

Examen Final

Exercice 1 :(04 pts):

Soient A, B et C trois évènements d'un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) .

On pose $E_1 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.
2. Déterminer l'ensemble $E_1 \cup E_2$
3. On donne : $P(A)=0.6, P(A \cap B)=0.2, P(A \cap C)=0.1$ et $P(A \cap B \cap C)=0.05$
Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$

Exercice 2 :(04 pts):

Un joueur dispose d'un dé truqué, de telle sorte que:

$$P(\{1\})=P(\{6\})=\frac{1}{8}, P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{5\})=k, 0 < k < 1 \text{ et } P(\{4\})=\frac{3}{8}$$

On dispose de trois urnes notées A, B et C

L'urne A contient 3 jetons rouges et 3 jetons bleus

L'urne B contient 2 jetons bleus 2 jetons verts

L'urne C contient 1 jeton vert et 1 jeton rouge

Le jeu consiste à lancer le dé :

Si le joueur obtient un nombre premier, il tire 1 jeton de l'urne A

S'il obtient la face « 4 » il tire 1 jeton de l'urne B

Si non il tire 1 jeton de l'urne C

1. Calculer la constante k .
2. Est-il vrai que l'on a autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair ? Justifiez votre réponse.
3. Calculer la probabilité de tirer un jeton vert, en donnant la formule ou le théorème qui s'applique.
4. Si le joueur a tiré un jeton vert, quelle est la probabilité que le jeton provient de l'urne B ? Donnez le théorème que vous utilisez.

Problème :(12points)

Une étude menée par un groupe de la CASNOS, cherche à établir le lien pouvant exister entre l'âge de leurs clients (Y) et le nombre de fois où ils ont utilisé la carte CHIFA (X), durant une période.

Les résultats de l'enquête sont regroupés dans le tableau de contingence suivant :

Tournez la page

X \ Y	[25 , 35[[35 , 45[[45 , 55[[55 , 65]	
1	5	2	0	0	
2	3	7	0	0	
3	0	1	5	2	
4	0	0	2	3	

Partie A : (03 points) On s'intéresse au caractère X.

- 1- Quelle est la nature du caractère X ?
- 2- Donner la distribution marginale de X.
- 3- Quel est le pourcentage de clients ayant utilisés la carte CHIFA au moins trois fois durant cette période ?
- 4- Donner un intervalle qui contient 80% des valeurs centrales.
- 5- Calculer le nombre moyen d'utilisation de la carte.
- 6- Calculer la variance de X. (**Les calculs doivent être consignés dans un tableau**)

Partie B :(04 points) On s'intéresse au caractère Y.

- 1- Quelle est la nature du caractère Y.
- 2- Donner la distribution marginale de Y.
- 3- Calculer l'âge moyen des clients, calculer le mode et la médiane. Comparer ces trois valeurs.
- 4- La distribution est-elle symétrique ? Par quel paramètre peut-on le confirmer ?
- 5- Calculer la variance de Y. (**Les calculs doivent être consignés dans un tableau**)

Partie C: (05 points) On s'intéresse aux caractères X et Y.

- 1- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 2- Parmi les clients ayant utilisés la carte deux fois durant cette période, quel est le pourcentage de ceux qui sont âgés entre 35 ans et 45 ans?
- 3- Calculer la covariance entre X et Y. Déduire le coefficient de corrélation linéaire.
- 4- Un ajustement linéaire est-il justifié? Expliquez pourquoi.
- 5- Donner l'équation de la droite de régression de **Y en X**.
- 6- Donner une estimation de l'âge d'un client ayant utilisé sa carte CHIFA 5 fois durant cette période.

Bonne chance

Corrigé de l'examen Final 2022

Exercice 1 :(04 pts):

Soient A, B et C trois évènements d'un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) .

$$E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \text{ et } E_2 = A \cap (B \cup C)$$

$$E_1 = A \cap [B \cup C]^c$$

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles : On pose $D = B \cup C$

$$E_1 \cap E_2 = A \cap [B \cup C]^c \cap A \cap [B \cup C] = A \cap \overline{D} \cap A \cap D = \emptyset \quad (01)$$

2.

$$\begin{aligned} E_1 \cup E_2 &= [A \cap [B \cup C]^c] \cup [A \cap [B \cup C]] = (A \cap \overline{D}) \cup (A \cap D) \\ &= A \cap (\overline{D} \cup D) = A \end{aligned} \quad (01)$$

3. On donne : $P(A)=0.6, P(A \cap B)=0.2, P(A \cap C)=0.1$ et

$$P(A \cap B \cap C)=0.05$$

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(A \cap [B \cup C]^c) = P(A \cap \overline{D}) = P(A) - P(A \cap D) \\ &= P(A) - P[A \cap (B \cup C)] \\ &= P(A) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \quad (01) \\ &= 0.6 - 0.2 - 0.1 + 0.05 \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(A \cap [B \cup C]) = P(A \cap D) = P[A \cap (B \cup C)] \\ &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \quad (01) \\ &= 0.2 + 0.1 - 0.05 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

$$P(E_1) + P(E_2) = P(A) = 0.6$$

Exercice 2 :(04 pts):

Un joueur dispose d'un dé truqué, de telle sorte que:

$$P(\{1\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{8}, P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = k, \quad 0 < k < 1 \quad \text{et} \quad P(\{4\}) = \frac{3}{8}$$

On dispose de trois urnes notées A, B et C

L'urne A « 3R et 3B »

L'urne B « 2B et 2V »

L'urne C « 1V et 1R »

Si le joueur obtient $\{2, 3, 5\}$ il tire 1 jeton de l'urne A

S'il obtient la face $\{4\}$ il tire 1 jeton de l'urne B

S'il obtient la face $\{1,6\}$ il tire 1 jeton de l'urne C

1. La constante k .

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$\frac{1}{8} + 3k + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 3k + \frac{5}{8} = 1 \Rightarrow 3k = \frac{3}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{8} \quad (0.5)$$

2. Est-il vrai que l'on a autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair ? Justifiez votre réponse.

$$P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{5}{8} \quad (0.5)$$

La réponse est NON : La probabilité d'avoir un nombre pair est différente que celle d'avoir un nombre impair.

3. Calculer la probabilité de tirer un jeton vert, en donnant la formule ou le théorème qui s'applique.

$$V = V \cap \Omega = V \cap [A \cup B \cup C] = (V \cap A) \cup (V \cap B) \cup (V \cap C)$$

$\{A, B, C\}$ Forment un système complet

$$P(V) = P(A) P(V/A) + P(B) P(V/B) + P(C) P(V/C) :$$

La formule de la probabilité totale(01)

$$A : 3R, 3B : P(V/A) = 0 \quad P(A) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{3}{8}$$

$$B : 2R, 2V : P(V/B) = \frac{2}{4} \quad P(B) = P(\{4\}) = \frac{3}{8}$$

$$C : 1V, 1B : P(V/C) = \frac{1}{2} \quad P(C) = P(\{1\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(V) = P(A) P(V/A) + P(B) P(V/B) + P(C) P(V/C)$$

$$= \frac{3}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16} \quad (01)$$

4. Si le joueur a tiré un jeton vert, quelle est la probabilité que le jeton provient de l'urne B ? Donnez le théorème que vous utilisez.

$$P(B/V) = \frac{P(B) P(V/B)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{5} : \text{Formule de Bayes(01)}$$

Problème : (12points)**X** : Le nombre d'utilisation de la carte CHIFA**Y** : L'âge des clients

Les résultats de l'enquête sont regroupés dans le tableau de contingence suivant :

X \ Y	[25 , 35[[35 , 45[[45 , 55[[55 , 65]	$n_{i.}$
1	5	2	0	0	7
2	3	7	0	0	10
3	0	1	5	2	8
4	0	0	2	3	5
$n_{.j}$	8	10	7	5	30

Partie A : (03 points) On s'intéresse au caractère X.

- 1- La nature du caractère X : quantitatif discret.(0.5)
- 2- La distribution marginale de la variable X :

(0.5)

X	$n_{i.}$	$\tilde{n}_{i.}$	$n_{i.} x_i$	$n_{i.} x_i^2$
1	7	7	7	7
2	10	17	20	40
3	8	25	24	72
4	5	30	20	80
			<u>71</u>	<u>199</u>

- 3- Le pourcentage de clients ayant utilisés la carte CHIFA au moins trois fois durant cette période est: $P = \frac{8+5}{30} \cdot 100\% = 43\%$.(0.5)

- 4- un intervalle qui contient 80% des valeurs centrales : $[a, b]$

$$a = Q_{0.1} \cdot \alpha = 0.1, n \alpha = 3, a = \frac{x_3 + x_4}{2} = 1$$

$$b = Q_{0.9} \cdot \alpha = 0.9, n \alpha = 27, b = \frac{x_{27} + x_{28}}{2} = 4, [a, b] = [1, 4] \text{ (0.5)}$$

- 5- Le nombre moyen d'utilisation de la carte : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_{i.} x_i = \frac{71}{30} = 2.36$ (0.5)

- 6- La variance : $V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_{i.} x_i^2 - (\bar{X})^2 = \frac{199}{30} - (2.36)^2 = 1.06$.

$$\sigma_X = 1.02 \text{ (0.5)}$$

Partie B : (04 points) On s'intéresse au caractère Y.

- 1- La nature du caractère Y : Quantitatif continu(0.5)
- 2- La distribution marginale de Y :

(0.5)

Y	$n_{.j}$	$\tilde{n}_{.j}$	$n_{.j} \cdot y_j$	$n_{.j} \cdot y_j^2$
[25-35[<u>30</u>	8	8	240	7200
[35-45[<u>40</u>	10	18	400	16000
[45-55[<u>50</u>	7	25	350	17500
[55-65[<u>60</u>	5	30	300	18000
	30		<u>1290</u>	<u>58700</u>

3- L'âge moyen des clients : $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l n_{.j} y_j = \frac{1290}{30} = 43 \text{ ans} \text{ (0.5)}$

Le mode : $M_0 \in [35, 45[$, $M_0 = 35 + \frac{2}{2+3} \cdot 10 = 39 \text{ ans} : \text{(0.5)}$

La médiane : $Med \in [35, 45[$, $M_{ed} = 35 + \frac{15-8}{10} \cdot 10 = 42 \text{ ans} \text{ (0.5)}$

5. Les trois valeurs calculées : $M_0 < M_{ed} < \bar{Y}$.

On peut conclure que la distribution présente un étalement à droite.

On peut le confirmer par le coefficient d'asymétrie : $\delta = \frac{\mu_3(Y)}{\sigma_Y^3}$ Qui sera positif. (0.5)

6. La variance de Y : $V(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l n_{.j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = \frac{58700}{30} - (43)^2 = 107.66.$

$\sigma_Y = 10.37 \text{ (01)}$

Partie C: (05 points) On s'intéresse aux caractères X et Y.

1- $f_{11} = \frac{5}{30} \neq \frac{7}{30} \cdot \frac{8}{30} = f_{1.} \cdot f_{.1}$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes. (0.5)

2- $f_{Y \in [35, 45[/ X=2} = \frac{7}{10} = 0.7 \Rightarrow 70\%$ des clients ayant utilisés la carte deux fois durant cette période, sont âgés entre 35 ans et 45 ans. (0.5)

3- La covariance entre les variables X et Y :

X \ Y	[25-35[<u>30</u>	[35-45[<u>40</u>	[45-55[<u>50</u>	[55-65[<u>60</u>	$n_{i.}$
1	5 <u>150</u>	2 <u>80</u>	0	0	7
2	3 <u>180</u>	7 <u>560</u>	0	0	10
3	0	1 <u>120</u>	5 <u>750</u>	3 <u>360</u>	8
4	0	0	2 <u>400</u>	2 <u>720</u>	5
$n_{.j}$	8	10	7	5	<u>30</u>
					<u>3320</u>

$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j n_{ij} x_i y_j - \bar{X} \cdot \bar{Y} = \frac{3320}{30} - (2.36) \cdot (43) = 9.18. \text{ (02)}$

Le coefficient de corrélation linéaire : $r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.86$.(0.5)

Forte corrélation linéaire.

- 4- Un ajustement linéaire est donc justifié. Le coefficient de détermination est égal à $R = r^2(X, Y) = (0.86)^2 \approx 0.74$: donc 74% de la distribution est expliquée par le modèle de régression linéaire. (0.5)

- 5- L'équation de la droite de régression de Y en X : $Y = aX + b$

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{9.18}{1.06} = 8.66 \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X} = 22.56$$

L'équation de la droite de régression est : $Y = 8.66X + 22.56$ (0.5)

- 6- Une prédiction de l'âge du client ayant utilisé la carte 5 fois :
 $X = 5 \Rightarrow Y = 8.66(5) + 22.56 = 65.86 \approx 66 \text{ ans}$: (0.5)