_0^1 (h\hat{x}) dt \\
&= \int_0^1 (\hat{x}^2 + \dot{\hat{x}}^2) dt \\
&= J(\hat{x}, 0).
\end{aligned}$$

Do đó $J(x, 0) \geq J(\hat{x}, 0)$ với mọi $x \in W^{1,2}([0, 1], \mathbb{R})$. Vậy \hat{x} là nghiệm tối ưu toàn cục của $P(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$. Theo Định lý 3.1, tồn tại hằng số $l_0 > 0$, $l_1 > 0$, các lân cận U và W tương ứng của \hat{x} và $\bar{\theta}$, và lân cận V của $\bar{\lambda}$ sao cho với mọi $(\theta, \lambda) \in W \times V$, bài toán $P(\theta, \lambda)$ có nghiệm duy nhất $x = x(\theta, \lambda) \in U$. Ngoài ra, $x(\bar{\theta}, \bar{\lambda}) = \hat{x}$ và

$$\|x(\theta, \lambda) - x(\theta', \lambda')\|_{1,2} \leq l_1 \|\theta - \theta'\| + l_0 \|\lambda - \lambda'\|^{1/2}$$

với mọi $\theta, \theta' \in W$; $\lambda, \lambda' \in V$.

3.4. Kết luận

Trong chương này, chúng ta đã nghiên cứu bài toán biến phân cơ sở với nhiễu ở phiếm hàm dưới dấu tích phân và ở giá trị biên. Bằng cách đưa ra bài toán về bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số trong không gian Banach phản xạ,

chúng ta đã thiết lập được kết quả về tính liên tục kiểu Lipschitz-Hölder theo nhiều nghiệm của bài toán biến phân lỗi mạnh phụ thuộc tham số. Kết quả thu được có thể sử dụng để khảo sát những bài toán thường gặp trong thực tế.

KẾT LUẬN CHUNG

Trong luận văn này, chúng ta đã thu được một số kết quả sau:

1. Nhắc lại các kiến thức về không gian thường dùng (không gian metric, không gian định chuẩn, không gian Hilbert, không gian tôpô, không gian đối ngẫu), ánh xạ đa trị và một số tính chất, nhắc lại bài toán tối ưu.
2. Thiết lập một số điều kiện đủ cho tính liên tục và tính liên tục Hölder của nghiệm bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số trong không gian Banach phản xạ. Áp dụng các kết quả về độ nhạy nghiệm bất đẳng thức biến phân suy rộng để khảo sát độ nhạy nghiệm của các bài toán quy hoạch lồi phụ thuộc tham số trong không gian Banach phản xạ.
3. Nghiên cứu độ nhạy nghiệm của các bài toán biến phân phụ thuộc tham số và có được một số kết quả về tính liên tục kiểu Lipschitz - Hölder theo nhiều ở phiếm hàm dưới dấu tích phân và ở các giá trị biên của nghiệm của bài toán được xét.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

• Tài liệu tham khảo Tiếng Việt

1. Bùi Trọng Kiên (2002), *Độ nhạy nghiệm của bất đẳng thức biến phân và tính liên tục của phép chiếu metric*, Luận án Tiến sĩ Toán học.
2. Nguyễn Năng Tâm (2000), *Vấn đề ổn định trong các bài toán quy hoạch toàn phương*, Luận án Tiến sĩ Toán học.
3. Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

• Tài liệu tham khảo Tiếng Anh

4. R. A. Adams (1975), *Sobolev Spaces*, Academic Press, NewYork.
5. L. Cesari (1983), *Optimization Theory and Applications*, Springer - Verlag, Berlin.
6. F. H. Clarke (1989), *Method of Dynamic and Nonsmooth Optimization*, SIAM, Philadelphia.
7. A. L. Donchev and R. T. Rockafellar (1996), *Characterizations of strong regular - ity for variational inequalities over polyhedral convex sets*, SIAM Journal on Optimization 6, pp 1087 - 1105.
8. B. T. Kien (2001), *Solution sensitivity of generlized variational inequality*, Vietnam Journal of Mathematics, 29, pp 97 - 113.
9. A. B. Levy and R. A. Poliquin (1997), *Characterizing the single - valued-ness of multifuntions*, Set - Valued Analysis 5, pp 351 - 364.
10. J. Priip (1981), *A characterization of uniform convexity and applications to ac-cretive operrators*, Hiroshima Mathematical Journal 11, pp 229 - 234.
11. R. T. Rockafellar and R. J - B., Wets (1998), *Variational Analysis*, Springer - Verlag, NewYork.

12. E. Zeidler (1990), *Non-linear Monotone Operators*, Springer - Verlag, Berlin.
13. N. D. Yen (1995), *Hölder continuity of solutions to aparametric variational inequality*, Applied Mathematics and Optimization 31, pp 245 - 255.