

TD n° 5

Exercice1

Soit un système échantillonné de fonction de transfert :

$$G(z) = K \cdot \frac{1-a}{z-a}, \quad a = e^{-T_e/\tau}, \quad K=7, \quad T_e=0.05s, \quad \tau = 0.3s.$$

On choisit un correcteur : $C(z) = K_c \frac{z-z_0}{z-1}$ (forme d'un correcteur à 1/1 PI)

- 1- Quel est le rôle du pôle $z=1$?
- 2- Déterminer z_0 pour assurer la compensation du pôle de $G(z)$.
- 3- Déterminer $H(z)$, la fonction de transfert en boucle fermée et son gain statique.
- 4- Déterminer l'équation récurrente du correcteur, pour $K_c=0.3661$.
- 5- Calculer les erreurs, $\varepsilon_0(\infty)$ pour une entrée en échelon et $\varepsilon_1(\infty)$ pour une entrée en rampe de vitesse de 0.2 v/s.

Exercice2

On souhaite corriger le système asservi de transmittance en boucle ouverte

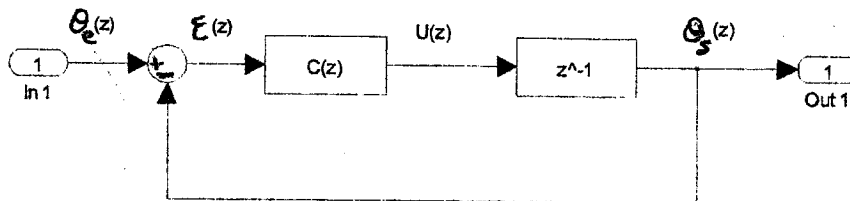
$$T(z) = \frac{1+0.718z^{-1}}{1-0.368z^{-1}}; \text{ la période d'échantillonnage } T_e = 0.1s.$$

Les performances souhaitées correspondent aux caractéristiques d'un système du second ordre : $\omega_0 = 10 \frac{rad}{s}$, $\gamma = 0.5$, erreur de position nulle. (c'est des données)

Exercice3

On considère l'asservissement de position, dans lequel la consigne (θ_e) et la sortie (θ_s) sont des grandeurs échantillonnées, la période d'échantillonnage $T_e=0.05$ s.

L'asservissement est constitué selon le schéma-bloc suivant :



Le calculateur, de transmittance $C(z)$, vérifie la relation : $u(k) = u(k-1) + K_c \cdot \varepsilon(k)$.

- 1- Déterminer $C(z)$.
- 2- Rechercher les valeurs de K_c correspondant à la limite de stabilité du système.

3- Pour une entrée en échelon : $\theta_e(k) = \theta_e$.

3.1-Exprimer $\varepsilon(z)$.

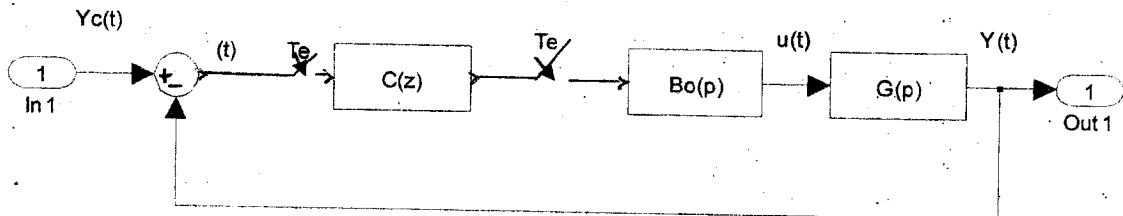
3.2- Établir l'allure temporelle de la réponse $\theta_s(k)$, pour $K_c=0.5$ et $K_c=1.5$.

4- On envisage d'implanter en cascade de $C(z)$ un correcteur de transmittance $C_1(z)$, de sorte que la FTBO corrigée puisse s'écrire : $G_c(z) = \frac{K_c(z-a)}{(z-1)^2}$

Calculer les valeurs de K_c et de a , pour assurer un comportement en boucle fermée d'un système du second ordre, présentant un amortissement $\zeta=0.8$ et une pulsation naturelle telle que $\omega_n T_e = 1$.

Exercice 4

Soit le système échantillonné suivant :



Où $Bo(p)$ est un bloqueur d'ordre zéro et le système est échantillonné avec une période $T_e = 0.4$ s. $G(p) = 1 / [(1+p)(1+2p)]$.

On désire effectuer une synthèse de l'asservissement à l'aide du correcteur $C(z)$ tel que le système en boucle fermée ait les caractéristiques suivantes :

- a- système précis en réponse à un échelon de consigne.
- b- erreur en vitesse égale à 0.4.
- c- système en boucle fermée du type second ordre avec des pôles continus équivalents égaux à -2 et -3.

--Proposer un régulateur $C(z)$ de type PID numérique permettant de vérifier le cahier de charges. Commenter le choix de ce régulateur.

Exo 1 :

$$C(z) = PI(z) = K_p + K_i \frac{z}{z-1} = \frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z-1}$$

$$\begin{cases} K_c = K_p + K_i \\ z_0 = \frac{K_i}{K_p + K_i} = (K_p + K_i) \left[z - \frac{K_p}{K_p + K_i} \right] \end{cases}$$

le rôle

non nul le npt plus près

$$C(z) = \frac{1}{G(z)}$$

$C(z)$ → ne gère pas les pôles de $G(z)$ / poles

$$\Rightarrow z_0 = a$$

$$C(z) = K_c \frac{z - z_0}{z - 1}$$

Corrigé de la série N°5 (Auto503)

Exo ①

soit $G(z) = K \frac{1-a}{z-a}$; $a = e^{-\frac{T_e}{T}}$; $K=7$, $T_e=0.05s$, $T=0.3s$.

la fonction de transfert du correcteur est donnée: $C(z) = K_c \frac{z-z_0}{z-1}$

① Le rôle du pôle $z=1$:

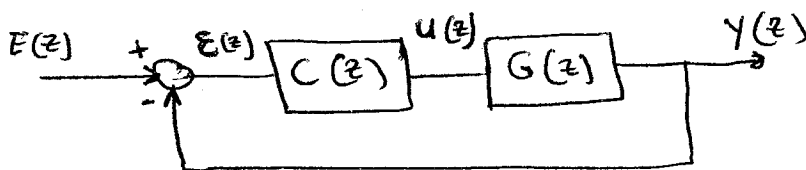
Le rôle de pôle $z=1$ du correcteur est destiné à assurer une intégration \rightarrow Il assure la précision parfaite du syst par rapport à une consigne. (erreur statique nulle).

② Détermination de z_0 du correcteur

Pour que le zéro du correcteur compense le pôle du processus, on choisit $\boxed{z_0 = a}$ (avec $a = \text{pôle du syst}$).

Alors: $C(z) = K_c \frac{z-a}{z-1}$ (correcteur de type PI) $\rightarrow PI(z) = K_p + K_i \frac{z}{z-1}$
 $= \frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z-1}$

③ Détermination de $H(z)$ fonction de transfert en BF



$\epsilon(z)$ = signal d'erreur
 $u(z)$ = signal de commande

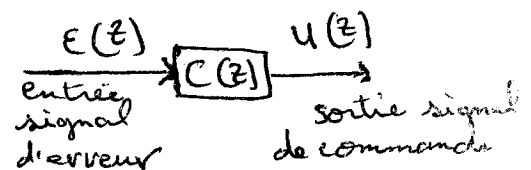
$$H(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{K \frac{1-a}{z-a} \cdot K_c \frac{z-a}{z-1}}{1 + K \frac{1-a}{z-a} \cdot K_c \frac{z-a}{z-1}} = \frac{KK_c (1-a) / (z-1)}{[(z-1) + KK_c (1-a)] / (z-1)}$$

$$H(z) = \frac{KK_c (1-a)}{z + (KK_c (1-a) - 1)} ; H_{BF}(z) \text{ présente un pôle } z = -(KK_c (1-a) - 1).$$

Le gain statique $K_s^{BF} = \lim_{z \rightarrow 1} H(z) = \frac{KK_c (1-a)}{1 + [KK_c (1-a) - 1]} = \frac{KK_c (1-a)}{KK_c (1-a)}$
 d'où $\boxed{K_s^{BF} = 1}$

④ L'équation récurrente du correcteur $C(z)$

$$C(z) = \frac{u(z)}{\epsilon(z)} = \frac{K_c (z-a)}{z-1} = \frac{K_c (1-a z^{-1})}{1-z^{-1}}$$



$$\epsilon(z) [K_c (1-a z^{-1})] = u(z) [1-z^{-1}]$$

$$K_c \epsilon(z) - a z^{-1} \epsilon(z) = u(z) - z^{-1} u(z)$$

$$\xrightarrow{Tz^{-1}} K_c E(k) - a E(k-1) = u(k) - u(k-1)$$

$$\Rightarrow u(k) = u(k-1) + K_c E(k) - a E(k-1) \rightarrow \text{équation récurrente}$$

• calcul des erreurs

$$\rightarrow E_0(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} E_0(kT_e) = E_p \text{ pour entrée échelon unité ; } E(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$E_0(\infty) = E_p = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{C(z) \cdot G(z)}_{\text{FTBO}}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} C(z) \cdot G(z)} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ (erreur de position)}$$

$$\rightarrow E_1(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} E_1(kT_e) = E_v \text{ pour entrée rampe de vitesse } 0,2 \text{ u/s}$$

$$E(k) = 0,2 k T_e \xrightarrow{z} E(z) = \frac{0,2 T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad \begin{array}{l} \text{pente} \\ e(t) = 0,2t \\ \rightarrow e(kT_e) = 0,2 k T_e \end{array}$$

$$E_1(\infty) = E_v = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 + C(z) \cdot G(z)} \cdot \frac{0,2 T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$E_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,2 T_e z^{-1}}{(1-z^{-1}) + (1-z^{-1}) C(z) \cdot G(z)} = \frac{0,2 T_e}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{-1}}{z} K K_c (1-a) / (z-1)}$$

$$E_v = \frac{0,2 T_e}{K K_c (1-a)} = c_{\text{te}}$$

EXO(2) (correction d'un syst asservi)

soit $T(z) \rightarrow$ FTBO du syst à corriger.

$$T(z) = \frac{1 + 0,718 z^{-1}}{1 - 0,368 z^{-1}} \quad ; \quad T_e = 0,1 \text{ s}$$

• Performances souhaitées en boucle fermée :

\rightarrow syst de type second ordre $\rightarrow \omega_0 = 10 \text{ rad/s}, \zeta = 0,7$

\rightarrow Erreur de position nulle.

• On choisit $C(z) = \frac{1}{T(z)}$ \rightarrow pour supprimer les pôles et les zéros.
la transmittance $T(z)$. (compensation des pôles et zéros stable de $T(z)$)

• l'erreur de position est nulle \rightarrow il faut ajouter un intégrateur

$$C(z) = \frac{1}{T(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

(2)

Il faut introduire les paramètres qui permettent de satisfaire le cahier des charges.

$$C(z) = \frac{1}{T(z)} \propto \frac{z}{z-1} \propto \frac{K_0}{z+B}$$

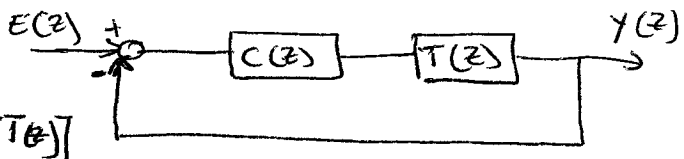
$$C(z) = \frac{1 - 0,368z^{-1}}{1 + 0,718z^{-1}} \propto \frac{z}{z-1} \propto \frac{K}{z+B}$$

la fonction transfert en BO :

$$C(z).T(z) = \frac{1 - 0,368z^{-1}}{1 + 0,718z^{-1}} \cdot \frac{z}{z-1} \propto \frac{K}{z+B} \cdot \frac{1 + 0,718z^{-1}}{1 - 0,368z^{-1}}$$

$$FT_{BO} = C(z).T(z) = \frac{Kz}{(z-1)(z+B)}$$

en boucle fermée



on a le dénominateur est $[1 + C(z)T(z)]$

$1 + C(z)T(z) = 0 \rightarrow$ est l'équation caractéristique de second ordre

$$1 + C(z)T(z) = 1 + \frac{Kz}{(z-1)(z+B)} = 0 \Rightarrow (z-1)(z+B) + Kz = 0$$

$$z^2 + (B-1+K)z - B = 0 \dots \textcircled{1}$$

~~$$z^2 + (B-1+KA)z - B = 0$$~~

car $\xi = 0,5 < 1 \Rightarrow$ le sys. en boucle fermée admet deux pôles complexes p_1 et \bar{p}_1

$$\begin{cases} p_1 \xrightarrow{e^{p_1 T_e}} e^{p_1 T_e} = z_1 \\ p_2 \xrightarrow{e^{p_2 T_e}} e^{p_2 T_e} = z_2 \end{cases}$$

en continu, l'équation caractéristique de second ordre est donnée :

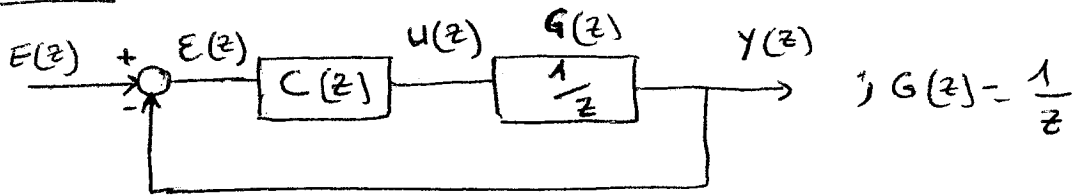
$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \\ p_2 = \bar{p}_1 = -\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \xrightarrow{z} \begin{cases} z_1 = e^{-\xi\omega_0 T_e + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} T_e} \\ z_2 = e^{-\xi\omega_0 T_e - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} T_e} \end{cases}$$

l'équation caractéristique imposée en boucle fermée est :

$$(z-z_1)(z-z_2) = z^2 - (z_1+z_2)z + z_1z_2$$

Exo(3)



$$U(k) = U(k-1) + K_c E(k) \quad \dots \text{--- (1)}$$

1) Détermination de $C(z)$

$$\textcircled{1} \xrightarrow{Tz} U(z) = z^{-1} U(z) + K_c E(z)$$

$$U(z)[1 - z^{-1}] = K_c E(z) \Rightarrow \boxed{\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c}{1 - z^{-1}} = C(z)} \text{ est FT de correcteur } C(z)$$

2) Recherche des valeurs de K_c à la limite de stabilité

$$FTBF(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{K_c z / z(z-1)}{1 + K_c z / z(z-1)} = \frac{K_c z}{z(z-1) + K_c z}$$

$$FTBF(z) = \frac{K_c}{z-1+K_c} = \frac{K_c}{z - (1-K_c)} = \frac{K_c}{z - z_i}$$

le syst est stable pour $|z_i| < 1$; $z_i = 1 - K_c$

le syst est à la limite de stabilité pour z_i se trouve sur le cercle unité $|z_i| = 1$

$$\text{d'où } |1 - K_c| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - K_c = 1 \\ \text{ou} \\ 1 - K_c = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_c = 0 \\ \text{ou} \\ K_c = 2 \end{cases}$$

3) Pour une entrée échelon $\theta_e(k) = \theta_e$

→ calcul de $E(z) \equiv$ erreur de position pour $E(z) = \theta_e(z) = \theta_e \frac{1}{1-z^{-1}}$ amplitude différente de 1

$$E_p = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + C(z)G(z)} \cdot \frac{\theta_e}{1 - z^{-1}}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\theta_e}{1 + \frac{K_c}{z-1}} = \frac{\theta_e}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_c}{z-1}} = \frac{\theta_e}{1 + \infty} = \frac{\theta_e}{\infty} = 0$$

3.2) l'allure temporelle de $\theta_s(k)$

Pour $K_c = 0,1$, $K_c = 1,1$

$$FTBF(z) = \frac{\theta_s(z)}{\theta_e(z)} = \frac{K_c}{z-1+K_c} = \frac{0,1}{z-0,1} = \frac{0,5 z^{-1}}{1 - 0,1 z^{-1}}$$

$$\theta_s(z) (1 - 0,5z^{-1}) = 0,5z^{-1} \theta_e(z)$$

$$\theta_s(z) - 0,5z^{-1} \theta_s(z) = 0,5z^{-1} \theta_e(z)$$

$$Tz^{-1} \rightarrow \theta_s(k) - 0,5\theta_s(k-1) = 0,5\theta_e(k-1)$$

équation
récurrente

$$\theta_s(k) = 0,5\theta_s(k-1) + 0,5\theta_e(k-1)$$

$$C.I \begin{cases} \theta_s(0) = 0 \\ \theta_e(0) = \theta_e ; \text{ posons } \theta_e = 1 \end{cases}$$

$$\theta_s(0) = 0$$

$$\theta_s(1) = 0,5\cancel{\theta_s(0)}^0 + 0,5\theta_e(0) = 0,5$$

$$\theta_s(2) = 0,5\theta_s(1) + 0,5\theta_e(1) = 0,25 + 0,5 = 0,75$$

$$\theta_s(3) = 0,5\theta_s(2) + 0,5\theta_e(2) = 0,875$$

$$\theta_s(4) = 0,5\theta_s(3) + 0,5\theta_e(3) = 0,9375$$

$$\theta_s(5) = 0,968 ; \theta_s(6) = 0,984 ; \theta_s(7) = 0,992 ; \theta_s(8) = 0,996$$

$$\theta_s(9) = 0,998$$

$$\theta_s(10) = 0,999$$

$$\theta_s(11) = 0,999$$

Pour $k_c = 1,5$

$$\theta_s(0) = 0 ; \theta_s(1) = 1,5 ; \theta_s(2) = 3,75 ; \theta_s(3) = 7,125 ; \theta_s(4) = 12,187$$

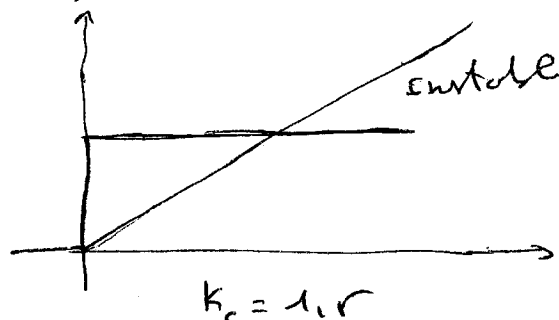
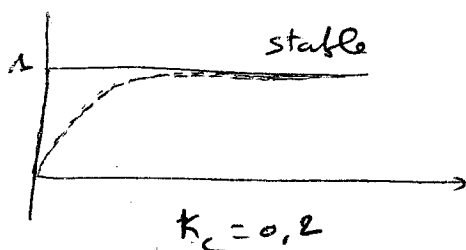
$$\theta_s(5) = 19,781 ; \theta_s(6) = 31,171 ; \theta_s(7) = 48,257$$

on remarque commence à se stabiliser à partir de $k=6$ pour

$$k_c = 0,2$$

et pour k_c le syst diverge, il n'atteint pas la stabilité

d'où l'augmentation du k_c , influence la stabilité du syst.



(6)

Suite de l'exo(3)

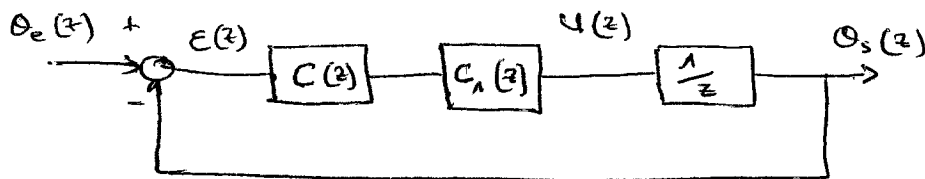
Question(4)

On ajoute en cascade de $C(z)$, un $C_1(z)$ de sorte que la FTBO corrigé puisse s'écrire: $G_c(z) = K_c \frac{z-a}{(z-1)^2}$

calcul de K_c et de a pour assurer un comportement en BF d'un syst de second ordre avec:

$\delta = 0,8$ (coéf d'amortissement).

$\omega_n T_e = 1 \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{T_e}$ (pulsation propre du syst)



$$FTBO(z) = C(z) \cdot C_1(z) \cdot G(z) = K_c \frac{z-a}{(z-1)^2}$$

en BF:

$$FTBF(z) = \frac{FTBO(z)}{1 + FTBO(z)}$$

Etude de l'équation caractéristique.

$$1 + FTBO(z) = 0 \Rightarrow 1 + K_c \frac{z-a}{(z-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (z-1)^2 + K_c(z-a) = 0$$

$$\Rightarrow z^2 - 2z + 1 + K_c z - K_c a = 0$$

$$\Rightarrow z^2 + (K_c - 2)z + 1 - K_c a = 0 \quad \text{--- (1)}$$

le syst en BF se comporte comme un syst d'ordre 2 $\Rightarrow (\delta, \omega_n | T_e)$

l'équation caractéristique imposée est donnée:

$$z^2 - 2e^{-\delta\omega_n T_e} \cos[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} T_e] z + e^{-2\delta\omega_n T_e} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

de (1) et (2) par identification \Rightarrow

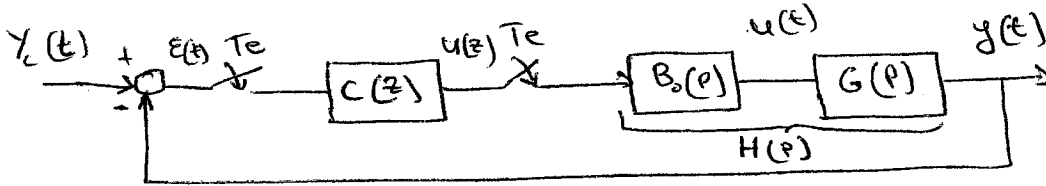
$$\begin{cases} K_c - 2 = -2e^{-\delta\omega_n T_e} \cos[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} T_e] \\ 1 - K_c a = e^{-2\delta\omega_n T_e} \end{cases}$$

A.N:

$$\Rightarrow \begin{cases} K_c - 2 = -0,9 \\ 1 - a K_c = 0,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_c = 1,1 \\ a = 0,72 \end{cases}$$

d'où : la fonction transfert corrigée $G_c = 1,1 \frac{z - 0,72}{(z - 1)^2}$

Exo 4



$$T_e = 0,4s, \quad G(p) = 1 / [(1+p)(1+2p)]$$

calcul de $H(z)$

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Tz \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

$$Tz \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\} = Tz \left\{ \frac{1/2}{p(p+1)(p+\frac{1}{2})} \right\} \rightarrow \text{méthode des Résidus}$$

Pour 3 pôles simples: $(\text{Res}_{p=0} + \text{Res}_{p=-1} + \text{Res}_{p=-\frac{1}{2}})$

$$\text{Res}_{p=0} = \frac{1}{(p+1)(p+\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \Big|_{p=0} = \frac{2z}{z-1}$$

$$\text{Res}_{p=-1} = \frac{1}{p(p+\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \Big|_{p=-1} = \frac{2z}{z - e^{-T_e}}$$

$$\text{Res}_{p=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p(p+1)} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \Big|_{p=-\frac{1}{2}} = -\frac{4z}{z - e^{-\frac{1}{2}T_e}}$$

$$Tz \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{2z}{z-1} + \frac{2z}{z - e^{-T_e}} - \frac{4z}{z - e^{-\frac{1}{2}T_e}} \right]$$

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \frac{1}{2} \left[\frac{2z}{z-1} + \frac{2z}{z - e^{-T_e}} - \frac{4z}{z - e^{-\frac{1}{2}T_e}} \right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \left[\frac{2z}{z-1} + \frac{2z}{z - e^{-T_e}} - \frac{4z}{z - e^{-\frac{1}{2}T_e}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 + \frac{2(z-1)}{z - e^{-T_e}} - \frac{4(z-1)}{z - e^{-\frac{1}{2}T_e}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2(z - e^{-T_e})(z - e^{-\frac{1}{2}T_e}) + 2(z-1)(z - e^{-\frac{1}{2}T_e}) - 4(z-1)(z - e^{-T_e})}{(z - e^{-T_e})(z - e^{-\frac{1}{2}T_e})} \right]$$