

FÍSICA TEÓRICA

ELECTRODINÁMICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS

LANDAU^yLIFSHITZ

VOLÚMEN 8

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 8

**ELECTRODINÁMICA DE LOS
MEDIOS CONTINUOS**

L. D. LANDAU E. M. LIFSHITZ

Academia de Ciencias, U.R.S.S.

ELECTRODINÁMICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS

Volumen 8
del
CURSO DE FÍSICA TEÓRICA



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México - Rio de Janeiro

Título de la obra original:

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
СПЛОШНЫХ СРЕД**

Edición original en lengua rusa publicada por:

Fizmatgiz, Moscú

Versión española directamente del ruso por el:

Prof. Dr. Ramón Ortiz Fornaguera

Jefe de la División de Física Teórica de la
Junta de Energía Nuclear - Madrid

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A. Encarnación, 86. Barcelona (24)

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español

© **EDITORIAL REVERTÉ, S. A.. 1981**

Impreso en España Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4089 - 1

Depósito legal: B.29.132-1981

Márquez, S. A. - Ignacio Iglesias, 26 - Badalona (Barcelona)

ÍNDICE ANALÍTICO

PRÓLOGO	IX
NOTACIÓN	X
 CAPÍTULO I. ELECTROSTÁTICA DE LOS CONDUCTORES	 1
1. El campo electrostático de los conductores	1
2. Energía del campo electrostático de los conductores	4
3. Métodos de resolución de los problemas de electrostática	11
4. Eliposoide conductor	24
5. Fuerzas que actúan sobre un conductor	36
 CAPÍTULO II. ELECTROSTÁTICA DE LOS DIELECTRICOS	 43
6. Campo electrostático en los dieléctricos	43
7. La permitividad	45
8. Elipsoide dieléctrico	50
9. Permitividad de una mezcla	55
10. Relaciones termodinámicas para los dieléctricos en un campo eléctrico ...	57
11. Energía libre total de un dieléctrico	62
12. Electrostricción de los dieléctricos isótropos	66
13. Propiedades dieléctricas de los cristales	70
14. Carácter positivo de la susceptibilidad eléctrica	75
15. Fuerzas eléctricas en un dieléctrico líquido	77
16. Fuerzas eléctricas en los sólidos	82
17. Cuerpos piezoeléctricos	88
18. Desigualdades termodinámicas	95
19. Medios ferroeléctricos	100
 CAPÍTULO III. CORRIENTE CONTINUA	 111
20. Densidad de corriente y conductibilidad	111
21. Efecto Hall	116
22. Diferencia de potenciales de contacto	119
23. Elementos galvánicos	122
24. Electrocapilaridad	124
25. Fenómenos termoeléctricos	125
26. Fenómenos de difusión eléctrica	132

CAPÍTULO IV. CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE	135
27. Campo magnético constante	135
28. Simetría magnética de los cristales	138
29. Campo magnético de las corrientes continuas	143
30. Relaciones termodinámicas en un campo magnético	151
31. Energía libre total de una sustancia magnética	154
32. Energía de un sistema de corrientes	156
33. Autoinductancia de los conductores lineales	162
34. Fuerzas en un campo magnético	168
35. Fenómenos giromagnéticos	172
CAPÍTULO V. FERROMAGNETISMO	175
36. Cuerpos ferromagnéticos cerca del punto de Curie	175
37. Energía de anisotropía magnética	178
38. Magnetostricción de los cuerpos ferromagnéticos	186
39. Estructura en dominios de los ferromagnéticos	189
40. Punto de Curie antiferromagnético	197
CAPÍTULO VI. SUPERCONDUCTIBILIDAD	199
41. Propiedades magnéticas de los superconductores	199
42. Corrientes en superconductores	202
43. El campo crítico	206
44. El estado intermedio	212
CAPÍTULO VII. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO CUASISTACIONARIO	221
45. Corrientes de Foucault	221
46. Efecto pelicular	232
47. Resistencia compleja	234
48. Capacidad en el circuito de una corriente cuasistacionaria	239
49. Movimiento de un conductor en un campo magnético	244
50. Excitación de corrientes por aceleración	250
CAPÍTULO VIII. MAGNETOHIDRODINÁMICA	253
51. Ecuaciones del movimiento de un líquido en un campo magnético	253
52. Ondas magnetohidrodinámicas	259
53. Discontinuidades tangenciales y rotacionales	266
54. Ondas de choque	272
55. Campo magnético espontáneo en el movimiento turbulento de un líquido conductor	278
CAPÍTULO IX. LAS ECUACIONES DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	285
56. Ecuaciones del campo en los dieléctricos cuando no existe dispersión	285
57. Electrodinámica de los dieléctricos en movimiento	289
58. Dispersión de la permitividad	295
59. Permitividad para muy altas frecuencias	298
60. Dispersión de la permeabilidad	299

61. Energía del campo en los medios dispersores	301
62. Relación entre las partes real e imaginaria de $\epsilon(\omega)$	305
63. Onda monocromática plana	312
64. Medios transparentes	316
CAPÍTULO X. PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	319
65. Óptica geométrica	319
66. Reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas	322
67. Impedancia superficial de los metales	331
68. Propagación de las ondas en un medio no homogéneo	337
69. Principio de reciprocidad	341
70. Oscilaciones electromagnéticas en resonadores huecos	343
71. Propagación de las ondas electromagnéticas en las guías de onda	347
72. Dispersión de las ondas electromagnéticas por pequeñas partículas	355
73. Absorción de las ondas electromagnéticas por pequeñas partículas	359
74. Difracción por una cuña	360
75. Difracción por una pantalla plana	365
CAPÍTULO XI. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN MEDIOS ANISÓTROPOS	369
76. La permitividad de los cristales	369
77. Onda plana en un medio anisótropo	371
78. Propiedades ópticas de los cristales uniáxicos	378
79. Cristales biáxicos	382
80. Doble refracción en un campo eléctrico	387
81. Fenómenos dinamo-ópticos	388
82. Efectos magneto-ópticos	389
83. Actividad óptica natural	397
CAPÍTULO XII. PASO DE PARTÍCULAS RÁPIDAS A TRAVÉS DE LA MATERIA	405
84. Pérdidas de energía por ionización para partículas rápidas en la materia. Caso no relativista	405
85. Pérdida de energía de las partículas rápidas por ionización en la materia. Caso relativista	411
86. Radiación de Cherenkov	419
CAPÍTULO XIII. FLUCTUACIONES ELECTROMAGNÉTICAS	423
87. Fluctuaciones de la corriente en los circuitos lineales	423
88. Fluctuaciones del campo electromagnético	424
89. La radiación del cuerpo negro en un medio transparente	431
90. Fuerzas de atracción molecular entre sólidos	433
CAPÍTULO XIV. DISPERSIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	441
91. Teoría general de la dispersión en medios isótropos	441
92. El principio del equilibrio detallado en la dispersión	448
93. Dispersión con un pequeño cambio de frecuencia	451
94. Dispersión de Rayleigh en gases y líquidos	453

VIII

Índice analítico

95. Opalescencia crítica	460
96. Dispersión en cuerpos sólidos amorfos	462
CAPÍTULO XV. DIFRACCIÓN DE LOS RAYOS X EN LOS CRISTALES	467
97. Teoría general de la difracción de los rayos X	467
98. Intensidad integral	474
99. Dispersión térmica difusa de los rayos X.....	478
APÉNDICE. COORDENADAS CURVILÍNEAS.....	481
ÍNDICE ALFABÉTICO	485

PRÓLOGO

El volumen presente, Curso de Física Teórica, comprende la teoría de los campos magnéticos con las de la electricidad y las propiedades magnéticas de los materiales. Estas teorías encierran un amplio campo de conocimientos como puede comprobarse en el Índice Analítico.

Al escribir este libro se nos presentaron considerables dificultades, particularmente por la necesidad de seleccionar en el extenso campo de esta Ciencia y también porque la exposición usual de muchos tópicos que deben incluirse, no poseen la claridad necesaria y son generalmente incorrectos. Reconocemos que nuestro trabajo adolece todavía de muchos defectos que trataremos de remediar en las ediciones futuras.

Agradecemos al Profesor V. L. Ginzburg que leyó el manuscrito de este libro y nos proporcionó comentarios sumamente útiles. A I. E. Dzyaloshinskiĭ y L. P. Pitaevskiĭ que nos corrigieron la edición rusa.

Gracias son también debidas al Dr. Sykes y al Dr. Bell que no solamente ayudaron a la ardua tarea de traducir el libro sino que nos proporcionaron algunos comentarios útiles concernientes a su contenido.

L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ

NOTACIONES

Campo eléctrico	\mathbf{E}	
Inducción eléctrica	\mathbf{D}	
Campo magnético	\mathbf{H}	
Inducción magnética	\mathbf{B}	
Campo eléctrico externo	\mathcal{E}	
Campo magnético externo	\mathcal{H}	
Polarización dieléctrica	\mathbf{P}	
Magnetización	\mathbf{M}	
Momento eléctrico total de un cuerpo	\mathcal{P}	
Momento magnético total de un cuerpo	\mathcal{M}	
Permitividad eléctrica	ϵ	
Permitividad magnética	μ	
Densidad de corriente	\mathbf{j}	
Conductividad	σ	
Temperatura absoluta (en unidades de energía)	T	
Cantidades termodinámicas:	por unidad de volumen	para un cuerpo
entropía	S	\mathcal{S}
energía interna	U	\mathcal{U}
energía libre	F	\mathcal{F}
potencial termodinámico	Φ	\mathcal{P}
Potencial químico	ζ	
Un factor de tiempo periódico complejo se toma siempre como $e^{-i\omega t}$.		

Se aplica siempre la regla de la suma con relación a los índices de los vectores y de los tensores tridimensionales (letras latinas) y bidimensionales (letras griegas) repitiéndose dos veces.

CAPÍTULO 1

ELECTROSTÁTICA DE LOS CONDUCTORES

§ 1. El campo electrostático de los conductores

El objeto de la electrodinámica macroscópica es el estudio de los campos electromagnéticos en el espacio ocupado por la materia. Como cualquier otra teoría macroscópica, la electrodinámica opera con magnitudes físicas promediadas en elementos de volumen «infinitamente pequeños físicamente», sin que interesen las fluctuaciones microscópicas de estas magnitudes que están ligadas con la estructura molecular de la materia. Así, en vez del verdadero valor «microscópico» de la intensidad del campo eléctrico e consideraremos su valor medio, designándolo por

$$\bar{e} = E. \quad (1.1)$$

Las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica de los medios continuos se obtienen promediando la ecuaciones del campo electromagnético en el vacío. El primero en realizar este paso de las ecuaciones microscópicas a las macroscópicas fue H. A. Lorentz.

La forma de las ecuaciones de la electrodinámica macroscópica, como también el sentido de las magnitudes que en ellas aparecen, dependen de manera esencial de la naturaleza física del medio material al igual que del carácter del cambio del campo con el tiempo. Por ello, resulta razonable deducir y estudiar estas ecuaciones para cada categoría de objetos físicos por separado.

Como es sabido, en relación con sus propiedades eléctricas los cuerpos se clasifican en dos categorías, *conductores* y *dieléctricos*, distinguiéndose los primeros de los segundos por el hecho de que cualquier campo eléctrico provoca en los conductores el movimiento de cargas, es decir, la aparición de *corrientes eléctricas**.

Comenzaremos por el estudio de los campos eléctricos constantes creados por conductores cargados (es decir, por la *electrostática de los conductores*). De la propiedad fundamental de los conductores se sigue, ante todo, que en el caso electrostático la intensidad del campo eléctrico dentro de ellos debe ser igual a cero.

* Sin embargo, es necesario advertir que un conductor se supone aquí homogéneo (en lo que concierne a su composición, temperatura, etc.). En un conductor no homogéneo, conforme veremos más adelante, pueden existir campos que no determinan el movimiento de las cargas.

En efecto, una intensidad \mathbf{E} no nula conduciría a la aparición de una corriente; por otra parte, la propagación de una corriente en un conductor trae consigo una disipación de energía y, en consecuencia, no puede por sí misma (sin que existan fuentes exteriores de energía) mantenerse en estado estacionario.

De aquí se sigue, a su vez, que todas las cargas en un conductor deben estar distribuidas por su superficie: la existencia de cargas en un volumen de conductor conduciría inmediatamente a la aparición de un campo eléctrico en él*; en cambio, la distribución de las cargas por la superficie puede efectuarse de manera tal que los campos creados por ellas dentro del conductor se compensen entre sí.

De esta manera, el problema que se plantea la electrostática de los conductores queda reducido a determinar un campo eléctrico en el vacío, fuera de los conductores, y a la distribución de las cargas sobre la superficie de los mismos.

En puntos no demasiado próximos a la superficie de un cuerpo, el campo medio \mathbf{E} en el vacío coincide de hecho con el verdadero campo \mathbf{e} . Estas dos magnitudes difieren una de otra solamente en la inmediata proximidad del cuerpo, donde todavía se manifiesta la influencia de los campos irregulares de las moléculas. Esta última circunstancia, con todo, no se refleja en la forma de las ecuaciones de los campos promediadas. Las ecuaciones microscópicas exactas de Maxwell en el vacío se escriben:

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -(1/c) \partial \mathbf{h} / \partial t, \quad (1.3)$$

(\mathbf{h} es la intensidad microscópica del campo magnético). Dado que se supone que el valor medio del campo magnético es igual a cero, también se anula la derivada $\partial \mathbf{h} / \partial t$ como resultado de efectuar el promedio y encontramos que un campo eléctrico constante en el vacío satisface las ecuaciones ordinarias

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1.4)$$

es decir, se trata de un campo que deriva de un potencial ϕ ligado con la intensidad de aquél por la relación

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi, \quad (1.5)$$

y que satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta \phi = 0. \quad (1.6)$$

Las condiciones de contorno para el campo \mathbf{E} sobre la superficie del conductor se siguen de la propia ecuación $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ que es válida [al igual que la ecuación de partida (1.3)] tanto en el interior como fuera del cuerpo. Elijamos el eje z de modo que coincida con la normal a la superficie del conductor en uno de sus puntos. La componente E_z del campo en la inmediata proximidad de la superficie del cuerpo

* Esto se ve claramente en la ecuación (1.8) que se deduce más adelante.

alcanza valores muy grandes (debido a que en ella la diferencia de potenciales no es nula en puntos «infinitamente» próximos). La existencia de este campo muy intenso constituye una propiedad de la superficie misma y depende de sus propiedades físicas, pero nada tiene que ver con el problema electrostático que estamos considerando, puesto que dicho campo disminuye rápidamente ya a distancias comparables con las interatómicas. Es esencial, sin embargo, el hecho de que si la superficie es homogénea, las derivadas $\partial E_z/\partial x$, $\partial E_z/\partial y$ sobre ella se conservan finitas a pesar de que E_z tiende a infinito. En consecuencia, de $(\text{rot } \mathbf{E})_x = \partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z = 0$, se sigue que $\partial E_y/\partial z$ es finita. Esto significa que E_y es una función continua sobre la superficie (ya que un salto de E_y significaría que su derivada $\partial E_y/\partial z$ sería igual a infinito). Lo mismo vale para E_x , y dado que dentro del conductor es $\mathbf{E} = 0$ en cualquier punto, llegamos a la conclusión de que las componentes tangenciales del campo exterior sobre la superficie de aquél deben anularse:

$$\mathbf{E}_t = 0. \quad (1.7)$$

Así pues, un campo electrostático ha de ser normal a la superficie del conductor en cada uno de sus puntos. Dado que $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$, esto significa que el potencial del campo debe ser constante sobre toda la superficie de cada conductor dado. En otras palabras, la superficie de un conductor homogéneo es una superficie equipotencial del campo electrostático.

En cuanto a la componente del campo normal a la superficie, su valor está ligado de una manera muy simple con la densidad de carga distribuida sobre ella. Esta relación se obtiene a partir de la ecuación general electrodinámica $\text{div } \mathbf{e} = 4\pi\rho$ que después de promediar nos da

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}, \quad (1.8)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad media de carga. En su forma integral esta ecuación significa, como es sabido, que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga total que se encuentra en el volumen limitado por esta superficie (multiplicada por 4π). Aplicando este teorema al elemento de volumen limitado por dos superficies de área unidad infinitamente próximas colocadas a uno y otro lado de la superficie del conductor, y teniendo en cuenta que en la superficie interior es $\mathbf{E} = 0$, se encuentra que $E_n = 4\pi\sigma$, donde σ es la densidad superficial de carga, es decir, la carga por unidad de área de la superficie del conductor. De esta manera, la distribución de las cargas en la superficie de un conductor viene determinada por la fórmula

$$4\pi\sigma = E_n = -\partial\phi/\partial n, \quad (1.9)$$

(la derivada del potencial se toma en el sentido de la normal exterior a la superficie). La carga total del conductor vale

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial\phi}{\partial n} df, \quad (1.10)$$

donde la integral se extiende a toda su superficie.

La distribución del potencial en todo el campo electrostático posee la siguiente notable propiedad: la función $\phi(x, y, z)$ puede alcanzar valores máximos o mínimos tan sólo sobre las fronteras del dominio ocupado por el campo. Este teorema puede formularse también diciendo que es imposible el equilibrio estable de una carga de prueba e introducida en el campo, puesto que no existe punto alguno en el cual su energía potencial $e\phi$ presente un mínimo.

La demostración del teorema es muy sencilla. Supongamos, por ejemplo, que en un cierto punto A (que no se encuentra en la frontera del campo) el potencial tuviera un máximo. Entonces sería posible rodear el punto A por una superficie cerrada tan pequeña que sobre ella la derivada respecto de la normal fuera $\partial\phi/\partial n < 0$.

En consecuencia, también la integral extendida a esta superficie sería $\int \frac{\partial\phi}{\partial n} df < 0$.

Pero, en virtud de la ecuación de Laplace, $\oint (\partial\phi/\partial n) df = \int \Delta\phi dV = 0$, contra lo supuesto.

§ 2. Energía del campo electrostático de los conductores

Calculemos la energía total \mathcal{U} del campo electrostático determinado por conductores cargados*

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad (2.1)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen del espacio fuera de los conductores. Transformemos esta integral de la siguiente forma:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \text{grad } \phi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}(\phi \mathbf{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int \phi \text{div } \mathbf{E} dV.$$

La segunda integral se anula en virtud de (1.4) y la primera se transforma en una integral extendida a las superficies de los conductores que limitan el campo y a una superficie infinitamente alejada. Pero esta última integral es igual a cero debido a la suficientemente rápida disminución del campo en el infinito. Numerando los conductores mediante el índice a y designando los valores constantes del potencial sobre cada una de sus superficies por ϕ_a , obtendremos**,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \sum_a \oint \phi E_n df = \frac{1}{8\pi} \sum_a \phi_a \oint E_n df.$$

* El cuadrado E^2 no coincide con el valor medio $\overline{e^2}$ del cuadrado del campo real cerca de la superficie del conductor ni tampoco en el volumen de este último (donde $E = 0$, pero, claro está, $e^2 \neq 0$). Al calcular la integral (2.1) prescindimos así tanto de la energía interna del conductor como tal, que no nos interesa, como de la energía de afinidad de las cargas hacia la superficie.

Finalmente, introduciendo las cargas totales de los conductores e_a de acuerdo con (1.10), se obtiene la expresión final

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi_a, \quad (2.2)$$

análoga a la expresión de la energía de un sistema de cargas puntuales.

Las cargas y los potenciales de los conductores no pueden darse a la vez de manera arbitraria; entre unas y otros existe una determinada relación. En virtud del carácter lineal y homogéneo de las ecuaciones del campo en el vacío, esta relación debe ser también lineal, es decir, debe expresarse por igualdades de la forma

$$e_a = \sum_b C_{ab} \phi_b. \quad (2.3)$$

donde las magnitudes C_{aa} , C_{ab} tienen las dimensiones de una longitud y dependen de la forma y posición relativa de los conductores en el espacio. Las magnitudes C_{aa} se llaman *coeficientes de capacidad*, y las magnitudes C_{ab} ($a \neq b$), *coeficientes de inducción electrostática*. En particular, si hay un solo conductor, se tendrá $e = C\phi$, donde C es la *capacidad*; el orden de magnitud de una capacidad coincide con el de las dimensiones lineales del cuerpo. Las relaciones inversas, que dan los potenciales en función de las cargas, se escriben:

$$\phi_a = \sum_b C^{-1}_{ab} e_b, \quad (2.4)$$

donde los coeficientes C^{-1}_{ab} constituyen una matriz que es la inversa de la matriz de los coeficientes C_{ab} .

Calculemos la variación de la energía de un sistema de conductores al variar infinitamente poco sus cargas o sus potenciales. Variando la expresión de partida (2.1), tenemos $\delta\mathcal{U} = (1/4\pi) \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{E} dV$. Es posible transformar esta expresión siguiendo dos métodos equivalentes. Haciendo $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ y teniendo en cuenta que el campo variado, al igual que el de partida, satisface las ecuaciones (1.4) (de modo que $\text{div } \delta\mathbf{E} = 0$), escribiremos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \phi \cdot \delta\mathbf{E} dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div } (\phi \delta\mathbf{E}) dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_a \phi_a \oint \delta E_n df, \end{aligned}$$

o finalmente

$$\delta\mathcal{U} = \sum_a \phi_a \delta e_a, \quad (2.5)$$

** Al transformar una integral de volumen en una de superficie hay que tener en cuenta, tanto aquí como en lo que sigue, que E_n es la componente del campo en el sentido de la normal exterior con referencia al conductor; esta dirección orientada es opuesta a la de la normal exterior respecto del dominio de integración, es decir, del espacio exterior a los conductores. Debido a ello se ha cambiado el signo de la integral en la transformación.

es decir, hemos obtenido el cambio de la energía expresado en función de la variación de las cargas. Este resultado, por lo demás, era evidente a priori en tanto que es igual al trabajo que es necesario efectuar sobre las cargas infinitamente pequeñas δe_a para llevarlas a los conductores dados desde el infinito, donde el potencial del campo es igual a cero.

Por otra parte, se puede escribir

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{U} &= -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \text{grad } \delta\phi \, dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div} (\mathbf{E} \delta\phi) \, dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_a \delta\phi_a \oint E_n \, df,\end{aligned}$$

o bien,

$$\delta \mathcal{U} = \sum_a e_a \delta\phi_a, \quad (2.6)$$

que da la variación de la energía expresada en función del cambio de los potenciales de los conductores.

Las fórmulas (2.5), (2.6) prueban que, al derivar la energía \mathcal{U} respecto de las cargas, obtenemos los potenciales de los conductores, y que las derivadas de \mathcal{U} respecto de los potenciales nos dan los valores de las cargas:

$$\partial \mathcal{U} / \partial e_a = \phi_a, \quad \partial \mathcal{U} / \partial \phi_a = e_a. \quad (2.7)$$

Por otra parte, los potenciales y las cargas son funciones lineales unos de otras. Mediante (2.3), podemos escribir $\partial^2 \mathcal{U} / \partial \phi_a \partial \phi_b = \partial e_b / \partial \phi_a = C_{ba}$, e invirtiendo el orden de derivación obtendríamos C_{ab} . De aquí se sigue que

$$C_{ab} = C_{ba}, \quad (2.8)$$

(y análogamente $C_{ab}^{-1} = C_{ba}^{-1}$). La energía \mathcal{U} puede representarse como forma cuadrática respecto de los potenciales o de las cargas:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab} \phi_a \phi_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C^{-1}_{ab} e_a e_b. \quad (2.9)$$

Esta forma cuadrática, como la expresión de partida (2.1), debe ser definida positiva. De esta condición se siguen determinadas desigualdades a las que deben satisfacer los coeficientes C_{ab} . En particular, todos los coeficientes de capacidad son positivos:

$$C_{aa} > 0 \quad (2.10)$$

(y también $C^{-1}_{aa} > 0$)*.

Por el contrario todos los coeficientes de inducción electrostática son negativos:

$$C_{ab} < 0 \quad (a \neq b). \quad (2.11)$$

* Indicaremos asimismo que entre las condiciones que impone el carácter definido positivo de la fórmula (2.9) figuran también las desigualdades $C_{aa}C_{bb} > C_{ab}^2$.

Esta circunstancia resulta ya evidente a partir de las simples consideraciones que siguen. Imaginemos que todos los conductores salvo uno (el a -ésimo) están conectados a tierra, es decir, sus potenciales son nulos. Entonces la carga inducida por el conductor cargado a -ésimo sobre otro conductor cualquiera b , es igual a $e_b = C_{ba}\phi_a$. Es claro que el signo de la carga inducida ha de ser opuesto al signo del potencial inductor y, por ello, $C_{ab} < 0$. De manera más rigurosa cabe cerciorarse de que así es partiendo del hecho de que el potencial de un campo electrostático no puede alcanzar valores máximos o mínimos fuera de los conductores. Supongamos, por ejemplo, que el potencial del único conductor no conectado a tierra es $\phi_a > 0$. Entonces el potencial será también positivo en todo el espacio, de modo que su valor mínimo (igual a cero) se alcance solamente sobre los conductores derivados a tierra. Se sigue de aquí que sobre la superficie de éstos la derivada normal del potencial $\partial\phi/\partial n$ será positiva y su carga, según (1.10), negativa.

Mediante consideraciones análogas puede verse que $C_{ab}^{-1} > 0$.

La energía del campo electrostático de los conductores posee determinada propiedad extremal que, a decir verdad, tiene un carácter más bien formal que físico. Para deducirla supongamos que la distribución de las cargas en los conductores se somete a una variación infinitamente pequeña (sin cambiar la carga total de cada uno de ellos), como consecuencia de la cual las cargas pueden incluso penetrar en el conductor; al proceder así, ignoramos el hecho de que, en realidad, una tal distribución de cargas no puede ser estacionaria. Consideremos la correspondiente variación de la integral

$$\mathcal{U} = (1/8\pi) \int E^2 dV,$$

que hay que suponer ahora extendida a todo el espacio, incluyendo el ocupado por los propios conductores (dado que después del desplazamiento de las cargas el campo \mathbf{E} será, en general, distinto de cero también dentro de los conductores). Hagamos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \phi \cdot \delta\mathbf{E} dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{div} (\phi \delta\mathbf{E}) dV + \frac{1}{4\pi} \int \phi \text{div } \delta\mathbf{E} dV. \end{aligned}$$

La primera integral, una vez transformada en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada, resulta ser igual a cero. En la segunda, tenemos $\text{div } \delta\mathbf{E} = 4\pi\delta\rho$ en virtud de la ecuación (1.8), de modo que

$$\delta\mathcal{U} = \int \phi \delta\rho dV$$

Pero esta integral se anula si ϕ corresponde al verdadero campo electrostático: en este caso, dentro de cada conductor se tiene $\phi = \text{const}$ y las integrales $\int \delta\rho dV$ extendidas a sus volúmenes son nulas, puesto que las cargas totales de los conductores siguen siendo las mismas.

De esta manera, la energía del campo electrostático real es mínima* comparada

* No presentaremos aquí los simples razonamientos que demuestran que se trata precisamente de un mínimo, y no de un extremo en general.

con la energía de los campos que se podrían crear por cualesquiera otras distribuciones de cargas en el volumen o sobre la superficie de los conductores (*teorema de Thomson*).

De este teorema se deduce, en particular, el siguiente corolario: la introducción de un conductor no cargado en el campo creado por cargas dadas (por conductores cargados) disminuye la energía total del campo. Para verlo basta comparar la energía del campo real que se establece después de introducir el conductor, con la energía del campo ficticio en que no existen cargas inducidas sobre el conductor introducido. La primera, al ser la mínima posible, es menor que la segunda, que a su vez coincide con la energía del campo inicial (dado que de no existir cargas inducidas, el campo «penetraría» dentro del conductor sin cambio alguno). Este resultado se puede formular también de otra manera: un conductor no cargado colocado lejos de un sistema de cargas dadas es atraído hacia el mismo.

Finalmente, cabe demostrar que un conductor (cargado o no cargado) introducido en un campo electrostático no puede en modo alguno encontrarse en equilibrio estable bajo la acción de fuerzas eléctricas exclusivamente. Esta afirmación generaliza el teorema análogo mencionado al final del párrafo que precede para una carga puntual y puede obtenerse aplicando a la vez dicho teorema y el teorema de Thomson; no nos detendremos en presentar aquí el desarrollo del razonamiento.

Las fórmulas (2.9) son útiles para el cálculo de la energía de un sistema de conductores que se encuentran a distancias finitas uno de otro. Sin embargo, exige consideración especial en el caso de un conductor no cargado que se halla en un campo homogéneo exterior \mathfrak{E} , campo que cabe imaginar creado por cargas situadas en el infinito. Según (2.2), esta energía es igual $\mathcal{U} = \frac{1}{2} e\phi$, donde e es la carga muy alejada que crea el campo y ϕ el potencial del campo que determina el conductor considerado en el punto en que se encuentra la carga e (de \mathcal{U} se ha excluido la energía de la carga e en su propio campo en tanto que nada tiene que ver con la energía del conductor, que es lo que nos interesa). La carga del conductor es igual a cero, pero bajo la acción del campo exterior adquiere un momento eléctrico dipolar que designaremos por \mathcal{P} . El potencial del campo de un dipolo eléctrico a una distancia r grande del mismo es igual, como es sabido, a $\phi = \mathcal{P} \cdot \mathbf{r} / r^3$. Por consiguiente,

$$\mathcal{U} = e\mathcal{P} \cdot \mathbf{r} / 2r^3$$

Pero $e\mathbf{r}/r^3$ es, al mismo tiempo, la intensidad \mathfrak{E} del campo creado por la carga e . Así, pues,

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} \mathcal{P} \cdot \mathfrak{E}. \quad (2.12)$$

En virtud del carácter lineal de todas las ecuaciones del campo, es evidente que las componentes del momento dipolar \mathcal{P} son funciones lineales de las componentes de la intensidad \mathfrak{E} . Los coeficientes de proporcionalidad entre \mathcal{P} y \mathfrak{E} tienen las dimensiones del cubo de una longitud y, por ello, son proporcionales al volumen del conductor:

$$\mathcal{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \quad (2.13)$$

donde los coeficientes α_{ik} dependen solamente de la forma del cuerpo. El conjunto de las magnitudes $V\alpha_{ik}$ constituye un tensor que se puede llamar *tensor polarizabilidad* del cuerpo. Este tensor es simétrico: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (la demostración se da en el § 11). De acuerdo con esto, la energía (2.12) se representa en la forma:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} V \alpha_{ik} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_k. \quad (2.14)$$

PROBLEMAS

1. Expresar la capacidad mutua C del sistema de dos conductores (con cargas $\pm e$) en función de los coeficientes C_{ab} .

Solución. La *capacidad mutua* de dos conductores se define como coeficiente en la igualdad $e = C(\phi_2 - \phi_1)$, y la energía del sistema se expresa en función de C mediante $\mathcal{U} = e^2/2C$. Comparando con (2.9), obtendremos:

$$\begin{aligned} 1/C &= C^{-1}_{11} - 2C^{-1}_{12} + C^{-1}_{22} \\ &= (C_{11} + 2C_{12} + C_{22})/(C_{11}C_{22} - C_{12}^2). \end{aligned}$$

2. Una carga puntual e se ha colocado en un punto O cerca de un sistema de conductores derivados a tierra e induce sobre ellos cargas e_a . Si no existiera la carga e y uno de los conductores (el a -ésimo) tuviese un potencial ϕ'_a (manteniendo los restantes conectados a tierra), el potencial del campo en el punto O sería ϕ'_0 . Expresar las cargas e_a en función de ϕ'_a y ϕ'_0 .

Solución. Si las cargas e_a sobre los conductores comunican a éstos los potenciales ϕ_a , y las cargas e'_a , los potenciales ϕ'_a , de (2.3) se sigue entonces que

$$\sum_a \phi_a e_a = \sum_{a,b} \phi_a C_{ab} \phi'_b = \sum_a \phi'_a e_a.$$

Apliquemos esta relación a dos estados del sistema formado por todas las cargas y la carga puntual e (considerando esta última como caso límite de un conductor de dimensiones pequeñas). En un estado, la carga e no es nula, los conductores tienen las cargas e_a y sus potenciales son $\phi_a = 0$. En el otro estado, la carga $e = 0$ y uno de los conductores tienen un potencial $\phi'_a \neq 0$. Obtendremos entonces $e\phi'_0 + e_a\phi'_a = 0$, de donde

$$e_a = -e\phi'_0/\phi'_a.$$

Por ejemplo, si la carga e se encuentra a la distancia r del centro de una esfera conductora, derivada a tierra, de radio a ($r > a$), se tendrá $\phi'_0 = \phi'_a a/r$ y la carga inducida sobre ella será

$$e_a = -ea/r.$$

He aquí otro ejemplo. Supongamos que la carga e se encuentra entre dos esferas concéntricas, derivadas a tierra, de radios a y b (a una distancia r del centro, $a < r < b$). Si la esfera exterior está conectada a tierra y la interior se carga hasta un potencial ϕ'_a el potencial a la distancia r será igual a

$$\phi'_0 = \phi'_a \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}.$$

Así pues, la carga inducida por la carga e sobre la esfera interior es igual a

$$e_a = -ea(b-r)/r(b-a).$$

Análogamente, la carga inducida sobre la esfera exterior vale

$$e_b = -eb(r-a)/r(b-a).$$

3. Dos conductores cuyas capacidades son C_1 y C_2 se han colocado a una distancia r uno de otro, distancia que es grande comparada con sus propias dimensiones. Determinar los coeficientes C_{ab} .

Solución. Si el conductor 1 posee la carga e_1 y el conductor 2 no está cargado, en primera aproximación se tiene $\phi_1 = e_1/C_1$, $\phi_2 = e_1/r$, prescindiendo de las variaciones del campo en el conductor 2 y de su polarización. De esta manera, $C_{11}^{-1} = 1/C_1$, $C_{12}^{-1} = 1/r$ y, análogamente, $C_{22}^{-1} = 1/C_2$. De aquí se siguen los coeficientes C_{ab} *:

$$C_{11} = C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right), \quad C_{12} = -\frac{C_1 C_2}{r}, \quad C_{22} = C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right).$$

4. Determinar la capacidad C de un anillo formado por un conductor fino de sección circular (radio del anillo b , radio de la sección del conductor a ; $b \gg a$).

Solución. Dada la pequeñez de la sección del anillo, el campo cerca de su superficie coincide con el campo creado por la misma carga distribuida a lo largo de la línea de los centros de las secciones (esto sería exacto para un cilindro recto). Por ello, el potencial del propio anillo vale

$$\phi_a = \frac{e}{2\pi b} \oint \frac{dl}{r},$$

donde r es la distancia del punto dado de la superficie del anillo hasta el elemento dl de su línea de centros, a lo largo de la cual se efectúa la integración. Descompongamos la integral en dos partes según sea $r < \Delta$ o $r > \Delta$, donde Δ es una distancia tal que $a \ll \Delta \ll b$. Entonces, cuando $r < \Delta$ se puede considerar como rectilíneo el segmento de anillo, por lo cual

$$\int_{\Delta > r} \frac{dl}{r} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + a^2}} \cong 2 \ln(2\Delta/a).$$

En cambio, en la región en que $r > \Delta$ es posible prescindir del grosor del conductor, es decir, considerar r simplemente como la distancia entre dos puntos de la línea de centros del anillo. En estas condiciones,

$$\int_{r > \Delta} \frac{dl}{r} = 2 \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{b d\phi}{2b \sin \frac{1}{2}\phi} = -2 \ln \operatorname{tg} \frac{1}{4}\phi_0,$$

donde ϕ es el ángulo central correspondiente a la cuerda r y el límite inferior de integración se determina a partir de $2b \sin(\phi_0/2) = \Delta$, de donde $\phi_0 \cong \Delta/b$. Al sumar estas dos componentes de la integral desaparece la cantidad Δ y para la capacidad del anillo obtenemos, en definitiva, el valor $C = e/\phi_a$ dado por la siguiente expresión:

$$C = \frac{e}{\phi_a} = \frac{\pi b}{\ln(8b/a)}.$$

* Los términos siguientes del desarrollo son en general de orden superior en una unidad (respecto de $1/r$) a los aquí escritos. Sin embargo, si se interpreta r como distancia entre los «centros de carga» de uno y otro cuerpo (en el caso de esferas, la distancia entre sus centros geométricos), el orden de magnitud de los términos siguientes será superior en dos unidades.

§ 3. Métodos de resolución de los problemas de electrostática

Los métodos generales para la resolución de la ecuación de Laplace dadas las condiciones de contorno sobre determinadas superficies se estudian en el correspondiente capítulo de la física matemática y no figura entre nuestros fines exponerlos en detalle. Aquí nos limitaremos solamente a indicar algunos de los métodos más simples y a la resolución de toda una serie de problemas típicos que poseen un interés de por sí*.

1. *El método de las imágenes.* La determinación del campo creado por una carga puntual e situada fuera de un medio conductor que ocupa un semiespacio, es uno de los ejemplos más simples de aplicación del llamado método de las imágenes. La idea de este método consiste en elegir un número de cargas puntuales suplementarias ficticias tales que, junto con la carga dada, creen un campo para el cual la superficie del conductor dado coincida con una de las superficies equipotenciales del campo. En el caso en cuestión, esto se consigue introduciendo una carga ficticia $e' = -e$ colocada en un punto que represente la imagen reflejada del punto e sobre el plano frontera del medio conductor. El potencial del campo de la carga e y de su «imagen» e' es igual a

$$\phi = e \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \quad (3.1)$$

donde r y r' son las distancias del punto de observación a las cargas e y e' . Sobre el plano frontera, $r = r'$ y el potencial tiene el valor constante $\phi = 0$, de modo que la condición de contorno necesaria se cumple efectivamente y (3.1) da la solución del problema planteado. Obsérvese que la carga e es atraída hacia el conductor con una fuerza $e^2/(2a)^2$ (fuerza de la imagen; a es la distancia del plano a la carga), y que la energía de interacción es igual a $-e^2/4a$.

La distribución de las cargas superficiales sobre el plano frontera, cargas inducidas por la carga puntual e , viene dada por la fórmula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{r=r'} = -\frac{e}{2\pi} \frac{a}{r^3}. \quad (3.2)$$

Es fácil comprobar que la carga total sobre dicho plano es igual a

$$\int \sigma df = -e,$$

como debe ser.

La carga total inducida por otras cargas sobre un conductor inicialmente privado de carga es igual, claro está, a cero. Por ello, si en el caso dado el medio con-

* Las soluciones de un número considerablemente mayor de problemas más complicados se pueden encontrar en los libros de W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, 2.^a ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1950, y en el de G. A. Grinberg, *Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskij i magnitnyj iavlenij* (Temas seleccionados de la teoría matemática de los fenómenos eléctricos y magnéticos.) Izd. AN SSSR, 1948.

ductor (de hecho, un conductor de grandes dimensiones) está aislado, hay que imaginar que, al mismo tiempo que se induce la carga $-e$, se induce la carga $+e$, que, sin embargo, encontrándose distribuida por toda la superficie de un cuerpo de gran tamaño posee una densidad insignificante.

Consideremos ahora el problema más complicado relativo al campo creado por una carga puntual e que se encuentra cerca de un conductor esférico. Para resolver este problema utilizaremos el siguiente resultado que es fácil comprobar mediante un cálculo directo. El potencial del campo creado por dos cargas puntuales e y $-e'$ es

$$\phi = e/r - e'/r',$$

y se anula sobre la superficie de una esfera de radio R cuyo centro se encuentra sobre la prolongación del segmento que une las cargas e y $-e'$ y a distancias l y l' de estos puntos tales que l, l', R satisfacen las igualdades

$$l/l' = (e/e')^2, \quad R^2 = ll'.$$

Supondremos primero que el conductor esférico se mantiene a un potencial constante $\phi = 0$ (esfera derivada a tierra). Entonces, el campo creado fuera de la esfera por la carga puntual e que se encuentra a una distancia l del centro de la misma (en el punto A de la fig. 1) coincidirá con el campo que determina el sistema de dos cargas, la carga dada e y la carga ficticia $-e'$, colocada dentro de la esfera (en A') a una distancia l' de su centro, siendo

$$l' = R^2/l, \quad e' = eR/l. \quad (3.3)$$

El potencial de este campo es

$$\phi = \frac{e}{r} - \frac{eR}{lr'}, \quad (3.4)$$

(r, r' se representan en la fig. 1). Sobre la superficie de la esfera se induce en estas condiciones una carga total diferente de cero e igual a $-e'$. La energía de interacción de la carga con la esfera resulta igual a

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} ee'/(l-l') = -\frac{1}{2} e^2 R/(l^2 - R^2), \quad (3.5)$$

y la carga es atraída hacia la segunda con una fuerza

$$F = -\partial \mathcal{U} / \partial l = -e^2 l R / (l^2 - R^2)^2$$

En cambio, si la esfera conductora se mantiene en condiciones de carga total nula (esfera aislada sin carga) hay que introducir una carga ficticia más, de tal modo que la carga total inducida sobre la superficie de la esfera resulta ser cero sin que deje de cumplirse la condición de que el potencial sobre dicha superficie sea constante. Esto se consigue colocando una carga $+e'$ en el centro de la esfera. El potencial del campo que se busca viene entonces determinado por la fórmula

$$\phi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r_0}. \quad (3.6)$$

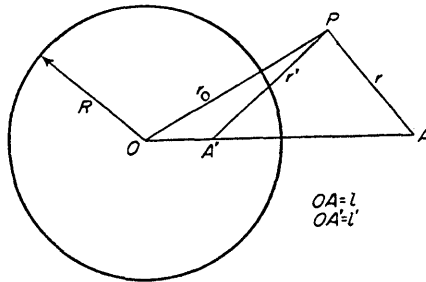


FIG. 1

La energía de interacción será en este caso

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} ee' \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l-l'} \right) = -\frac{e^2 R^3}{2l^2(l^2 - R^2)}. \quad (3.7)$$

Finalmente, si la carga e se encuentra en una cavidad esférica situada en un medio conductor (en el punto A' de la fig. 1), el campo en el interior de la cavidad coincide con el que determinaría la carga e y su «imagen» en el punto A fuera de la esfera (con independencia de que el conductor esté aislado o conectado a tierra):

$$\phi = \frac{e}{r'} - \frac{eR}{l'r}. \quad (3.8)$$

2. *El método de la inversión.* Existe un método sencillo que en muchos casos permite resolver un problema electrostático cuando se conoce la solución de otro. Este método se basa en el hecho de que la ecuación de Laplace es invariante respecto de un determinado cambio de variables.

En coordenadas esféricas la ecuación de Laplace tiene la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \phi = 0,$$

donde se ha designado por Δ_{Ω} la parte angular del operador de Laplace. Es fácil comprobar que esta ecuación conserva su forma si en vez de la variable r se introduce una nueva variable r' definida por

$$r = R^2/r' \quad (3.9)$$

(esta transformación se llama *inversión*) y a la vez se substituye la función incógnita ϕ por otra ϕ' de acuerdo con

$$\phi = r' \phi' / R. \quad (3.10)$$

R es aquí una cierta constante cuyas dimensiones son las de una longitud (*radio de inversión*). Así pues, si la función $\phi(\mathbf{r})$ satisface a la ecuación de Laplace, también la función

$$\phi'(\mathbf{r}') = R \phi(R^2 \mathbf{r}' / r'^2) / r' \quad (3.11)$$

será solución de dicha ecuación.

Supongamos que conocemos la solución del problema de determinar el campo electrostático creado por un sistema de conductores, que se encuentran todos a un mismo potencial ϕ_0 , y por un sistema de cargas puntuales. El potencial $\phi(\mathbf{r})$ se determina de ordinario de manera que se anule en el infinito. Aquí, sin embargo, determinaremos $\phi(\mathbf{r})$ de modo que en el infinito tienda a $-\phi_0$; entonces sobre los conductores se tendrá $\phi = 0$.

Veamos ahora qué problema electrostático se resolverá mediante la función transformada (3.11). Ante todo, se cambian las formas de todos los conductores no puntuales y sus posiciones relativas. La condición de contorno de que el potencial sea constante sobre sus superficies queda satisfecha automáticamente, ya que para $\phi = 0$ será también $\phi' = 0$. A continuación se cambian las posiciones y los valores de todas las cargas puntuales. La carga que se encuentra en el punto \mathbf{r}_0 pasa a ocupar el punto $\mathbf{r}'_0 = (R^2/r_0^2)\mathbf{r}_0$ y toma el valor e' que se puede determinar de la siguiente manera. Cuando $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$, el potencial $\phi(\mathbf{r})$ tiende a infinito según la ley $\phi = e/|\delta\mathbf{r}|$, donde $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Por otra parte, diferenciando la igualdad $\mathbf{r} = (R^2/r'^2)\mathbf{r}'$ se encuentra que los valores absolutos de las distancias infinitesimales $\delta\mathbf{r}$ y $\delta\mathbf{r}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0$ están ligados entre sí por la relación

$$(\delta\mathbf{r})^2 = R^4(\delta\mathbf{r}')^2/r_0'^4.$$

En consecuencia, cuando $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}'_0$ la función ϕ' tenderá a infinito como

$$eR/r'_0|\delta\mathbf{r}| = er'_0/R|\delta\mathbf{r}'|,$$

lo que corresponde a una carga

$$e' = er'_0/R = eR/r_0. \quad (3.12)$$

Finalmente, consideremos el comportamiento de la función $\phi'(\mathbf{r}')$ cerca del origen de coordenadas. Al punto $\mathbf{r}' = 0$ corresponde $\mathbf{r} \rightarrow \infty$. Mas para $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ la función $\phi(\mathbf{r})$ tiende a $-\phi_0$. Por lo tanto, cuando $\mathbf{r}' \rightarrow 0$ la función ϕ' tenderá a infinito de acuerdo con la ley

$$-R\phi_0/r'$$

Esto significa que en el punto $\mathbf{r}' = 0$ se encuentra la carga $e_0 = -R\phi_0$.

Con carácter informativo indicaremos aquí cómo se transforman en la inversión algunas figuras geométricas. Una superficie esférica de radio a con centro en el punto \mathbf{r}_0 viene dada por la ecuación

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = a^2$$

Aplicando la inversión, obtenemos la ecuación

$$([R^2\mathbf{r}'/r'^2] - \mathbf{r}_0)^2 = a^2$$

que después de multiplicarla por r'^2 y de agrupar los términos convenientemente se puede reducir a la forma

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)^2 = a'^2,$$

donde

$$\mathbf{r}'_0 = -R^2\mathbf{r}_0/(a^2 - r_0^2), \quad a' = aR^2/|a^2 - r_0^2|. \quad (3.13)$$

De esta manera, obtenemos de nuevo una esfera, aunque de otro radio a' y con centro en el punto r'_0 . Si la esfera primitiva pasaba por el origen de coordenadas ($a = r_0$), se tendrá $a' = \infty$; en este caso la esfera se transforma en un plano perpendicular a la dirección de r_0 y que pasa a una distancia

$$r'_0 - a' = R^2/(a + r_0) = R^2/2a$$

del origen de coordenadas.

3. *El método de la representación conforme.* Un campo que depende sólo de las dos coordenadas cartesianas (x, y) se llama *campo plano* o *bidimensional*. Un poderoso instrumento para resolver problemas planos de electrostática lo ofrece la teoría de las funciones de variable compleja. Los fundamentos para la aplicación de esta teoría pueden resumirse como sigue.

Un campo electrostático en el vacío satisface dos ecuaciones: $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ y $\text{div } \mathbf{E} = 0$. La primera de ellas permite introducir el potencial del campo de acuerdo con $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$. En cambio, la segunda ecuación muestra que, junto con ϕ , cabe introducir también una *potencial vector* del campo, \mathbf{A} , definido por $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}$. En el caso de un problema en el plano, el vector \mathbf{E} se encuentra en el plano xy y depende solamente de estas dos coordenadas. En correspondencia con esto, el vector \mathbf{A} se puede elegir de manera que en cualquier punto esté dirigido perpendicularmente al plano xy . Entonces las componentes de la intensidad del campo se expresan en forma de derivadas de ϕ o de \mathbf{A} de acuerdo con

$$E_x = -\partial\phi/\partial x = \partial A/\partial y, \quad E_y = -\partial\phi/\partial y = -\partial A/\partial x. \quad (3.14)$$

Pero precisamente estas relaciones entre las derivadas de las funciones ϕ y A coinciden, desde un punto de vista puramente matemático, con las conocidas condiciones de Cauchy-Riemann que expresan el hecho de que la variable compleja

$$w = \phi - iA \quad (3.15)$$

es una función analítica del argumento complejo $z = x + iy$. Esto significa que la función $w(z)$ posee en cada punto una derivada determinada que no depende de la dirección a lo largo de la cual se toma. Así, derivando en la dirección del eje x encontramos que

$$dw/dz = \partial\phi/\partial x - i\partial A/\partial x$$

o bien

$$dw/dz = -E_x + iE_y. \quad (3.16)$$

La función w se llama *potencial complejo*.

Las líneas de fuerza del campo se determinan por las ecuaciones

$$dx/E_x = dy/E_y.$$

Expresando E_x y E_y como derivadas de A , esta ecuación puede escribirse también en la forma

$$(\partial A/\partial x)dx + (\partial A/\partial y)dy = dA = 0$$

de donde $A(x, y) = \text{const.}$ Así pues, las líneas a lo largo de las cuales es constante el valor de la parte imaginaria de la función $w(z)$ coinciden con las líneas de fuerza del campo. En cambio, las líneas a lo largo de las cuales es constante la parte real de dicha función, son líneas equipotenciales. Las relaciones de partida (3.14), según las cuales

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

permiten asegurar el carácter ortogonal de estas dos familias de líneas.

Tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica satisfacen a la ecuación de Laplace. Por ello, igualmente se puede adoptar $\text{Im } w$ como potencial del campo. Entonces, las líneas de fuerza vendrán dadas por las ecuaciones $\text{Re } w = \text{const.}$ En vez de (3.15) se tendrá, en estas condiciones, $w = A + i\phi$.

El flujo del campo eléctrico a través de un segmento cualquiera de línea equipotencial viene dado por la integral

$$\oint E_n dl = - \oint (\partial \phi / \partial n) dl$$

donde dl es el elemento de línea equipotencial y \mathbf{n} la dirección orientada de la normal a la misma. De acuerdo con las relaciones (3.14) tenemos $\partial \phi / \partial n = - \partial A / \partial l$, donde el signo se elige de manera que si miramos en el sentido de \mathbf{n} , el sentido positivo de l se encuentra a la izquierda. Por lo tanto,

$$\oint E_n dl = \oint (\partial A / \partial l) dl = A_2 - A_1$$

donde A_2 y A_1 son los valores de A en los extremos del segmento. En particular, el flujo del campo eléctrico a través de un contorno cerrado es igual a $4\pi e$, donde e es la carga total que se encuentra en el interior de este contorno (referida a la unidad de longitud de los conductores a lo largo del eje z , es decir, perpendicularmente al plano). Por consiguiente,

$$e = (1/4\pi) \Delta A, \quad (3.17)$$

donde ΔA es la variación de A al recorrer la línea equipotencial cerrada en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

El ejemplo más simple de potencial complejo es el del campo creado por un hilo rectilíneo cargado (que coincide con el eje z). La intensidad de este campo viene dada por las fórmulas

$$E_r = 2e/r, \quad E_\theta = 0$$

donde r, θ son las coordenadas polares en el plano xy , y e es la carga del hilo por unidad de longitud. El correspondiente potencial complejo es

$$w = -2e \ln z = -2e \ln r - 2ie\theta. \quad (3.18)$$

Pero si el hilo cargado pasa, no por el origen de coordenadas, sino por el punto x_0, y_0 , el potencial complejo será

$$w = -2e \ln (z - z_0), \quad (3.19)$$

donde $z_0 = x_0 + iy_0$.

Desde el punto de vista matemático, la relación funcional $w = w(z)$ determina una *representación conforme* del plano complejo de la variable z sobre el plano complejo de la variable w . Sea C el contorno de la sección de un conductor por el plano xy y ϕ_0 el potencial de este conductor. Por todo lo dicho antes, es claro que el problema de determinar el campo creado por este conductor se reduce a hallar una función $w(z)$ que transforme el contorno C del plano z en la recta $w = \phi_0$ paralela al eje de ordenadas en el plano w ; entonces, la parte real $\text{Re } w$ dará el potencial del campo considerado (pero si la función $w(z)$ da como imagen del contorno C una recta paralela al eje de abscisas, el potencial será el dado por la función $\text{Im } w$).

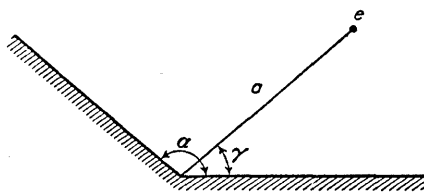


FIG. 2

4. *El problema de la cuña.* Como referencia, presentaremos aquí las fórmulas que determinan el campo creado por una carga puntual e situada en el espacio entre dos semiplanos conductores con la misma recta límite. Supongamos que el eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) coincide con la arista del ángulo diedro que forman, contándose el ángulo θ a partir de una de sus caras; sean $(a, \gamma, 0)$ las coordenadas de la carga e (fig. 2). El ángulo formado por los dos planos puede ser tanto $< \pi$ como $> \pi$; en el último caso se trata de una carga que se encuentra colocada fuera de la cuña definida por los dos conductores.

El potencial del campo viene dado por la fórmula*

$$\phi = \frac{e}{\alpha\sqrt{2ar}} \int_{\eta}^{\infty} \left\{ \frac{\sinh(\pi\zeta/\alpha)}{\cosh(\pi\zeta/\alpha) - \cos[\pi(\theta - \gamma)/\alpha]} - \frac{\sinh(\pi\zeta/\alpha)}{\cosh(\pi\zeta/\alpha) - \cos[\pi(\theta + \gamma)/\alpha]} \right\} \times \quad (3.20)$$

$$\times \frac{d\zeta}{\sqrt{\cosh \zeta - \cosh \eta}}, \quad \cosh \eta = (a^2 + r^2 + z^2)/2ar, \quad \eta > 0.$$

(sobre la superficie de los conductores, es decir, para $\theta = 0, \alpha$, el potencial es $\phi = 0$).

En particular, para $\alpha = 2\pi$ el problema es el de un plano conductor en el campo de una carga puntual. En este caso la integral (3.20) puede expresarse como combinación de funciones elementales y da

$$\phi = \frac{e}{\pi} \left\{ \frac{1}{R} \arccos \left(\frac{-\cos \frac{1}{2}(\theta - \gamma)}{\cosh \frac{1}{2}\eta} \right) - \frac{1}{R'} \arccos \left(\frac{-\cos \frac{1}{2}(\theta + \gamma)}{\cosh \frac{1}{2}\eta} \right) \right\}, \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\gamma - \theta), \\ R'^2 &= a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\gamma + \theta). \end{aligned} \right\}$$

* El primero en dar esta fórmula fue H. M. MacDonald (1895). Cómo deducirla puede verse en su *Electromagnetism*, Bell, Londres, 1934, pág. 79.

En el límite, cuando el punto de observación del campo tiende al punto en que se encuentra la carga e , el potencial (3.21) toma la forma

$$\phi = \phi' + e/R, \quad \text{donde } \phi' = -\frac{e}{2\pi a} \left[1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin \gamma} \right]. \quad (3.22)$$

El primer término es un potencial puramente coulombiano que tiende a infinito para $R \rightarrow 0$, y ϕ' es la variación del potencial, en el punto en que se encuentra la carga, debida a la influencia del conductor. La energía de interacción de la carga y del semiplano conductor es

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} e \phi' = -\frac{e^2}{4\pi a} \left[1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin \gamma} \right] \quad (3.23)$$

PROBLEMAS

1. Determinar el campo en torno de una esfera conductora neutra (de radio R) que se encuentra en un campo eléctrico exterior homogéneo \mathcal{E} .

Solución. Escribamos el potencial en la forma $\phi = \phi_0 + \phi_1$, donde $\phi_0 = -\mathcal{E} \cdot \mathbf{r}$ es el potencial del campo exterior y ϕ_1 la variación que se busca del potencial determinada por la esfera. Dada la simetría de ésta, la función ϕ_1 sólo puede depender del vector constante \mathcal{E} . La única solución de la ecuación de Laplace de este tipo, que se anula en el infinito, es

$$\phi_1 = -\text{const} \times \mathcal{E} \cdot \text{grad} \cdot (1/r) = \text{const} \times \mathcal{E} \cdot \mathbf{r} / r^3,$$

(como origen de coordenadas se ha elegido el centro de la esfera). Sobre la superficie de la esfera, ϕ debe ser constante; de aquí se sigue que $\text{const} = R^3$, de modo que

$$\phi = -\mathcal{E} \cdot \mathbf{r} \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) = -\mathcal{E} r \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right),$$

(θ es el ángulo formado por \mathcal{E} y \mathbf{r}). La distribución de las cargas sobre la superficie de la esfera viene dada por la fórmula

$$\sigma = -(1/4\pi) [\partial \phi / \partial r]_{r=R} = (3\mathcal{E}/4\pi) \cos \theta.$$

La carga total es $e = 0$.

La manera más sencilla de hallar el momento dipolar de la esfera consiste en comparar ϕ_1 con el potencial ($\mathcal{P} \cdot \mathbf{r} / r^3$) del campo de un dipolo eléctrico; se encuentra así

$$\mathcal{P} = R^3 \mathcal{E}.$$

2. El mismo problema para un cilindro infinito en un campo homogéneo transversal.

Solución. Introduzcamos coordenadas polares en un plano perpendicular al eje del cilindro. La solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones que depende únicamente de un vector constante es

$$\phi_1 = \text{const} \times \mathcal{E} \cdot \text{grad} (\ln r) = \text{const} \times \mathcal{E} \cdot \mathbf{r} / r^2.$$

Sumando con $\phi_0 = -\mathbf{r} \cdot \mathcal{E}$ y haciendo $\text{const} = R^2$, obtendremos

$$\phi = -\mathcal{E} r \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right).$$

La densidad superficial de las cargas es

$$\sigma = (\mathcal{E}/2\pi) \cos \theta.$$

El momento dipolar \mathcal{P} por unidad de longitud del cilindro puede hallarse comparando ϕ con

el potencial de un campo dipolar bidimensional. Este último es de la forma

$$2\mathcal{P} \cdot \text{grad} (\ln r) = 2\mathcal{P} \cdot \mathbf{r}/r^2,$$

de modo que $\mathcal{P} = \mathcal{E}R^2/2$.

3. Determinar el campo cerca de un saliente en forma de cuña en un conductor.

Solución. Elijamos coordenadas polares r, θ en un plano perpendicular a la arista de la cuña y con origen en el vértice del ángulo θ_0 formado por ella. El ángulo θ lo contaremos a partir de una de las caras de la cuña; a la región exterior al conductor corresponden los valores $0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$. Cerca del vértice de dicho ángulo el potencial se puede desarrollar en potencias de r , interesándonos el primer término de este desarrollo (después del término constante) que corresponda a la menor potencia de r . Las soluciones de la ecuación de Laplace bidimensional proporcionales a r^n son $r^n \cos n\theta$ y $r^n \sin n\theta$. La solución con el valor menor de n que cumple la condición $\phi = \text{const}$ para $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi - \theta_0$ (es decir, sobre la superficie del conductor), se escribe

$$\phi = \text{const} \times r^n \sin n\theta, \quad n = \pi/(2\pi - \theta_0).$$

(el valor const se puede determinar únicamente a partir de la solución del problema para el campo en conjunto). Según esto, la intensidad del campo depende de r como r^{n-1} . Para $\theta_0 < \pi$ ($n < 1$), por consiguiente, la intensidad tiende a infinito cerca de la arista. En particular, para una cuña muy aguda ($\theta_0 \ll 1$, $n \cong 1/2$) E crece al disminuir r como $r^{-1/2}$. En cambio, cerca de la arista de un entrante en forma de diedro obtuso sobre la superficie del conductor ($\theta_0 > \pi$, $n > 1$), el campo tiende a cero.

4. Determinar el campo cerca de un vértice cónico agudo sobre la superficie de un conductor.

Solución. Elijamos coordenadas esféricas con origen en el vértice y de manera que el eje polar coincida con el eje del cono. Supongamos que el ángulo de abertura del cono es tal que $2\theta_0 \ll 1$, de forma que a la región exterior al conductor correspondan los valores del ángulo polar $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$. Para la parte variable del potencial, busquemos la solución simétrica respecto del eje del cono entre las expresiones de la forma

$$\phi = r^n f(\theta), \quad (1)$$

con el menor valor posible de n . La ecuación de Laplace

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0,$$

después de substituir en ella la expresión (1) da

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df}{d\theta} \right) + n(n+1)f = 0. \quad (2)$$

La condición de que el potencial sea constante sobre la superficie del cono implica que debe ser $f(\theta_0) = 0$.

Para θ_0 pequeño buscaremos una solución partiendo de la hipótesis de que $n \ll 1$ y que $f(\theta)$ tiene la forma $f = \text{const} [1 + \psi(\theta)]$, donde $\psi \ll 1$ (para $\theta_0 \rightarrow 0$; es decir, para una punta infinitamente aguda, es natural esperar que ϕ tenderá a una constante prácticamente en toda la región en torno de la misma). Para ψ obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) = -n. \quad (3)$$

La solución que carece de singularidades fuera de la punta (en particular, para $\theta = \pi$), es

$$\psi(\theta) = 2n \ln \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Cuando $\theta \sim \theta_0 \ll 1$ la función ψ deja de ser pequeña. Sin embargo, la expresión obtenida sigue siendo aplicable, puesto que en este dominio, y en virtud de que θ es pequeño, se puede prescindir del segundo término de la ecuación (2). Para determinar la constante n hay que imponer, en primera aproximación, la condición de que se anule la función que hemos encontrado ya $f = 1 + \psi$ para $\theta = \theta_0$. Se obtiene de esta manera*

$$n = -1/2 \ln \theta_0.$$

La intensidad del campo tiende a infinito al acercarnos al vértice de la punta como $r^{-(1-n)}$, es decir, en esencia como $1/r$.

5. El mismo problema para una cavidad cónica aguda en la superficie de un conductor.

Solución. A la región exterior al conductor corresponden ahora los valores $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Como en el problema que precede, buscaremos para ϕ una expresión de la forma (1), si bien en este caso será $n \gg 1$. Dado que en todo el dominio del campo se tiene ahora $\theta \ll 1$, la ecuación (2) se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\theta \frac{df}{d\theta} \right) + n^2 f = 0.$$

Ésta es una ecuación de Bessel, y la solución de la misma que carece de singularidades en el dominio del campo es $J_0(n\theta)$. El valor n se determina como raíz mínima de la ecuación $J_0(n\theta_0) = 0$, de donde

$$n = \frac{2,4}{\theta_0}.$$

6. Determinar la energía de atracción entre un dipolo eléctrico y la superficie plana de un conductor.

Solución. Elijamos el eje x perpendicular a la superficie del conductor y de modo que pase por el punto en que se encuentra el dipolo; supongamos que el vector momento dipolar \mathcal{P} se encuentra en el plano xy . La «imagen» del dipolo se encuentra en el punto $-x$ y posee un momento dipolar $\mathcal{P}'_x = \mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}'_y = -\mathcal{P}_y$. La energía de atracción buscada se calcula como energía de interacción del dipolo con su «imagen» y es

$$\mathcal{U} = -(2\mathcal{P}_x^2 + \mathcal{P}_y^2)/16x^3.$$

7. Determinar la capacidad mutua por unidad de longitud de dos conductores cilíndricos paralelos de longitud infinita (los radios son a y b , la distancia entre ejes, c^{**}).

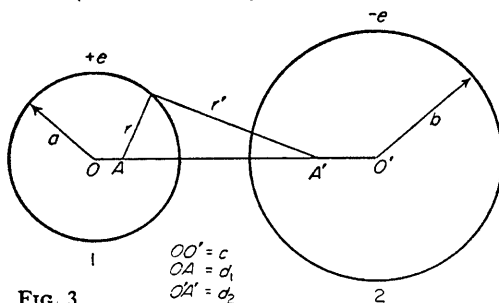


FIG. 3

* La fórmula más precisa $n = 1/2 \ln (2/\theta_0)$, en que aparece un coeficiente en el argumento de un logaritmo que es grande, no puede obtenerse de hecho mediante el simple método que hemos presentado.

** El problema análogo para dos esferas no se resuelve en forma finita. La diferencia se debe a que en el campo de dos hilos conductores paralelos (con cargas iguales y de signos opuestos) todas las superficies equipotenciales son cilindros circulares, mientras que en el campo de dos cargas puntuales $\pm e$ las superficies equipotenciales no son esferas.

Solución. El campo creado por los dos cilindros coincide con el que determinarían (en el espacio exterior a los cilindros) dos hilos cargados que pasen por dos puntos convenientemente elegidos A y A' (fig. 3). Los hilos tienen cargas (por unidad de longitud) $\pm e'$ iguales a las cargas de los cilindros y los puntos A y A' deben encontrarse sobre la recta OO' de modo que las superficies de los cilindros coincidan con dos superficies equipotenciales. Para ello las distancias OA y OA' deben satisfacer las condiciones

$$OA \cdot OA' = a^2, \quad O'A' \cdot O'A = b^2,$$

es decir,

$$d_1(c-d_2) = a^2, \quad d_2(c-d_1) = b^2.$$

Entonces, sobre cada una de las circunferencias, la razón r/r' de las distancias a los puntos A y A' toma sobre la circunferencia 1 el valor constante

$$r/r' = a/OA' = a/(c-d_2) = d_1/a,$$

y sobre la circunferencia 2 se tiene $r'/r = d_2/b$. De acuerdo con esto, los potenciales de los cilindros son

$$\phi_1 = -2e \ln (r/r') = -2e \ln (d_1/a), \quad \phi_2 = 2e \ln (d_2/b), \quad \phi_2 - \phi_1 = 2e \ln (d_1 d_2 / ab).$$

De aquí se sigue para la capacidad mutua buscada $C = e/(\phi_2 - \phi_1)$:

$$1/C = 2 \ln (d_1 d_2 / ab) = 2 \operatorname{arcosh} [(c^2 - a^2 - b^2)/2ab].$$

En particular, para un cilindro de radio a que se encuentra a una distancia h ($h > a$) de un plano conductor, hay que hacer $c = b + h$ y pasar al límite $b \rightarrow \infty$; esto da

$$1/C = 2 \operatorname{arcosh} (h/a).$$

Si dos cilindros huecos se encuentran el uno dentro del otro ($c < b - a$), no existe campo fuera de ellos y el campo en el espacio entre ambos cilindros coincide con el que crearían dos hilos con cargas $+e$ y $-e$ que pasasen por los puntos A y A' (fig. 4). De la misma manera que antes obtendremos el resultado:

$$1/C = 2 \operatorname{arcosh} [(a^2 + b^2 - c^2)/2ab].$$

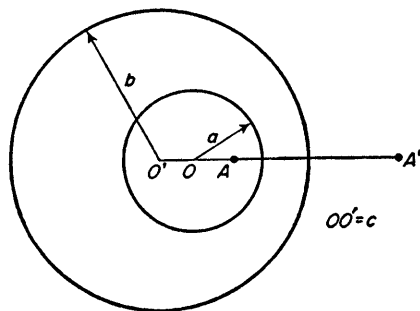


FIG. 4

8. La frontera del conductor está constituida por un plano infinito con una protuberancia en forma de hemisferio. Determinar la distribución de las cargas sobre la superficie.

Solución. En el campo que se halló en el problema 1, con un potencial de la forma

$$\phi = \text{const} \times z \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right),$$

el plano $z = 0$ con una protuberancia en $r = R$ es una superficie equipotencial (sobre la cual $\phi = 0$). Por consiguiente, puede también ser la superficie de un conductor, y la fórmula antes escrita determina el campo fuera del mismo. La distribución de las cargas sobre la parte plana de la superficie viene dada por la fórmula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = \sigma_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right);$$

(hemos hecho $\text{const} = -4\pi\sigma_0$, donde σ_0 es la densidad de las cargas lejos de la protuberancia). Sobre la superficie de la protuberancia, en cambio, se tiene

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{r=R} = 3\sigma_0 \frac{z}{R}.$$

9. Determinar el momento dipolar de una varilla cilíndrica conductora de pequeño diámetro (longitud $2l$, radio a ; $a \ll l$) en un campo eléctrico \mathcal{E} , paralelo a su eje.

Solución. Sea $\tau(z)$ la carga inducida sobre la superficie de la varilla referida a la unidad de longitud; z es la coordenada a lo largo del eje del cilindro, y la contaremos a partir de su punto medio. La condición de que el potencial sea constante sobre la superficie del conductor se escribe:

$$-\mathcal{E}z + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\tau(z') dz' d\phi}{R} = 0,$$

$$R^2 = (z' - z)^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi$$

(ϕ es el ángulo formado por los planos que pasan por el eje del cilindro y por los puntos de su superficie cuya distancia mutua es igual a R). Descompongamos la integral en dos partes, substituyendo en ella la identidad $\tau(z') = \tau(z) + [\tau(z') - \tau(z)]$. Teniendo en cuenta que $l \gg a$ y considerando los puntos que no se encuentran demasiado cerca de los extremos de la varilla, tenemos

$$\frac{\tau(z)}{2\pi} \iint \frac{dz' d\phi}{R} \cong \frac{\tau(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{l^2 - z^2}{a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi} d\phi = \tau(z) \ln \frac{4(l^2 - z^2)}{a^2}$$

(se ha utilizado el valor conocido $\int_0^\pi \ln \sin \phi d\phi = -\pi \ln 2$). En la integral que contiene la diferencia $\tau(z') - \tau(z)$ se puede prescindir del término a^2 en R , puesto que ello no trae ya consigo la divergencia de la integral. De esta manera.

$$\mathcal{E}z = \tau(z) \ln \frac{4(l^2 - z^2)}{a^2} + \int_{-l}^l \frac{\tau(z') - \tau(z)}{|z' - z|} dz'.$$

La dependencia de τ respecto de z se reduce esencialmente a una mera proporcionalidad; en esta aproximación la integral que aquí aparece da $-2\tau(z)$ y obtenemos en definitiva

$$\tau(z) = \frac{\mathcal{E}z}{\ln [4(l^2 - z^2)/a^2] - 2}.$$

Esta expresión deja de valer cerca de los extremos de la varilla, mas para el cálculo del momento dipolar esta región de valores de z carece de importancia. Dentro de la aproximación adoptada aquí, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \int_{-l}^l \tau(z)z \, dz = \frac{\mathcal{E}}{L} \int_0^l \left\{ z^2 - \frac{z^2}{2L} \ln \left(1 - \frac{z^2}{l^2} \right) \right\} dz \\ &= \frac{\mathcal{E}l^3}{3L} \left(1 + \frac{1}{L} \left(\frac{4}{3} - \ln 2 \right) \right),\end{aligned}$$

(donde $L = \ln(2l/a) - 1$ es un número grande), o bien (con la misma precisión)

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}l^3}{3 \ln(4l/a) - 7}.$$

10. Determinar la capacidad de un conductor en forma de casquete esférico hueco.

Solución. Elijamos como origen de coordenadas O un punto cualquiera del borde del casquete (figura 5) y apliquemos la inversión $r = l^2/r'$ (l es la longitud de la cuerda de la sección principal del casquete). En estas condiciones, el casquete se transforma en un semiplano (recta de trazos en la fig. 5) perpendicular al radio AO del casquete y que pasa por el punto B de su borde; el ángulo $\gamma = \pi - \theta$, donde 2θ es el ángulo de abertura del casquete.

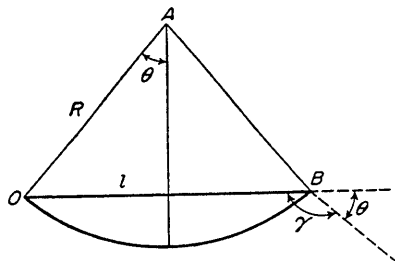


FIG. 5

Si el potencial del casquete, cargado con una carga e , se toma igual a cero, para $r \rightarrow \infty$ el potencial del campo se comportará como

$$\phi \rightarrow -\phi_0 + e/r.$$

En correspondencia con esto, en el problema transformado el potencial será de la forma

$$\phi' \rightarrow l\phi/r' \cong -l\phi_0/r' + e/l,$$

para $r' \rightarrow 0$ (el primer término corresponde a la carga $e' = -l\phi_0$ situada en el origen de coordenadas).

Por otra parte, según la fórmula (3.22) tenemos

$$\phi' = \frac{e'}{r'} - \frac{e'}{2\pi l} \left(1 + \frac{\theta}{\sin \theta} \right)$$

(que es el potencial cerca de la carga e' que se encuentra a la distancia l del borde de un semiplano conductor cuyo potencial es nulo). Comparando estas dos expresiones, obtenemos para la capacidad buscada $C = e/\phi_0$ la siguiente fórmula

$$C = \frac{l}{2\pi} \left(1 + \frac{\theta}{\sin \theta} \right) = \frac{R}{\pi} (\sin \theta + \theta),$$

(R es el radio del casquete).

11. Determinar la corrección ligada con el efecto de bordes que hay que aplicar al valor $C = S/4\pi d$ para la capacidad de un condensador plano (S es el área de la superficie de una armadura, d es la distancia entre ellas; se supone $d \ll \sqrt{S}$).

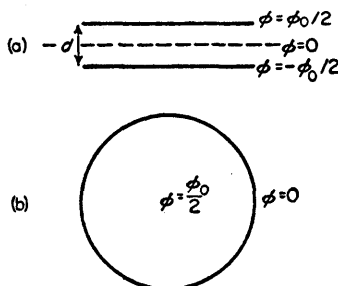


FIG. 6

Solución. La existencia de bordes libres en las armaduras rompe la homogeneidad de la distribución de las cargas sobre las mismas. Para determinar la corrección buscada consideremos en primera aproximación los puntos de aquéllas que se hallan a una distancia x del borde y tales que $d \ll x \ll \sqrt{S}$. Considerando, por ejemplo, la armadura superior (con un potencial $\phi = \phi_0/2$, figura 6 a) y prescindiendo de su distancia $d/2$ hasta el plano medio (superficie potencial $\phi = 0$), el problema que hemos de resolver es el de un campo cerca de la frontera de dos porciones de planos que se encuentran a potenciales diferentes. Este problema se resuelve de manera elemental* y para el exceso de densidad de carga (exceso comparado con el valor lejos del borde) se encuentra en definitiva la expresión

$$\Delta\sigma = E_n/4\pi = \phi_0/8\pi^2 x,$$

de modo que el exceso total de carga vale

$$L \int \Delta\sigma dx = (\phi_0 L/8\pi^2) \ln(\sqrt{S}/d),$$

(L es la longitud del perímetro de una armadura); al efectuar el cálculo de la integral, que diverge logarítmicamente, se han tomado como límites inferior y superior los del intervalo $d \ll x \ll \sqrt{S}$.

De aquí se deduce para la capacidad**

$$C = \frac{S}{4\pi d} + \frac{L}{8\pi^2} \ln \frac{\sqrt{S}}{d}$$

§ 4. Elipsoide conductor

El problema de determinar el campo de un elipsoide conductor cargado y el problema de un elipsoide en un campo exterior homogéneo se resuelven mediante

* Véase § 22; en la forma (22.2) para el potencial hay que hacer en este caso $\phi_{ab} = \phi_0/2$, $\alpha = \pi$. (Figura 6 b).

** Un cálculo más aproximado (que determina el coeficiente en el argumento del logaritmo) exige la aplicación de métodos notablemente más complicados y el resultado, además, depende de la forma de las armaduras. Cuando éstas son circulares (de radio R), se obtiene

$$C = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi} \left(\ln \frac{16\pi R}{d} - 1 \right)$$

(fórmula de Kirchhoff).

las llamadas *coordenadas elipsoidales*.

La relación entre las coordenadas elipsoidales y las cartesianas viene dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \quad (a > b > c). \quad (4.1)$$

Esta ecuación, que es una ecuación cúbica respecto de u , tiene tres raíces reales distintas ($u = \xi, \eta, \zeta$) que pertenecen a los siguientes intervalos:

$$\xi \geq -c^2, \quad -c^2 \geq \eta \geq -b^2, \quad -b^2 \geq \zeta \geq -a^2. \quad (4.2)$$

Estas tres raíces son precisamente las coordenadas elipsoidales del punto x, y, z . Su sentido geométrico resulta del hecho de que las superficies a lo largo de las cuales son constantes ξ, η, ζ , representan elipsoides, hiperboloides de una hoja, e hiperboloides de dos hojas, respectivamente, todos los cuales son homofocales con el elipsoide

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1. \quad (4.3)$$

Por cada punto del espacio pasa una superficie de cada una de estas tres familias, siendo estas superficies ortogonales entre sí. Las fórmulas de transformación que llevan de las coordenadas elipsoidales a las cartesianas se obtienen resolviendo simultáneamente tres ecuaciones del tipo (4.1) y tienen la forma*

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)} \right]}, \\ y &= \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)} \right]}, \\ z &= \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

El elemento de longitud en coordenadas elipsoidales es:

$$\left. \begin{aligned} dl^2 &= h_1^2 d\xi^2 + h_2^2 d\eta^2 + h_3^2 d\zeta^2, \\ h_1 &= \sqrt{[(\xi-\eta)(\xi-\zeta)]/2R_\xi}, \quad h_2 = \sqrt{[(\eta-\zeta)(\eta-\xi)]/2R_\eta}, \\ h_3 &= \sqrt{[(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)]/2R_\zeta}, \quad R_u^2 = (u+a^2)(u+b^2)(u+c^2), \\ &u = \xi, \eta, \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Según esto, la ecuación de Laplace expresada en tales coordenadas se escribe

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{4}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)} \times \\ &\times \left[(\eta-\zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta-\xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_\eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + (\xi-\eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_\zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

* Rigurosamente hablando, como coordenadas elipsoidales habría que considerar no las propias ξ, η, ζ , sino las cantidades $\sqrt{a^2+\xi}, \sqrt{b^2+\eta}, \sqrt{c^2+\zeta}$. Desaparecerían entonces de las fórmulas (4.4) los dobles signos y la relación entre ambos sistemas de coordenadas pasaría a ser, como corresponde, biunívoca.

Si dos de los semiejes a , b , c son iguales, el sistema de coordenadas elipsoidales degenera. Supongamos que $a = b > c$. Entonces la ecuación cúbica (4.1) pasa a ser una ecuación cuadrática:

$$\frac{\rho^2}{a^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (4.7)$$

con dos raíces que pertenecen a los intervalos

$$\xi \geq -c^2, \quad -c^2 \geq \eta \geq -a^2.$$

Las superficies de coordenadas sobre las cuales son constantes ξ y η se transforman, en estas condiciones, en elipsoides de rotación achatados y en hiperboloides de rotación de una hoja homofocales (fig. 7). Como tercera coordenada cabe introducir el ángulo polar ϕ en el plano x, y ($x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$). En lo que concierne a la coordenada elipsoidal ζ , cuando es $a = b$ ésta se reduce a la constante $-a^2$. Su relación con el ángulo ϕ se traduce en la ley según la cual ζ tiende a $-a^2$ cuando b tiende a a : concretamente, cuando $b \rightarrow a$ tenemos

$$\cos \phi = \sqrt{[(a^2 + \zeta)/(a^2 - b^2)]} \quad \text{cuando } b \rightarrow a, \quad (4.8)$$

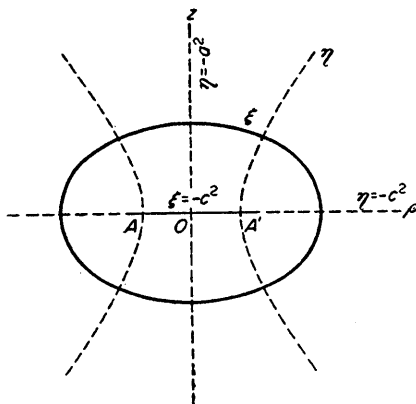


FIG. 7

lo que es fácil comprobar a partir de (4.4) o directamente a partir de la ecuación (4.1). La relación entre las coordenadas z , ρ y las coordenadas ξ , η viene dada, según (4.4), por las igualdades

$$z = \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2} \right]}, \quad \rho = \sqrt{\left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2} \right]}. \quad (4.9)$$

Las coordenadas ξ , η , ϕ se llaman *coordenadas esferoidales achatadas**.

* Adoptamos aquí como definición de las coordenadas esferoidales aquella de acuerdo con la cual dichas coordenadas resultan directamente como caso límite de las elipsoidales. En la literatura se utilizan también otras definiciones que se reducen fácilmente a la nuestra.

De manera análoga, cuando $a > b = c$ las coordenadas elipsoidales degeneran en las llamadas *coordenadas esferoidales alargadas*. Las dos coordenadas ξ y ζ son las raíces de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{\rho^2}{b^2+u} = 1, \quad \rho^2 = y^2 + z^2, \quad (4.10)$$

con $\xi \geq -b^2$, $-b^2 \geq \zeta \geq -a^2$. Las superficies sobre las que ξ y ζ son constantes se reducen a elipsoides alargados e hiperboloides de rotación de dos hojas (figura 8). La coordenada η , en cambio, degenera cuando $c \rightarrow b$ reduciéndose a la constante $-b^2$ de acuerdo con la ley

$$\cos \phi = \sqrt{[(b^2 + \eta)/(b^2 - c^2)]}, \quad (4.11)$$

donde ϕ es el ángulo polar en el plano yz .

La relación entre las coordenadas ξ , ζ y las coordenadas x , ρ viene dada por las fórmulas

$$x = \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2} \right]}, \quad \rho = \sqrt{\left[\frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2} \right]}. \quad (4.12)$$

En un sistema esferoidal achatado, los focos de las superficies de coordenadas (elipsoides e hiperboloides) se encuentran sobre la circunferencia de radio $\sqrt{a^2 - c^2}$ en el plano xy (en la fig. 7, AA' es el diámetro de esta circunferencia). Tracemos el plano que pasa por un punto P y el eje z . Este plano corta la circunferencia focal en dos puntos; sean r_1 y r_2 las distancias de estos puntos al punto P . Si ρ , z son las coordenadas de este punto, se tendrá

$$r_1^2 = [\rho - \sqrt{(a^2 - c^2)}]^2 + z^2, \quad r_2^2 = [\rho + \sqrt{(a^2 - c^2)}]^2 + z^2.$$

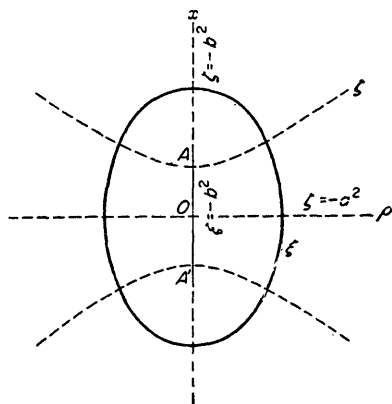


FIG. 8

Las coordenadas esferoidales ξ , η se expresan en función de r_1 , r_2 mediante las fórmulas siguientes:

$$\xi = \frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 - a^2, \quad \eta = \frac{1}{4}(r_2 - r_1)^2 - a^2. \quad (4.13)$$

En cambio, en el sistema esferoidal alargado los focos coinciden con los dos puntos $x = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ sobre el eje x (puntos A, A' en la fig. 8). Si r_1, r_2 son las distancias del punto P a estos focos, se tendrá

$$r_1^2 = \rho^2 + [z - \sqrt{(a^2 - b^2)}]^2, \quad r_2^2 = \rho^2 + [z + \sqrt{(a^2 - b^2)}]^2,$$

y las coordenadas esferoidales ξ, ζ se expresan en función de r_1, r_2 por las mismas fórmulas (4.13) (con la substitución de η por ζ).

Volvamos al problema del campo de un elipsoide cargado cuya superficie viene definida por la ecuación (4.3). En coordenadas elipsoidales ésta es la superficie de coordenadas $\xi = 0$. Está claro que si se busca el potencial del campo de forma que sea función únicamente de ξ , serán automáticamente superficies equipotenciales todas las elipsoidales $\xi = \text{const}$, entre ellas la superficie del conductor. La ecuación de Laplace (4.6) se reduce entonces a

$$\frac{d}{d\xi} \left(R_\xi \frac{d\phi}{d\xi} \right) = 0,$$

de donde

$$\phi(\xi) = A \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}.$$

El límite superior de integración se ha elegido de manera que el campo se anule en el infinito. La manera más sencilla de determinar la constante A consiste en tener en cuenta la condición de que, a grandes distancias r , el campo debe tender a comportarse como un campo coulombiano: $\phi \cong e/r$, donde e es la carga total del conductor. Para $r \rightarrow \infty$ debe tenerse $\xi \rightarrow \infty$; concretamente, $r^2 \cong \xi$, como se sigue de la ecuación (4.1) con $u = \xi$. Por otra parte, para valores ξ grandes se tiene $R_\xi \cong \xi^{3/2}$ y $\phi \cong \frac{2A}{\sqrt{\xi}} = \frac{2A}{r}$. De aquí se sigue que $2A = e$, de modo que, en definitiva,

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}e \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}. \quad (4.14)$$

La integral que aquí aparece es una integral elíptica de primera especie. A la superficie del conductor corresponde el valor $\xi = 0$, por lo cual para la capacidad del elipsoide tenemos

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}. \quad (4.15)$$

La distribución de densidad de carga sobre la superficie del elipsoide está deter-

minada por la derivada normal del potencial

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(\eta \zeta)}}.$$

Partiendo de las ecuaciones (4.4), es fácil comprobar que para $\xi = 0$ se tiene

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta \zeta}{a^2 b^2 c^2}.$$

Por lo tanto,

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}. \quad (4.16)$$

En el caso de un elipsoide con dos ejes (esferoide), las integrales (4.14) y (4.15) se expresan en términos de funciones elementales. El potencial del campo para un elipsoide alargado ($a > b = c$) viene dado por la fórmula

$$\phi = \frac{e}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \operatorname{artgh} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}}, \quad (4.17)$$

y su capacidad es

$$C = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{\operatorname{arcosh}(a/b)}. \quad (4.18)$$

En cambio, para un elipsoide achatado ($a = b > c$), tenemos

$$\phi = \frac{e}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}, \quad C = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{\operatorname{arc} \cos(c/a)}. \quad (4.19)$$

En particular, para un disco circular ($a = b, c = 0$)

$$C = 2a/\pi. \quad (4.20)$$

Pasemos al problema de un elipsoide conductor sin carga que se encuentra en un campo eléctrico exterior homogéneo \mathfrak{E} . Sin restringir la generalidad basta considerar el campo exterior \mathfrak{E} dirigido a lo largo de uno de los ejes del elipsoide. En caso contrario, cabe descomponerlo en tres componentes a lo largo de los ejes del elipsoide y buscar el campo resultante como superposición de los campos determinados por cada una de estas componentes por separado.

El potencial de un campo homogéneo \mathfrak{E} dirigido a lo largo del eje x (eje a del elipsoide) se escribe, en coordenadas elipsoidales,

$$\phi_0 = -\mathfrak{E}x = -\mathfrak{E} \sqrt{[(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)/(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)]}. \quad (4.21)$$

Representemos el potencial del campo fuera del elipsoide en la forma $\phi = \phi_0 + \phi'$, donde ϕ' da la variación buscada del campo exterior debida al elipsoide y busque-

mos para ϕ' una expresión del tipo

$$\phi' = \phi_0 F(\xi). \quad (4.22)$$

En esta función los factores que dependen de η y ζ coinciden con los correspondientes en la función ϕ_0 , lo que permite satisfacer la condición de contorno en $\xi = 0$ y valores arbitrarios de η y ζ (sobre la superficie del elipsoide). Substituyendo (4.22) en la ecuación de Laplace (4.6), obtendremos para $F(\xi)$ la ecuación

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \ln [R_\xi(\xi + a^2)] = 0.$$

Una de las soluciones de esta ecuación es $F = \text{const.}$, y la otra

$$F(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}. \quad (4.23)$$

El límite superior de integración se ha elegido de manera que en el infinito ($\xi \rightarrow \infty$) el potencial ϕ' tienda a cero. La integral que aquí aparece es una integral elíptica de segunda especie.

Sobre la superficie del elipsoide debe ser $\phi = \text{const.}$ Para que esta condición pueda quedar satisfecha para $\xi = 0$ y η, ζ arbitrarios, debe ser $\text{const} = 0$. Eligiendo de acuerdo con esto el coeficiente A en $F(\xi)$ (de modo que sea $F(0) = -1$), obtendremos la siguiente expresión final para el potencial del campo en torno del elipsoide:

$$\phi = \phi_0 \left\{ 1 - \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s} \right\} / \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s}. \quad (4.24)$$

Veamos cuál es la forma del potencial ϕ' a grandes distancias r del elipsoide. A valores de r grandes corresponden valores grandes de la coordenada ξ , siendo $r^2 \cong \xi$, conforme se sigue inmediatamente de la ecuación (4.1). Por consiguiente,

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s} \cong \int_{r^2}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} = \frac{2}{3r^3},$$

y para el potencial ϕ' obtenemos

$$\phi' = \mathcal{E} xV / 4\pi n^{(x)} r^3,$$

donde $V = 4\pi abc/3$ es el volumen del elipsoide y la cantidad $n^{(x)}$ (al igual que las cantidades análogas que aparecen a continuación $n^{(y)}$, $n^{(z)}$) se definen por las igualdades

$$n^{(x)} = \frac{1}{2} abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s}, \quad n^{(y)} = \frac{1}{2} abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + b^2) R_s}, \quad n^{(z)} = \frac{1}{2} abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + c^2) R_s}. \quad (4.25)$$

La expresión para ϕ' , como debía ser, tiene la forma del potencial del campo de un dipolo eléctrico:

$$\phi' = x\mathcal{P}_x/r^3,$$

donde el momento dipolar del elipsoide es

$$\mathcal{P}_x = \mathfrak{E}_x V/4\pi n^{(x)}. \quad (4.26)$$

Mediante expresiones análogas se determina el momento dipolar debido a un campo \mathfrak{E} dirigido a lo largo de los ejes y o z .

Las constantes positivas $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ dependen solamente de la forma del elipsoide, pero no de su volumen; se llaman *coeficientes de despolarización**. Si no se ha decidido de antemano la elección de los ejes de coordenadas a lo largo de los ejes del elipsoide, hay que escribir la fórmula (4.26) en forma tensorial:

$$(4\pi/V)n_{ik}\mathcal{P}_k = \mathfrak{E}_i. \quad (4.27)$$

Las cantidades $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ son los valores principales del tensor simétrico de segundo orden n_{ik} .

En el caso general en que los valores a , b , c son arbitrarios, de las definiciones de $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ se sigue, en primer lugar, que

$$n^{(x)} < n^{(y)} < n^{(z)} \text{ si } a > b > c. \quad (4.28)$$

Además, sumando las integrales $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ y tomando como variable de integración $u = R_3^2$, se encuentra

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = \frac{1}{2}abc \int_{(abc)^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}},$$

de donde

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = 1. \quad (4.29)$$

La suma de los tres coeficientes de despolarización son iguales a la unidad (en forma tensorial esto significa que $n_{ii} = 1$). Dado que, por otra parte, estos coeficientes son positivos, ninguno de ellos puede ser mayor que la unidad.

Para una esfera ($a = b = c$) es evidente, por razones de simetría, que $n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)}$ y, por lo tanto:

$$n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3}. \quad (4.30)$$

En el caso de un cilindro (con el eje a lo largo del eje x , $a \rightarrow \infty$) tenemos**

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}. \quad (4.31)$$

* Tablas útiles de estos coeficientes se dan en un artículo de E. C. Stoner (Phil. Mag., [7] 36, 803, 1945).

** Estos valores para la esfera y el cilindro concuerdan, naturalmente, con los resultados obtenidos en los problemas 1 y 2 del § 3.

Las integrales elípticas (4.25) se expresan mediante funciones elementales para todos los elipsoides de rotación. En el caso de un elipsoide de rotación alargado ($a > b = c$) con excentricidad $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ es

$$n^{(x)} = \frac{1-e^2}{2e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right), \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}(1 - n^{(x)}). \quad (4.32)$$

Si el elipsoide es casi una esfera ($e \ll 1$), se tiene aproximadamente

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}e^2. \quad (4.33)$$

En cambio, para un elipsoide de rotación achatado ($a = b > c$), se tiene

$$n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e), \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{2}(1 - n^{(z)}), \quad (4.34)$$

donde $e = \sqrt{(a/c)^2 - 1}$. Si $e \ll 1$, entonces

$$n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}e^2. \quad (4.35)$$

PROBLEMAS

1. Hallar el campo de un disco circular conductor cargado (de radio a) expresándolo en coordenadas cilíndricas. Hallar la distribución de la carga sobre el disco.

Solución. La distribución de la carga se obtiene pasando al límite $c \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ en la fórmula (4.16), siendo la razón $z/c = \sqrt{1 - r^2/a^2}$ (donde $r^2 = x^2 + y^2$) de acuerdo con (4.3). Esto da

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

El potencial del campo en todo el espacio viene dado por la fórmula (4.19), en la que haremos $c = 0$ y expresaremos ξ en función de r y z mediante la ecuación (4.1) con $c = 0$, $u = \xi$, $a = b$:

$$\phi = \frac{e}{a} \operatorname{arctg} \left[\frac{2a^2}{r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{[(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2]}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

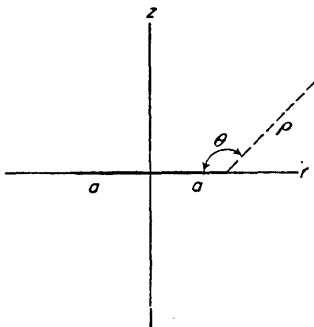


FIG. 9

Cerca del borde del disco introduciremos, en vez de r y z , las coordenadas ρ y θ de acuerdo con $z = \rho \sin \theta$, $r = a - \rho \cos \theta$ ($\rho \ll a$) (fig. 9) y obtendremos

$$\phi \cong \frac{e}{a} \left(\frac{1}{2} \pi - \sqrt{\frac{2\rho}{a} \sin \frac{1}{2} \theta} \right),$$

de acuerdo con el resultado general del problema 3 del § 3.

2. Determinar el momento eléctrico cuadrupolar de un elipsoide cargado.

Solución. El tensor momento cuadrupolar de un conductor cargado se define por la igualdad $D_{ik} = e(3x_i x_k - \bar{r}^2 \delta_{ik})$, donde e es su carga total y el trazo significa el promedio definido por la ley

$$\overline{x_i x_k} = \frac{1}{e} \oint x_i x_k \sigma \, df.$$

Es evidente que los ejes del elipsoide son al mismo tiempo ejes principales del tensor D_{ik} . Utilizando para σ la fórmula (4.16) y para el elemento de superficie del elipsoide la expresión

$$df = \frac{dx \, dy}{v_z} = \frac{dx \, dy}{z/c^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

obtendremos

$$\bar{z^2} = \frac{c}{4\pi ab} \int z \, dx \, dy = \frac{1}{3} c^2;$$

(la integración respecto de x , y se extiende dos veces a la superficie de la sección del elipsoide por el plano xy). De esta manera,

$$D_{xx} = \frac{1}{3} e(2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{1}{3} e(2b^2 - c^2 - a^2), \quad D_{zz} = \frac{1}{3} e(2c^2 - a^2 - b^2).$$

3. Determinar la distribución de las cargas sobre la superficie de un elipsoide conductor sin carga situado en un campo exterior homogéneo.

Solución. Según la fórmula (1.9), se tiene

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\xi=0} = -\left[\frac{1}{4\pi h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_{\xi=0};$$

(el elemento de longitud a lo largo de la normal orientada a la superficie del elipsoide es, por (4.5), $h_1 d\xi$). Substituyendo (4.24) y teniendo en cuenta que

$$v_x = \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = \left[\frac{x}{2a^2 h_1} \right]_{\xi=0}$$

(\mathbf{v} es el vector unitario normal a la superficie del elipsoide) tendremos, supuesto orientado el campo según el eje x ,

$$\sigma = \mathcal{E} v_x / 4\pi n^{(x)}.$$

Para una dirección arbitraria del campo exterior respecto de los ejes x , y , z , del elipsoide, resulta

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} v_i n^{-1}_{ik} \mathcal{E}_k = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{v_x}{n^{(x)}} \mathcal{E}_x + \frac{v_y}{n^{(y)}} \mathcal{E}_y + \frac{v_z}{n^{(z)}} \mathcal{E}_z \right].$$

4. El mismo problema para un disco plano circular (de radio a) situado paralelamente al campo*. Determinar el momento dipolar del disco.

* Para un disco colocado perpendicularmente al campo la cuestión sería trivial; el campo sigue siendo homogéneo en todo el espacio y sobre una y otra cara del disco se inducirán las cargas $\sigma = \pm \mathcal{E}/4\pi$.

Solución. Consideremos el disco como límite de un elipsoide de rotación cuando el semieje c tiende a cero. En estas condiciones, el coeficiente de despolarización a lo largo de dicho eje (el eje z) tiende a 1, y a lo largo de los ejes x e y , a cero según la ley

$$n^{(z)} = 1 - \pi c / 2a, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \pi c / 4a,$$

que se sigue de (4.34). La componente v_x del vector unitario normal a la superficie del elipsoide de rotación tiende a cero según la ley

$$v_x = \frac{x}{a^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x}{a^2} \frac{c^2}{z} = \frac{xc}{a^2} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Por ello, la densidad de carga será

$$\sigma = \frac{\mathcal{E} v_x}{4\pi n^{(x)}} = \frac{\mathcal{E} \rho \cos \phi}{\pi^2 \sqrt{(a^2 - \rho^2)}},$$

donde ρ , ϕ son las coordenadas polares en el plano del disco.

El momento dipolar del disco se determina por la fórmula (4.26) y es igual a

$$\mathcal{P} = 4a^3 \mathcal{E} / 3\pi.$$

Obsérvese que dicho momento es proporcional a a^3 , y no al «volumen» del disco $a^2 c$.

5. Determinar el potencial del campo fuera de un elipsoide de rotación conductor colocado con su eje de simetría paralelo a un campo exterior homogéneo.

Solución. Para un elipsoide de rotación alargado ($a > b = c$, el campo \mathcal{E} en la dirección de eje x) obtendremos, calculando la integral en la fórmula (4.24),

$$\phi = -\mathcal{E} x \left\{ 1 - \frac{\operatorname{artgh} \sqrt{[(a^2 - b^2)/(\xi + a^2)]} - \sqrt{[(a^2 - b^2)/(\xi + a^2)]}}{\operatorname{artgh} \sqrt{(1 - b^2/a^2)} - \sqrt{(1 - b^2/a^2)}} \right\}.$$

la coordenada ξ está ligada con las coordenadas x y $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ por la relación

$$\frac{\rho^2}{b^2 + \xi} + \frac{x^2}{a^2 + \xi} = 1,$$

siendo en el espacio exterior del elipsoide $0 \leq \xi < \infty$.

Para un elipsoide de rotación achatado ($a = b > c$) el campo \mathcal{E} está dirigido a lo largo del eje z . Debido a ello en la integral de (4.24) hay que substituir $s + a^2$ por $s + c^2$ y hacer $\phi_0 = -\mathcal{E} z$. El resultado que se obtiene es

$$\phi = -\mathcal{E} z \left\{ 1 - \frac{\sqrt{[(a^2 - c^2)/(\xi + c^2)]} - \operatorname{arctg} \sqrt{[(a^2 - c^2)/(\xi + c^2)]}}{\sqrt{(a^2/c^2 - 1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{(a^2/c^2 - 1)}} \right\},$$

donde la coordenada ξ está ligada con las coordenadas z y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ por la igualdad

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1.$$

6. El mismo problema si el eje de simetría del elipsoide es perpendicular al campo exterior.

Solución. Para un elipsoide de rotación alargado (campo en la dirección del eje z) es:

$$\phi = -\mathcal{E} x \left\{ 1 - \frac{\sqrt{[(\xi + a^2)/(\xi + b^2)]} - (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{artgh} \sqrt{[(a^2 - b^2)/(\xi + a^2)]}}{a/b^2 - (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{artgh} \sqrt{(1 - b^2/a^2)}} \right\}.$$

Para un elipsoide de rotación achatado (campo en la dirección del eje x) es:

$$\phi = -\mathcal{E} x \left\{ 1 - \frac{(a^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{[(a^2 - c^2)/(\xi + c^2)]} - \sqrt{[(\xi + c^2)/(\xi + a^2)]}}{(a^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{(a^2/c^2 - 1)} - c/a^2} \right\}.$$

7. Un campo homogéneo \mathcal{E} , orientado en el sentido del eje z (en el semiespacio $z < 0$) está limitado por un plano conductor, derivado a tierra, (plano $z = 0$) con una abertura circular. Determinar el campo y la distribución de cargas sobre el plano.

Solución. Consideremos el plano xy con una abertura circular de radio a en torno al origen de coordenadas como caso límite de un hiperboloide de rotación de una hoja

$$\frac{\rho^2}{a^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

cuando $|\eta| \rightarrow 0$. Estos hiperboloides constituyen una de las familias de superficies de coordenadas de un sistema de coordenadas esferoidales achatadas con $c = 0$. La coordenada cartesiana z se expresa según (4.9) en función de ξ y η por $z = \sqrt{\xi|\eta|}/a$, donde la raíz $\sqrt{\xi}$ debe tomarse con el signo $+$ o $-$ según se trate del semiplano superior o inferior, respectivamente.

Busquemos la solución entre las expresiones de la forma $\phi = -\mathcal{E}zF(\xi)$, con lo que para la función $F(\xi)$ se obtiene:

$$F(\xi) = \text{const} \times \int \frac{d\xi}{\xi^{\frac{1}{2}}(\xi + a^2)} = \text{const} \times \left[\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \text{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right];$$

(la constante de integración se toma igual a cero de acuerdo con la condición $\phi = 0$ para $z \rightarrow +\infty$, es decir, para $\sqrt{\xi} \rightarrow +\infty$). En estas condiciones, el arctg de un argumento negativo debe entenderse en el sentido de

$$\text{arctg}(a/\sqrt{\xi}) = \pi - \text{arctg}(a/\sqrt{\xi}),$$

y no como $-\text{arctg}(a/\sqrt{\xi})$. De no proceder así, el potencial experimentaría una discontinuidad en el plano de la abertura ($\xi = 0$). El coeficiente constante lo elegimos de modo que cuando $z \rightarrow -\infty$ (es decir, cuando $\sqrt{\xi} \rightarrow -\infty$, $\text{arctg}(a/\sqrt{\xi}) \rightarrow \pi$) sea $\phi \rightarrow -\mathcal{E}z$ y obtenemos finalmente

$$\phi = -\frac{\mathcal{E}z}{\pi} \left[\text{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right] = -\frac{\mathcal{E}}{\pi} \sqrt{|\eta|} \left[\frac{\sqrt{\xi}}{a} \text{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - 1 \right].$$

Sobre la superficie del conductor $\eta = 0$ y el potencial se anula, como debía ser.

A grandes distancias $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ de la abertura se tiene $\xi \cong r^2$ y el potencial (en el semiespacio superior) toma la forma

$$\phi \cong \frac{\mathcal{E}a^2}{3\pi} \frac{\sqrt{-\eta}}{\xi} = \mathcal{E}a^3 z / 3\pi r^3,$$

es decir, el campo es del tipo dipolar y corresponde al momento dipolar $\mathcal{P} = \mathcal{E}a^3/3\pi$.

La intensidad del campo disminuye como $1/r^3$ y, en consecuencia, el flujo del mismo a través de una superficie infinitamente alejada (en el semiespacio $z > 0$) es nulo. Esto significa que todas las líneas de fuerza que pasan a través de la abertura mueren sobre la cara superior del plano conductor.

La distribución de las cargas sobre éste se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma = \mp \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = \mp \frac{a}{4\pi\sqrt{\xi}} \frac{\partial \phi}{\partial \sqrt{-\eta}} = \pm \frac{\mathcal{E}}{4\pi^2} \left[\text{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right],$$

donde los signos \mp se refieren a las caras superior e inferior del plano. De acuerdo con la fórmula

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1,$$

que liga ξ con ρ , z , sobre el plano $z = 0$ tenemos $\sqrt{\xi} = \pm \sqrt{\rho^2 - a^2}$. Así, pues, la distribución de cargas sobre la cara inferior del plano conductor viene dada por la fórmula

$$\sigma = -\frac{\mathcal{E}}{4\pi^2} \left(\pi - \arcsen \frac{a}{\rho} + \frac{a}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)}} \right).$$

Cuando $\rho \rightarrow \infty$ tenemos $\sigma = -\mathcal{E}/4\pi$, como debía ser. En cambio, sobre la cara superior se tiene

$$\sigma = -\frac{\mathcal{E}}{4\pi^2} \left(\frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} - \arcsen \frac{a}{\rho} \right).$$

8. El mismo problema si la abertura en el plano conductor tiene la forma de una rendija de anchura $2b$.

Solución. El plano xy , con la rendija a lo largo del eje x , lo consideraremos como caso límite de un cilindro hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1$$

cuando $|\eta| \rightarrow 0$. Estos cilindros hiperbólicos constituyen una de las familias de superficies de coordenadas elipsoidales cuando $a \rightarrow \infty$, $c \rightarrow 0$. La coordenada cartesiana $z = \sqrt{|\eta|}/b$.

Al igual que en el problema 7 buscaremos la solución entre las expresiones de la forma $\phi = -\mathcal{E}zF(\xi)$ y para la función F obtendremos:

$$F = \text{const} \times \int \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{(\xi + b^2)}}.$$

El coeficiente y la constante de integración se determinan aquí por las condiciones $F = 0$ y $F = 1$, respectivamente, para $z \rightarrow +\infty$ y $z \rightarrow -\infty$ (es decir, cuando $\sqrt{\xi} \rightarrow +\infty$ y $\sqrt{\xi} \rightarrow -\infty$) y finalmente resulta

$$\phi = \frac{\mathcal{E}}{2b} [\sqrt{(\xi + b^2)} \mp \sqrt{\xi}] \sqrt{|\eta|},$$

donde tomamos para la raíz $\sqrt{\xi}$ el valor positivo y los dos signos $-$ y $+$ corresponden a las regiones $z > 0$ y $z < 0$.

A grandes distancias de la rendija, en el semiespacio superior tenemos $\xi \cong y^2 + z^2 = r^2$ y el potencial

$$\phi \cong \frac{1}{2} b \mathcal{E} \sqrt{|\eta|/\xi} = \frac{1}{2} \mathcal{E} b^2 z / r^2,$$

es decir, el campo coincide con el de un dipolo bidimensional con momento dipolar $\mathcal{E}b^2/8$ por unidad de longitud de la rendija (véase la fórmula en el problema 2 del § 3).

La distribución de cargas sobre el plano conductor viene dada por la fórmula

$$\sigma = -\frac{\mathcal{E}}{8\pi} \left(\frac{y}{\sqrt{(y^2 - b^2)}} \mp 1 \right).$$

§ 5. Fuerzas que actúan sobre un conductor

En un campo eléctrico, sobre la superficie de un conductor actúan determinadas fuerzas debidas a aquél. Es fácil calcularlas de la siguiente manera.

La densidad de flujo de impulso en un campo eléctrico en el vacío viene determinada, como es sabido, por el tensor de tensiones de Maxwell*:

$$-\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} - E_i E_k \right).$$

* Véase *Teoría clásica de los campos*, § 33; $-\sigma_{ik}$ se designa allí por $T_{\alpha\beta}$.

En el presente caso aplicamos esta fórmula a una superficie que no coincide exactamente con la superficie del cuerpo, sino a una un tanto alejada respecto de la misma a fin de eliminar la influencia de la estructura del campo cerca de la superficie del cuerpo (cf. pág. 3).

En cuanto a la fuerza que actúa sobre el elemento df de superficie del cuerpo, no es sino el flujo de impulso que «incide» sobre él desde el exterior, es decir, es igual a $\sigma_{ik}df_k = \sigma_{ik}n_kdf$ (se ha cambiado el signo debido a que el vector normal \mathbf{n} está orientado hacia el exterior del cuerpo, no hacia su interior). La cantidad $\sigma_{ik}n_k$ es, por consiguiente, la fuerza \mathbf{F}_s por cm^2 de área. Teniendo en cuenta que en la superficie de un metal el campo \mathbf{E} tiene sólo la componente normal, obtendremos

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{n}E^2/8\pi, \quad (5.1)$$

o bien, introduciendo la densidad superficial de carga σ ,

$$\mathbf{F}_s = 2\pi\sigma^2\mathbf{n} = \frac{1}{2}\sigma\mathbf{E}.$$

Llegamos así a la conclusión de que sobre la superficie de un conductor actúan fuerzas de «presión negativa» dirigidas en el sentido de la normal exterior a la superficie y cuyo módulo es igual a la densidad de energía del campo.

La fuerza total \mathbf{F} que actúa sobre el conductor se obtiene integrando la expresión (5.1) de la fuerza sobre toda la superficie del mismo:

$$\mathbf{F} = \oint (E^2/8\pi) d\mathbf{t}. \quad (5.2)$$

Sin embargo, de ordinario es más conveniente calcular esta cantidad aplicando las reglas generales de la mecánica, es decir, derivando la expresión de la energía \mathcal{U} . En efecto, la fuerza que actúa sobre el conductor a lo largo del eje de coordenadas q es $-\partial\mathcal{U}/\partial q$, donde la derivada hay que entenderla en el sentido de variación de la energía al desplazar paralelamente el cuerpo dado como un todo a lo largo del eje q . Para ello, la energía debe expresarse en función de las cargas sobre los conductores (las fuentes del campo) y la derivación se efectúa manteniendo constantes dichas cargas. Caracterizando estas circunstancias mediante el subíndice e , escribiremos

$$F_q = -(\partial\mathcal{U}/\partial q)_e. \quad (5.3)$$

Análogamente, la proyección sobre un eje cualquiera del momento de las fuerzas que actúan sobre el conductor es igual a

$$K = -(\partial\mathcal{U}/\partial\psi)_e, \quad (5.4)$$

donde ψ es el ángulo de rotación del cuerpo como un todo en torno del eje dado.

En cambio, si la energía se expresa en función de los potenciales, y no en función de las cargas de los conductores, el problema de calcular las fuerzas a partir de ella exige un tratamiento especial. Ello se debe a que para mantener el conductor (durante su desplazamiento) a un potencial constante es necesario acudir a cuerpos adicionales. Es posible, por ejemplo, mantener constante el potencial del conductor conectándolo con otros conductores que posean una capacidad muy grande («depósitos de cargas»). Al adquirir la carga e_a , el conductor la toma del «depósito», cuyo potencial ϕ_a no varía debido a su gran capacidad. Sin embargo, sí cambia la energía del «depósito», disminuyendo en $e_a\phi_a$. Al cargar todo el sistema de conductores

con cargas e_a , la energía de los «depósitos» conectados con ellos varía en total en $-\sum_a e_a \phi_a$. Ahora bien, en la expresión de \mathcal{U} interviene solamente la energía de los conductores considerados, pero no la energía de los «depósitos». En este sentido cabe decir que \mathcal{U} se refiere a un sistema no cerrado energéticamente. De esta manera, para el sistema de conductores cuyos potenciales se mantienen constantes, el papel de energía mecánica lo representa no \mathcal{U} , sino la magnitud

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \sum_a e_a \phi_a. \quad (5.5)$$

Substituyendo aquí (2.2), encontramos que \mathcal{U} y $\tilde{\mathcal{U}}$ difieren solamente en el signo:

$$\tilde{\mathcal{U}} = -\mathcal{U}. \quad (5.6)$$

La fuerza F_q se obtiene derivando $\tilde{\mathcal{U}}$ respecto de q manteniendo constantes los potenciales, es decir,

$$F_q = -(\partial \tilde{\mathcal{U}} / \partial q)_\phi = (\partial \mathcal{U} / \partial q)_\phi. \quad (5.7)$$

Así pues, las fuerzas que actúan sobre el conductor pueden obtenerse derivando \mathcal{U} bien sea conservando constantes las cargas, bien sea manteniendo constantes los potenciales, con la única diferencia que la derivada debe tomarse en el primer caso con el signo menos, y en el segundo, con el signo más.

Este mismo resultado se hubiera podido obtener también de manera más formal partiendo de la identidad diferencial

$$d\mathcal{U} = \sum_a \phi_a de_a - F_q dq, \quad (5.8)$$

en la cual \mathcal{U} se considera función de las cargas de los conductores y de las coordenadas q ; con esta identidad se expresa el hecho de que las derivadas $\partial \mathcal{U} / \partial e_a = \phi_a$ y $\partial \mathcal{U} / \partial q = -F_q$. Pasando a las variables ϕ_a en vez de e_a , se obtiene aquí

$$d\tilde{\mathcal{U}} = -\sum_a e_a d\phi_a - F_q dq, \quad (5.9)$$

de donde se sigue precisamente (5.7).

Al final del § 2 se consideró la energía de un conductor en un campo eléctrico homogéneo exterior. La fuerza total que actúa entonces sobre el conductor es igual a cero, naturalmente. Pero la expresión de la energía (2.14) puede utilizarse para determinar la fuerza que actúa sobre un conductor en un campo \mathfrak{E} casi homogéneo, es decir, en un campo que varía poco a lo largo de distancias que son del orden de las dimensiones del cuerpo. En un campo de estas características, es posible aún calcular la energía en primera aproximación según la fórmula (2.14) y la fuerza \mathbf{F} se determina como gradiente de esta energía:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \mathcal{U} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} V \text{ grad } (\mathfrak{E}_i \mathfrak{E}_k). \quad (5.10)$$

En lo que concierne al momento total de las fuerzas \mathbf{K} , este par es, en general, no nulo, incluso en el caso de un campo exterior homogéneo. Según las reglas generales de la mecánica, \mathbf{K} se puede determinar considerando una rotación virtual

infinitésima del cuerpo; la variación de la energía en dicha rotación está ligada con \mathbf{K} por la igualdad $\delta \mathcal{U} = -\mathbf{K} \cdot \delta \boldsymbol{\psi}$, donde $\delta \boldsymbol{\psi}$ es el ángulo de giro. La rotación del cuerpo de ángulo $\delta \boldsymbol{\psi}$ en un campo homogéneo es equivalente a una rotación del campo de ángulo $-\delta \boldsymbol{\psi}$ respecto del primero. La variación del campo en estas condiciones es $\delta \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\delta \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}$ y la variación de la energía vale

$$\delta \mathcal{U} = (\partial \mathcal{U} / \partial \boldsymbol{\mathcal{E}}) \cdot \delta \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\delta \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \partial \mathcal{U} / \partial \boldsymbol{\mathcal{E}}.$$

Pero $\partial \mathcal{U} / \partial \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\boldsymbol{\mathcal{P}}$, como puede verse comparando las fórmulas (2.13) y (2.14). Por lo tanto, $\delta \mathcal{U} = -\boldsymbol{\mathcal{P}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \delta \boldsymbol{\psi}$, de donde

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\mathcal{P}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad (5.11)$$

de acuerdo con la expresión general ya conocida por la teoría del campo en el vacío.

Si la fuerza y el momento totales que actúan sobre el conductor son nulos, el conductor se conserva en reposo en el campo y en primer término se manifiestan los efectos ligados con la deformación del cuerpo (efectos que constituyen la llamada *electrostricción*). Las fuerzas (5.1) que actúan sobre la superficie del conductor conducen a una modificación de su forma y de su volumen. En ella, y debido al carácter expansivo de las fuerzas, el volumen del cuerpo aumenta. Una determinación completa de la deformación exige resolver las ecuaciones de la teoría de la elasticidad para la distribución dada de fuerzas (5.1) sobre la superficie del cuerpo. Sin embargo, si solamente nos interesa la variación de volumen, el problema se puede resolver de manera muy simple.

Para ello hay que tener en cuenta que si la deformación es pequeña (como en efecto tiene lugar en la electrostricción), la influencia de la variación de la forma sobre el cambio de volumen es un efecto de segundo orden de magnitud. Por lo tanto, en primera aproximación se puede considerar la variación de volumen como una deformación sin cambio de la forma, es decir, como una expansión en todas direcciones bajo la influencia de una cierta presión en exceso efectiva Δp distribuida uniformemente por la superficie del cuerpo y que substituye a la distribución exacta definida por (5.1). La variación relativa del volumen se obtiene multiplicando Δp por el coeficiente de dilatación del cuerpo. La presión Δp se determina, según una fórmula conocida, como derivada de la energía eléctrica del cuerpo \mathcal{U} respecto de su volumen: $\Delta p = -\partial \mathcal{U} / \partial V^*$.

Supongamos que el campo deformante es creado por el propio conductor cargado. Entonces la energía $\mathcal{U} = e^2 / 2C$, y la presión vale

$$\Delta p = -\frac{1}{2} e^2 \partial C^{-1} / \partial V.$$

Para una forma dada del cuerpo, su capacidad (que tiene las dimensiones de una

* La magnitud así definida es la fuerza expansiva que actúa sobre la superficie del lado del propio cuerpo; en cambio, la presión que actúa sobre él desde el exterior se obtiene cambiando el signo de dicha magnitud.

longitud) es proporcional a sus dimensiones lineales, es decir, proporcional a $V^{1/3}$. Encontramos por ello

$$\Delta p = e^2/6CV = e\phi/6V. \quad (5.12)$$

Pero si un conductor no cargado se encuentra en un campo exterior homogéneo \mathcal{E} , su energía viene dada por la fórmula (2.14). Por consiguiente, en este caso, la presión expansiva es

$$\Delta p = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\mathcal{E}_i\mathcal{E}_k. \quad (5.13)$$

PROBLEMAS

1. Un pequeño conductor cuya capacidad es c (del orden de magnitud de sus dimensiones) se encuentra a una distancia r del centro de un conductor esférico cuyo radio a es grande ($a \gg c$). La distancia $r - a$ desde el conductor a la superficie de la esfera se supone grande tan sólo comparada con c , pero no en comparación con a . Ambos conductores están unidos entre sí por un conductor fino, de modo que se encuentran a un mismo potencial ϕ . Determinar la fuerza de repulsión mutua entre los conductores.

Solución. Dado que el conductor c es pequeño, se puede considerar que su potencial se compone del potencial $\phi a/r$ que se crea a la distancia r de la esfera grande y del potencial propio e/c creado por la carga e que se encuentra sobre el mismo. De aquí se sigue $\phi = \phi a/r + e/c$ o $e = c\phi(1 - \frac{a}{r})$.

La fuerza de interacción F que se busca se determina como fuerza de Coulomb repulsiva entre la carga e del conductor c y la carga $a\phi$ de la esfera:

$$F = \frac{ac\phi^2}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

(esta expresión es correcta salvo términos de orden superior respecto de c). Así pues, el pequeño conductor se separa de la esfera impulsado por una fuerza que disminuye al acercarlo a su superficie.

2. Una esfera conductora cargada se ha dividido en dos mitades. Determinar la fuerza con que se repelen entre sí los dos hemisferios*.

Solución. Imaginemos que los dos hemisferios se encuentran separados por una hendidura infinitamente estrecha y determinemos la fuerza F que actúa sobre cada uno de ellos integrando sobre su superficie la fuerza $(E^2/8\pi) \cos \theta$ (proyección de la fuerza (5.1) sobre la dirección perpendicular al plano que separa los dos hemisferios). En la hendidura que los separa es $E = 0$ y sobre la superficie exterior se tiene $E = e/a^2$, donde a es el radio de la esfera y e la carga total sobre ella. El resultado que se obtiene es

$$F = e^2/8a^2.$$

3. Lo mismo para una esfera no cargada que se encuentra en un campo homogéneo exterior perpendicular al plano de la sección.

La solución es análoga a la del problema que precede con la diferencia de que sobre la superficie de la esfera es $E = 3\mathcal{E} \cos \theta$ (de acuerdo con el problema 1 del § 3). La fuerza buscada vale

$$F = 9a^2\mathcal{E}^2/16.$$

* En los problemas 2 y 3 se supone que los dos hemisferios se encuentran a un mismo potencial.

4. Determinar las variaciones de volumen y de forma de una esfera conductora en un campo eléctrico homogéneo exterior.

Solución. La variación de volumen $\Delta V/V = \Delta p/K$, donde K es el módulo de dilatación del cuerpo y Δp se determina por la fórmula (5.13). Para una esfera es $\alpha_{ik} = \delta_{ik} \alpha = \frac{3}{4\pi} \delta_{ik}$ (con α dada en el problema 1 del § 3), de modo que

$$\Delta V/V = 3\mathcal{E}^2/8\pi K.$$

Como resultado de la deformación, la esfera se transforma en un elipsoide alargado. Para determinar la excentricidad de este elipsoide cabe considerar la deformación como una deformación homogénea de cizalla en todo el volumen del cuerpo, de la misma manera que, para calcular la variación del volumen total, se consideró una deformación homogénea de dilatación.

La condición de equilibrio del cuerpo deformado se puede formular como condición de que sea mínima la suma de las energías electrostática y elástica. La primera de ellas, según las fórmulas (2.12) y (4.26), es igual a

$$\mathcal{U}_{es} = -\frac{V}{8\pi n} \mathcal{E}^2 \approx -\frac{3V\mathcal{E}^2}{8\pi} - \frac{3V}{10\pi} \frac{a-b}{R} \mathcal{E}^2,$$

donde R es el radio inicial de la esfera, a y b , los semiejes del elipsoide, y

$$n \approx \frac{1}{3} - 4(a-b)/15R$$

es el coeficiente de despolarización (véase (4.33)).

En virtud de la simetría axial de la deformación (en torno de la dirección del campo, eje x) son diferentes de cero tan sólo las componentes u_{xx} y $u_{yy} = u_{zz}$ del tensor de deformación. Dado que, por otra parte, consideramos el equilibrio respecto de un cambio de forma, se puede suponer que en él no varía el volumen, es decir, que $u_{ii} = 0$. Por ello la energía elástica* se puede escribir en la forma (σ_{ik} es el tensor de tensiones elásticas).

$$\mathcal{U}_{el} = \frac{1}{2} u_{ik} \sigma_{ik} V = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})(u_{xx} - u_{yy}) V,$$

Tenemos

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2\mu(u_{xx} - u_{yy}),$$

donde μ es el módulo de rigidez del cuerpo, y $u_{xx} - u_{yy} = (a-b)/R$. Por consiguiente,

$$\mathcal{U}_{el} = \frac{3}{2} \mu (a-b)^2 V / R^2.$$

Determinando el mínimo de la suma $\mathcal{U}_{es} + \mathcal{U}_{el}$ respecto de $a-b$, obtendremos

$$(a-b)/R = 9\mathcal{E}^2/40\pi\mu.$$

5. Hallar la relación entre la frecuencia y la longitud de las ondas que se propagan por la superficie plana cargada de un conductor líquido (en el campo de la gravedad). Hallar la condición de estabilidad de esta superficie (*J. Frenkel*, 1953).

Solución. Supongamos que la onda se propaga a lo largo del eje x , con el eje z dirigido verticalmente hacia arriba. El desplazamiento vertical de los puntos de la superficie del líquido es $\zeta = ae^{i(kx - \omega t)}$. Para la superficie inmóvil, la intensidad del campo sobre ella vale $E_z = E = 4\pi\sigma_0$, y su potencial $\phi = -4\pi\sigma_0 z$, donde σ_0 es la densidad superficial de carga. El potencial del campo sobre la superficie que oscila lo escribiremos en la forma

$$\phi = -4\pi\sigma_0 z + \phi_1,$$

con

$$\phi_1 = \text{const} \times e^{i(kx - \omega t)} e^{-kz},$$

donde ϕ_1 es una pequeña corrección que satisface la ecuación $\Delta\phi_1 = 0$ y que se anula para $z \rightarrow \infty$. Sobre la propia superficie del conductor el potencial debe tener un valor constante que tomamos como cero; de aquí se sigue

$$\phi_1 = 4\pi\sigma_0 \zeta \quad \text{para } z=0.$$

* Véase VII, Teoría de la elasticidad, § 4.

Según (5.1) sobre la superficie cargada del líquido actúa una presión negativa adicional que, salvo términos de orden superior al primero respecto de ϕ_1 , es igual a

$$E^2/8\pi \cong E_z^2/8\pi \cong 2\pi\sigma_0^2 + [k\sigma_0\phi_1]_{z=0} = 2\pi\sigma_0^2 + 4\pi\sigma_0^2 k\zeta.$$

El término constante $2\pi\sigma_0^2$ carece de importancia (se le puede incluir en la presión exterior constante).

El estudio del movimiento hidrodinámico en la onda es por completo análogo al de la teoría de las ondas capilares*, fenómeno del que difiere solamente en la existencia de la presión adicional indicada más arriba. Sobre la superficie del líquido tenemos la condición de contorno

$$\rho g\zeta + \rho[\partial\Phi/\partial t]_{z=0} - \alpha\partial^2\zeta/\partial x^2 - 4\pi\sigma_0^2 k\zeta = 0,$$

donde α es el coeficiente de tensión superficial, ρ la densidad del líquido y Φ el potencial de su velocidad. Φ y ζ están ligados entre sí, además, por la relación

$$\partial\zeta/\partial t = [\partial\Phi/\partial x]_{z=0}.$$

Substituyendo en estas dos igualdades $\zeta = ae^{i(kx-\omega t)}$ y $\Phi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ y eliminando a y A obtendremos la relación buscada entre k y ω :

$$\omega^2 = k(g\rho - 4\pi\sigma_0^2 k + \alpha k^2)/\rho. \quad (1)$$

Para que la superficie del líquido sea estable, la frecuencia ω debe ser real para valores cualesquiera de k (en caso contrario, aparecerían valores ω complejos con parte imaginaria positiva y el factor $e^{-i\omega t}$ crecería sin límites). La condición de que sea positivo el segundo miembro de (1) se escribe: $(4\pi\sigma_0^2)^2 - 4g\rho\alpha < 0$, de donde

$$\sigma_0^4 < g\rho\alpha/4\pi^2.$$

Ésta es precisamente la condición de estabilidad.

6. Hallar la condición de estabilidad para una gota esférica cargada (Rayleigh, 1882).

Solución. La suma de las energías electrostática y superficial de la gota vale

$$\mathcal{U} = e^2/2C + \alpha S,$$

donde α es el coeficiente de tensión superficial del líquido, C la capacidad de la gota, y S el área de su superficie. La inestabilidad aparece (al aumentar e) en relación con el alargamiento de la esfera para transformarse en elipsoide y viene determinada por el momento en que \mathcal{U} pasa a ser función decreciente de la excentricidad (para un volumen dado de la gota). La forma esférica corresponde siempre a un extremo de \mathcal{U} ; por ello, la condición de estabilidad resulta ser:

$$[\partial^2\mathcal{U}/\partial(a-b)^2]_{a=b} > 0,$$

donde a , b son los semiejes del elipsoide y la derivación se efectúa para $ab^2 = \text{const.}$ Utilizando la conocida fórmula que da la superficie de un elipsoide de revolución y la forma (4.18) para su capacidad, se obtiene después de un cálculo bastante largo,

$$e^2 < 16\pi\alpha^3\alpha.$$

* Véase, VI, *Hidrodinámica*, §61.

CAPÍTULO II

ELECTROSTÁTICA DE LOS DIELECTRICOS

§ 6. Campo electrostático en los dieléctricos

Pasemos ahora al estudio de un campo eléctrico constante en otra categoría de medios materiales —en los dieléctricos.

La propiedad fundamental de los dieléctricos consiste en la imposibilidad de hacer circular por ellos una corriente constante. Por esto, en contraste con los conductores, la intensidad de un campo eléctrico constante en los dieléctricos no tiene en absoluto por qué ser igual a cero y debemos hallar las ecuaciones mediante las cuales se describe este campo. Una de ellas se obtiene promediando la ecuación (1.3) y se escribe como antes

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (6.1)$$

En cuanto a la segunda ecuación, ésta se obtiene promediando la ecuación $\text{div } \mathbf{e} = 4\pi\rho$:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}. \quad (6.2)$$

Supondremos que dentro del material dieléctrico no se ha introducido desde el exterior carga adicional alguna; éste es el caso más frecuente e importante. Entonces la carga total en todo el volumen del dieléctrico se conserva igual a cero, y aun después de introducirlo en un campo eléctrico se tiene:

$$\int \bar{\rho} dV = 0.$$

Esta ecuación integral, que debe cumplirse para un cuerpo de forma cualquiera, significa que la densidad media de las cargas puede escribirse en forma de divergencia de un cierto vector, que se suele designar por \mathbf{P} :

$$\bar{\rho} = -\text{div } \mathbf{P}, \quad (6.3)$$

siendo fuera del cuerpo $\mathbf{P} = 0$. En efecto, integrando en el volumen limitado por una superficie que encierra al cuerpo y los puntos de la cual son todos exteriores al mismo, obtendremos

$$\int \bar{\rho} dV = - \int \text{div } \mathbf{P} dV = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

La magnitud \mathbf{P} se llama vector *polarización dieléctrica* (o, simplemente, *polarización*) del cuerpo: un dieléctrico en el cual \mathbf{P} es diferente de cero se dice que está *polarizado*. Junto con la densidad volumétrica (6.3), el vector \mathbf{P} determina también la densidad superficial σ de las cargas distribuidas por la superficie del dieléctrico polarizado. Si se integra la fórmula (6.3) en un elemento de volumen limitado entre dos superficies unidad infinitamente próximas situadas a uno y otro lado de la superficie del dieléctrico y se tiene en cuenta que sobre la superficie exterior es $\mathbf{P} = 0$, se obtiene (cf. la deducción de la fórmula (1.9)):

$$\sigma = P_n, \quad (6.4)$$

donde P_n es la componente del vector \mathbf{P} respecto de la normal exterior a la superficie.

Para poner de manifiesto el sentido físico de la propia magnitud \mathbf{P} , consideremos el momento dipolar total de todas las cargas interiores en el dieléctrico; en contraste con la carga total, esta cantidad no tiene por qué ser nula. Por definición, el momento dipolar viene dado por la integral

$$\int \mathbf{r} \bar{\rho} dV.$$

Substituyendo en vez de $\bar{\rho}$ la expresión (6.3) e integrando de nuevo en un volumen que contiene al cuerpo en su interior, obtendremos

$$\int \mathbf{r} \bar{\rho} dV = - \int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV = - \oint \mathbf{r} (d\mathbf{f} \cdot \mathbf{P}) + \int (\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{r} dV.$$

La integral de superficie se anula, y en la segunda tenemos $(\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{r} = \mathbf{P}$, de modo que

$$\int \mathbf{r} \bar{\rho} dV = \int \mathbf{P} dV. \quad (6.5)$$

Así pues, el vector polarización representa el momento dipolar (o como suele decirse, el *momento eléctrico*) por unidad de volumen del dieléctrico*.

Substituyendo (6.3) en (6.2), obtendremos la segunda ecuación del campo electrostático en la forma:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (6.6)$$

donde se ha introducido la nueva magnitud \mathbf{D} definida por

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (6.7)$$

llamada *desplazamiento eléctrico*. La ecuación (6.6) se obtuvo promediando la densidad de las cargas que forman parte de la composición del dieléctrico. Pero si se introducen en él desde el exterior cargas adicionales respecto a las de su propia naturaleza (las llamaremos *cargas extrañas*), al segundo miembro de la ecuación (6.6) hay que añadir su densidad:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ex}}. \quad (6.8)$$

* Hay que hacer notar que la igualdad (6.3) dentro del dieléctrico y la condición $\mathbf{P} = 0$ fuera del mismo no determinan todavía por sí solas la magnitud \mathbf{P} de manera unívoca; en el interior del dieléctrico puede sumarse a \mathbf{P} cualquier vector de la forma $\operatorname{rot} \mathbf{f}$. Únicamente el establecimiento de la relación que lo liga con el momento dipolar determina en definitiva al vector \mathbf{P} .

Sobre la superficie de separación de dos dieléctricos distintos deben cumplirse determinadas condiciones de contorno. Una de estas condiciones es consecuencia de la ecuación $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Si la superficie de separación es homogénea por sus propiedades físicas*, esta condición impone la continuidad de la componente tangencial de la intensidad del campo:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}; \quad (6.9)$$

(cf. la deducción de la condición (1.7)). En cuanto a la segunda condición, ésta se sigue de la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 0$ e impone la continuidad de la componente del desplazamiento eléctrico normal a la superficie:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (6.10)$$

En efecto, un salto de la componente normal $D_n = D_z$ supondría para la derivada $\partial D_z / \partial z$ (y con ella también para $\text{div } \mathbf{D}$) un valor infinito.

Sobre la frontera entre un dieléctrico y un conductor se tiene $\mathbf{E}_t = 0$ y la condición relativa a la componente normal se deduce de (6.8):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma, \quad (6.11)$$

donde σ es la densidad de las cargas sobre la superficie del conductor.

§ 7. La permitividad

Para que las ecuaciones (6.1) y (6.6) constituyan un sistema completo de ecuaciones para la determinación del campo eléctrico hay que añadirles todavía una relación que ligue entre sí el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y la intensidad del campo \mathbf{E} . En la inmensa mayoría de casos puede suponerse que esta dependencia es lineal. Corresponde entonces al primer término del desarrollo de \mathbf{D} en potencias de \mathbf{E} y su aplicabilidad se debe a que los campos eléctricos exteriores son pequeños en comparación con los campos moleculares internos.

La dependencia lineal de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} toma una forma particularmente simple en el importante caso de los dieléctricos isótropos. Es evidente que en un dieléctrico isótropo los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} deben tener la misma dirección. Por esta razón, su dependencia lineal se reduce a la mera proporcionalidad**

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (7.1)$$

* Esto es, respecto de la composición de los cuerpos en contacto, de la temperatura, etc. Si el dieléctrico es un cristal, la dirección cristalográfica de la superficie debe ser constante, esto es, la superficie ha de ser un plano.

** Sin embargo, hay que hacer notar que dicha dependencia, que supone la anulación de \mathbf{D} simultáneamente con la de \mathbf{E} , es válida, rigurosamente hablando, tan sólo en los dieléctricos homogéneos por sus propiedades físicas (composición, temperatura, etc.). En los cuerpos no homogéneos, \mathbf{D} puede tener valores diferentes de cero incluso cuando $\mathbf{E} = 0$, viniendo determinado entonces por los gradientes de las magnitudes termodinámicas que varían en el interior del cuerpo. Estos términos, con todo, son muy pequeños y de hecho no representan en la práctica papel alguno. Por ello, utilizaremos en lo que sigue la relación (7.1) incluso para cuerpos no homogéneos.

El coeficiente ϵ se llama *permeabilidad dieléctrica* o *permitividad* de la materia y es función de su estado termodinámico.

Junto con el desplazamiento eléctrico, es proporcional al campo también la polarización:

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} \equiv (\epsilon - 1) \mathbf{E} / 4\pi. \quad (7.2)$$

La magnitud κ se llama *coeficiente de polarización* de la substancia (o su *susceptibilidad eléctrica*). Más adelante (§ 14) se probará que la permitividad es siempre mayor que la unidad; según esto, la polarizabilidad es siempre positiva. La polarizabilidad de un medio enrarecido (un gas) puede considerarse proporcional a su densidad.

Las condiciones de contorno (6.9) y (6.10) sobre la superficie de separación de dos dieléctricos isótropos toman la forma:

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}. \quad (7.3)$$

Así pues, la componente normal de la intensidad del campo experimenta un salto, variando de manera inversamente proporcional a las permitividades de los dos medios.

En un dieléctrico homogéneo se tiene $\epsilon = \text{const}$ y entonces de la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 0$ se sigue que también $\text{div } \mathbf{P} = 0$. Teniendo en cuenta la definición (6.3), esto significa que la densidad volumétrica de carga en un cuerpo de estas características es igual a cero (en cambio, la densidad superficial (6.4) es, en general, no nula). Por el contrario, si el dieléctrico no es homogéneo, se tiene una densidad volumétrica de carga diferente de cero.

$$\bar{\rho} = -\text{div } \mathbf{P} = -\text{div} \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \mathbf{D} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{D} \cdot \text{grad} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \mathbf{E} \cdot \text{grad } \epsilon.$$

Si se introduce el potencial del campo eléctrico de acuerdo con $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$, la ecuación (6.1) queda satisfecha automáticamente y la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \epsilon \mathbf{E} = 0$ da

$$\text{div}(\epsilon \text{ grad } \phi) = 0. \quad (7.4)$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación ordinaria de Laplace tan sólo en un medio dieléctrico homogéneo. Las condiciones de contorno (7.3) pueden escribirse también en la forma de condiciones impuestas al potencial:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2, \\ \epsilon_1 \partial \phi_1 / \partial n &= \epsilon_2 \partial \phi_2 / \partial n; \end{aligned} \quad (7.5)$$

(la condición de continuidad de las derivadas tangenciales del potencial es equivalente a la condición de continuidad del propio ϕ).

En un medio dieléctrico homogéneo a trozos, la ecuación (7.4) se reduce a la ecuación de Laplace $\Delta \phi = 0$ en cada porción homogénea, de modo que las permitividades intervienen en la solución del problema únicamente en virtud de la aplicación de las condiciones (7.5). Pero estas condiciones contienen tan sólo la razón

de las permitividades de los dos medios en contacto. En particular, la solución del problema electrostático para un cuerpo dieléctrico con una permitividad ϵ_2 rodeado por un medio de permitividad ϵ_1 se reduce, por consiguiente, al mismo problema para un cuerpo con permitividad ϵ_2/ϵ_1 que se encuentra en el vacío.

Consideremos la cuestión de cómo varían los resultados obtenidos en los párrafos que preceden relativos al campo electrostático de los conductores si éstos se encuentran, no en el vacío, sino sumergidos en un medio dieléctrico homogéneo e isótropo. En ambos casos la distribución del potencial viene descrita por la ecuación $\Delta\phi = 0$ con la condición de contorno de que ϕ sea constante sobre la superficie del conductor y la única diferencia se reduce a que, en vez de la relación $E_n = -\frac{\partial\phi}{\partial n} = 4\pi\sigma$ con la densidad superficial de carga, ahora será:

$$D_n = -\epsilon \partial\phi/\partial n = 4\pi\sigma. \quad (7.6)$$

Vemos así que la solución del problema relativo al campo de un conductor cargado en el vacío permite hallar la correspondiente al mismo problema en un medio dieléctrico mediante un cambio formal de los potenciales y de las cargas, bien sea $\phi \rightarrow \epsilon\phi$, $e \rightarrow e$, bien sea $\phi \rightarrow \phi$, $e \rightarrow e/\epsilon$. Para cargas dadas de los conductores, el potencial y la intensidad del campo disminuyen quedando divididos por ϵ en relación con sus valores para el campo en el vacío; esta debilitación del campo puede interpretarse intuitivamente como resultado de un «apantallamiento» parcial de la carga del conductor por las cargas superficiales del dieléctrico polarizado en contacto con él. Pero si se mantienen constantes los potenciales de los conductores, el campo se conserva invariable, si bien las cargas de los conductores quedan multiplicadas por ϵ .

Finalmente, haremos observar que en electrostática es posible considerar formalmente un conductor (sin carga) como un cuerpo cuya permitividad es infinita, en el sentido de que la influencia que ejerce él sobre un campo eléctrico exterior es la misma que la que determinaría en un dieléctrico (de igual forma) para el cual $\epsilon \rightarrow \infty$. En efecto, en virtud del carácter finito de la condición de contorno para el desplazamiento \mathbf{D} , éste debe conservarse finito dentro del cuerpo incluso cuando $\epsilon \rightarrow \infty$; pero esto significa que en un campo tal será $\mathbf{E} \rightarrow 0$, de acuerdo con las propiedades de los conductores.

PROBLEMAS

1. Determinar el campo creado por una carga puntual e situada a una distancia h de la superficie de separación plana entre dos medios dieléctricos diferentes.

Solución. Llamemos O el punto en que se encuentra la carga e en el medio 1 y sea O' el punto simétrico de O respecto del plano de separación (en el medio 2) (fig. 10). El campo en el medio 1 lo determinaremos como campo creado por dos cargas puntuales, la carga e y una carga ficticia e' en el punto O' (cf. el método de las imágenes, § 3):

$$\phi_1 = e/\epsilon_1 r + e'/\epsilon_1 r',$$

donde r, r' son las distancias del punto de observación a los puntos O y O' , respectivamente. En cambio, el campo en el medio 2 lo consideraremos como campo creado por una carga ficticia e'' que se encuentra en el punto O :

$$\phi_2 = e''/\epsilon_2 r.$$

Sobre el plano frontera ($r = r'$) deben cumplirse las condiciones (7.5) de las que se siguen las ecuaciones

$$e - e' = e'', \quad (e + e')/\epsilon_1 = e''/\epsilon_2,$$

de donde

$$e' = e(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad e'' = 2\epsilon_2 e/(\epsilon_1 + \epsilon_2). \quad (1)$$

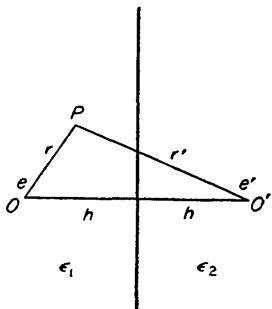


FIG. 10

Para $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ tenemos $e' = -e$, $\phi_2 = 0$, es decir, volvemos al resultado obtenido en el § 3 para el campo de una carga puntual cerca de un plano conductor.

La fuerza que actúa sobre la carga e («fuerza de la imagen») es igual a

$$F = \frac{ee'}{(2h)^2\epsilon_1} = \left(\frac{e}{2h}\right)^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)};$$

$F > 0$ corresponde a repulsión.

2. El mismo problema para un hilo cargado rectilíneo de longitud infinita colocado paralelamente al plano de separación y a la distancia h del mismo.

Solución. Es del todo análoga a la solución de problema que precede, con la diferencia de que los potenciales del campo en uno y otro medio son

$$\phi_1 = -(2e/\epsilon_1) \ln r - (2e'/\epsilon_1) \ln r', \quad \phi_2 = -(2e''/\epsilon_2) \ln r,$$

donde e, e', e'' representan las cargas por unidad de longitud del hilo y de sus «imágenes», y r, r' las distancias en un plano perpendicular a los hilos. Para e', e'' se obtienen las mismas expresiones (1) y la fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del hilo es

$$F = 2ee'/2h\epsilon_1 = e^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)/h\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

3. Determinar el campo creado por un hilo cargado rectilíneo de longitud infinita colocado (en un medio cuya constante dieléctrica es ϵ_1) paralelamente a un cilindro (con $\epsilon = \epsilon_2$) de radio a y a una distancia $b(b > a)$ de su eje*.

Solución. El campo en el medio 1 lo determinaremos como campo que crearía en el dieléctrico homogéneo ϵ_1 el hilo cargado real (que pasa por el punto O en la fig. 11) con una carga e por unidad

* El problema análogo para una carga puntual cerca de una esfera dieléctrica no puede resolverse en forma finita.

de longitud y dos hilos ficticios con cargas e' y $-e'$ que pasan por los puntos A y O' , respectivamente. El punto A se encuentra a la distancia $AO' = a^2/b$ del centro de la circunferencia; entonces para todos los puntos de la misma, la razón de las distancias r y r' a los puntos A y O , respectivamente, es constante $r'/r = a/b$ y, en consecuencia, resulta posible satisfacer las condiciones de contorno sobre dicha circunferencia. En cuanto al campo en el medio 2, lo consideraremos como campo que crearía en un medio homogéneo ϵ_2 la carga ficticia e'' sobre el hilo que pasa por O .

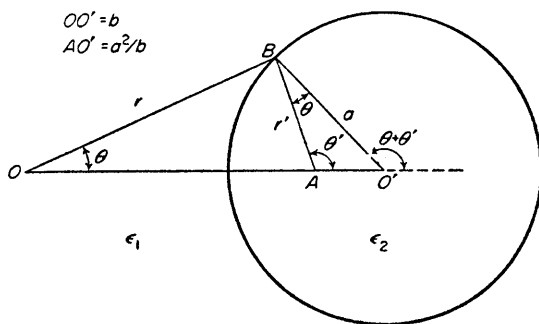


FIG. 11

Las condiciones de contorno sobre la superficie de separación conviene formularlas en términos del potencial ϕ ($E = -\text{grad } \phi$) y del potencial vector A (cf. § 3) determinado a partir de $D = \text{rot } A$ (de acuerdo con la ecuación $\text{div } D = 0$). En un problema bidimensional, el vector A está dirigido a lo largo del eje z (perpendicular al plano del dibujo). Las condiciones de continuidad de las componentes tangenciales de E y de la componente normal de D son equivalentes a las condiciones

$$\phi_1 = \phi_2, A_1 = A_2.$$

Para el campo de un hilo cargado se tiene, en coordenadas polares r, θ : $\phi = -\frac{2e}{\epsilon} \ln r + \text{const}$, $A = 2e\theta + \text{const}$ (cf. (3.18)). Por ello, las condiciones de contorno se escriben:

$$\frac{2}{\epsilon_1}(-e \ln r - e' \ln r' + e' \ln a) = -\frac{2e''}{\epsilon_2} \ln r + \text{const},$$

$$2[e\theta + e'\theta' - e'(\theta + \theta')] = 2e''\theta,$$

(la notación utilizada para los ángulos se da en la figura 11; se ha aplicado la semejanza de los triángulos $OO'B$ y $BO'A$). De aquí se sigue $\epsilon_2(e + e') = \epsilon_1 e''$, $e - e' = e''$ y para e' , e'' se tienen de nuevo las expresiones (1) del problema 1.

La fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del hilo cargado es paralela a OO' e igual a

$$F = eE = \frac{2ee'}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'} \right) = \frac{2e^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)a^2}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)b(b^2 - a^2)}$$

($F > 0$ corresponde a repulsión).

4. El mismo problema si el hilo se encuentra en el interior de un cilindro cuya permitividad es ϵ_2 ($b < a$).

Solución. El campo en el medio 2 lo determinaremos como campo del hilo real e (punto O en la fig. 12) y del hilo ficticio e' que pasa por el punto A , situado ahora fuera del cilindro. En cambio, el campo en el medio 1 se considerará como campo de los hilos con cargas e'' y $e - e''$ que pasan

por O y O' , respectivamente. Siguiendo el mismo procedimiento que en el problema anterior, obtendremos

$$e' = -e(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad e'' = 2\epsilon_1 e/(\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

El hilo se ve repelido por la superficie del cilindro (para $\epsilon_2 > \epsilon_1$) con una fuerza

$$F = \frac{2ee'}{\epsilon_2} \frac{1}{OA} = \frac{2e^2(\epsilon_2 - \epsilon_1)b}{\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)(a^2 - b^2)}.$$

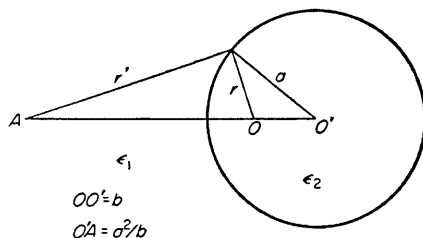


FIG. 12

5. Probar que el potencial del campo $\phi_A(\mathbf{r}_B)$ creado en el punto \mathbf{r}_B de un medio dieléctrico no homogéneo arbitrario por una carga puntual e que se encuentra en el punto \mathbf{r}_A , es igual al potencial $\phi_B(\mathbf{r}_A)$ que determina en el punto \mathbf{r}_A la misma carga colocada en el punto \mathbf{r}_B .

Solución. Los potenciales $\phi_A(\mathbf{r})$ y $\phi_B(\mathbf{r})$ satisfacen las ecuaciones

$$\text{div}(\epsilon \text{ grad } \phi_A) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad \text{div}(\epsilon \text{ grad } \phi_B) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B).$$

Multiplicando la primera por ϕ_B , la segunda por ϕ_A y restando miembro a miembro una de otra, se encuentra

$$\text{div}(\phi_B \epsilon \text{ grad } \phi_A) - \text{div}(\phi_A \epsilon \text{ grad } \phi_B) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \phi_B(\mathbf{r}) + 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \phi_A(\mathbf{r}).$$

La integración de esta igualdad en todo el espacio da la relación buscada:

$$\phi_A(\mathbf{r}_B) = \phi_B(\mathbf{r}_A).$$

§ 8. Elipsoide dieléctrico

La polarización de un elipsoide dieléctrico situado en un campo eléctrico homogéneo exterior posee ciertas características propias que prestan a este ejemplo un particular interés.

Consideremos ante todo un caso sencillo, el de una esfera dieléctrica en un campo exterior \mathcal{E} . Designemos por $\epsilon^{(i)}$ su constante dieléctrica, y por $\epsilon^{(e)}$ la constante dieléctrica del medio exterior dentro del cual se encuentra situada. Elijamos como origen de un sistema de coordenadas esféricas el centro de la esfera (contando el ángulo polar θ a partir de la dirección de \mathcal{E}) y busquemos para el potencial del campo fuera de la esfera una expresión de la forma

$$\phi^{(e)} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{r} + A \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}/r^3;$$

el primer término es el potencial del campo exterior aplicado, y el segundo término,

que tiende a cero en el infinito, da la variación buscada del potencial debido a la esfera (cf. la solución del problema 1, § 3). En cambio, para el potencial del campo en el interior de la esfera buscaremos una expresión de la forma

$$\phi^{(i)} = -B\mathfrak{E} \cdot \mathbf{r};$$

es ésta la única función que satisface la ecuación de Laplace, que se conserva finita en el centro de la esfera y que depende tan sólo del vector constante \mathfrak{E} , que es el único parámetro que interviene en el problema en cuestión.

Las constantes A y B se determinan por las condiciones de contorno sobre la superficie de la esfera. Pero se advierte desde luego que el campo en el interior de la misma $\mathbf{E}^{(i)} = B\mathfrak{E}$ resulta ser homogéneo y difiere del campo \mathfrak{E} impuesto tan sólo en el valor del módulo.

La condición de contorno de continuidad del potencial da

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathfrak{E}(1 - A/R^3),$$

(R es el radio de la esfera), y la condición de continuidad de la componente normal del desplazamiento eléctrico se escribe

$$\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(e)}\mathfrak{E}(1 + 2A/R^3).$$

Eliminando entre estas dos igualdades la constante A , obtendremos

$$\frac{1}{3}(\mathbf{D}^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \epsilon^{(e)}\mathfrak{E} \quad (8.1)$$

o bien, substituyendo $\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(i)}\mathbf{E}^{(i)}$,

$$\mathbf{E}^{(i)} = 3\epsilon^{(e)}\mathfrak{E}/(2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}). \quad (8.2)$$

De manera del todo análoga se resuelve el problema de un cilindro dieléctrico de longitud infinita en un campo exterior perpendicular a su eje (cf. problema 2, § 3). El campo dentro del cilindro, al igual que dentro de la esfera en el ejemplo anterior, resulta ser homogéneo y satisface la condición

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{(i)} + \epsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \epsilon^{(e)}\mathfrak{E}, \quad (8.3)$$

o bien

$$\mathbf{E}^{(i)} = 2\epsilon^{(e)}\mathfrak{E}/(\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}). \quad (8.4)$$

Las relaciones (8.1) y (8.3), en las que no interviene la permitividad $\epsilon^{(i)}$ de la esfera o del cilindro de manera explícita, son particularmente importantes por el hecho de que su validez no está ligada con el carácter lineal de la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{D} dentro del cuerpo; dichas relaciones se cumplen cualquiera que sea la forma de esta dependencia (en particular, para los cuerpos anisótropos). El mismo carácter presentan las relaciones análogas

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathfrak{E} \quad (8.5)$$

para un cilindro en un campo longitudinal y

$$\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(e)} \mathfrak{E} \quad (8.6)$$

para una placa de caras paralelas en un campo perpendicular a ella; estas igualdades son, sin más, evidentes a partir de las condiciones de contorno.

La propiedad de crear en su interior un campo homogéneo cuando se le coloca en un campo homogéneo exterior resulta ser inherente, de manera general, a cualquier elipsoide, cualquiera que sea la razón de sus semiejes a , b , c . El problema de la polarización de un elipsoide dieléctrico se resuelve mediante coordenadas elipsoidales de manera parecida a como en el § 4 se resolvió el problema análogo para un elipsoide conductor.

Para el potencial del campo fuera de un elipsoide tomaremos de nuevo una expresión de la forma (4.22) $\phi'_e = \phi_0 F(\xi)$ con la función $F(\xi)$ dada por (4.23). En cambio, el potencial del campo dentro del mismo ϕ_i , no puede expresarse mediante una función de esta forma, dado que no cumple la condición de que el campo sea finito en todo el volumen interior al elipsoide. En efecto, consideremos la superficie $\xi = -c^2$, que representa una elipse en el plano xy interior al volumen del elipsoide. Para $\xi \rightarrow -c^2$ la integral (4.23) se comporta como $\sqrt{\xi + c^2}$. La intensidad del campo, es decir, el gradiente del potencial, se comportará, por consiguiente, como $(\xi + c^2)^{-1/2}$ y tenderá a infinito para $\xi = -c^2$. De esta manera, para representar el campo en el interior del elipsoide es sólo adecuada la solución $F(\xi) = \text{const}$, es decir, hay que buscar para ϕ_i una expresión de la forma

$$\phi_i = B\phi_0.$$

Vemos así que el potencial ϕ_i difiere del potencial del campo homogéneo ϕ_0 tan sólo en un factor constante. En otras palabras, el campo dentro del elipsoide será también homogéneo.

No nos detendremos en escribir aquí las fórmulas para el campo fuera del elipsoide, fórmulas que tienen poco interés. En cuanto al campo homogéneo en el interior del elipsoide, este campo se puede hallar sin escribir de hecho las condiciones de contorno, utilizando en vez de éstas algunos resultados que ya conocemos.

Supongamos primero que el elipsoide se encuentra en el vacío ($\epsilon^{(e)} = 1$). Entonces entre los vectores $\mathbf{E}^{(i)}$, $\mathbf{D}^{(i)}$, \mathfrak{E} (que tienen todos la misma dirección, la del eje x) debe existir una relación lineal del tipo

$$aE_x + bD_x = \mathfrak{E}_x,$$

donde los coeficientes a , b dependen no de la permitividad $\epsilon^{(i)}$ del elipsoide, sino solamente de su forma. La existencia de esta relación se sigue de la estructura de las condiciones de contorno, como hemos comprobado ya antes en los ejemplos de la esfera y del cilindro.

Para determinar a y b observemos que, en el caso particular trivial en que $\epsilon^{(i)} = 1$, sería simplemente $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathfrak{E}$; de aquí se sigue $a + b = 1$. Otro caso particular que ya conocemos es el de un elipsoide conductor. En un conductor $\mathbf{E}^{(i)} = 0$ y aun-

que el desplazamiento $\mathbf{D}^{(i)}$ no tiene un significado físico inmediato, puede considerarse como una magnitud formal vinculada con el momento dipolar total del elipsoide por la igualdad

$$\mathbf{D} = 4\pi\mathbf{P} = 4\pi\mathcal{P}/V.$$

Según (4.26) será, en estas condiciones,

$$D_x = \mathfrak{E}_x/n^{(x)},$$

es decir, el coeficiente $b = n^{(x)}$ y, por lo tanto, $a = 1 - n^{(x)}$.

Así pues, llegamos a la siguiente igualdad*:

$$(1 - n^{(x)})E^{(i)}_x + n^{(x)}D^{(i)}_x = \mathfrak{E}_x. \quad (8.7)$$

Exactamente las mismas relaciones, pero con otros coeficientes, valen para el campo a lo largo de los ejes y y z . Al igual que las fórmulas particulares (8.1) y (8.3), son correctas sea cual sea la forma de la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{D} dentro del elipsoide.

Para la intensidad del campo dentro de un elipsoide se obtiene a partir de (8.7), haciendo $D_x^{(i)} = \epsilon^{(i)}E_x^{(i)}$:

$$E^{(i)}_x = \mathfrak{E}_x/[1 + (\epsilon^{(i)} - 1)n^{(x)}], \quad (8.8)$$

y el momento dipolar total del elipsoide vale

$$\mathcal{P}_x = VP_x = (\epsilon^{(i)} - 1)VE^{(i)}_x/4\pi = \frac{1}{3}abc(\epsilon^{(i)} - 1)\mathfrak{E}_x/[1 + (\epsilon^{(i)} - 1)n^{(x)}]. \quad (8.9)$$

Si el campo \mathfrak{E} tiene componentes no nulas respecto de los tres ejes, el campo en el interior del elipsoide será, como antes, homogéneo, pero, en general, no paralelo a \mathfrak{E} . Sin presuponer la elección del sistema de coordenadas, la relación (8.7) puede escribirse en el caso general en la forma

$$E^{(i)}_i + n_{ik}(D^{(i)}_k - E^{(i)}_k) = \mathfrak{E}_i. \quad (8.10)$$

El paso al caso de un medio con permitividad diferente de 1 se lleva a cabo simplemente substituyendo $\epsilon^{(i)}$ por $\epsilon^{(i)}/\epsilon^{(e)}$. Al hacerlo, la fórmula (8.7) toma la forma:

$$(1 - n^{(x)})\epsilon^{(e)}E^{(i)}_x + n^{(x)}D^{(i)}_x = \epsilon^{(e)}\mathfrak{E}_x. \quad (8.11)$$

Esta fórmula se puede aplicar, en particular, al campo dentro de una cavidad elipsoida en un medio dieléctrico infinito; para ello hay que hacer $\epsilon^{(i)} = 1$.

* Ésta puede escribirse también en la forma

$$E^{(i)}_x = \mathfrak{E}_x - 4\pi n^{(x)}P_x.$$

La magnitud $4\pi n^{(x)}P_x$ se llama a veces *campo despolarizante*. Una fórmula análoga es válida para un elipsoide magnetizado en un campo magnético homogéneo exterior (véase § 27). Las magnitudes $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ se llaman entonces *coeficientes de desmagnetización*.

PROBLEMAS*

1. Determinar el momento de las fuerzas que actúan sobre un elipsoide de rotación en un campo eléctrico homogéneo.

Solución. De acuerdo con la fórmula general (16.13), el momento de las fuerzas que actúan sobre el elipsoide es $\mathbf{K} = \mathcal{P} \times \mathbf{E}$, donde \mathcal{P} es el momento dipolar del elipsoide. En un elipsoide de rotación el vector \mathcal{P} se encuentra en el plano que pasa por el eje de simetría y es paralelo a la dirección de \mathbf{E} . El momento de las fuerzas, en cambio, resulta perpendicular a este plano y para su módulo el cálculo, mediante las fórmulas (8.9), da

$$K = \frac{(\epsilon - 1)^2 [1 - 3n] \mathcal{E}^2 V \sin 2\alpha}{8\pi [n\epsilon + 1 - n] [(1 - n)\epsilon + 1 + n]},$$

donde α es el ángulo formado por \mathbf{E} y el eje de simetría del elipsoide, y n es el coeficiente de despolarización a lo largo de este eje (de modo que el coeficiente de despolarización en las direcciones perpendiculares al mismo son iguales a $\frac{1}{2}(1 - n)$). El momento de las fuerzas tiene una dirección tal que tiende a hacer girar el eje de simetría de un elipsoide alargado ($n < 1/3$) o de uno achatado ($n > 1/3$) de modo que pase a ser paralelo o perpendicular al campo, respectivamente.

Para un elipsoide conductor ($\epsilon \rightarrow \infty$) tenemos

$$K = \frac{|1 - 3n|}{8\pi n(1 - n)} V \mathcal{E}^2 \sin 2\alpha.$$

2. Una esfera de dieléctrico hueca (constante dieléctrica ϵ , radios interior y exterior b y a) se encuentra en un campo eléctrico exterior homogéneo \mathbf{E} . Determinar el campo en la cavidad de la esfera.

Solución. De manera análoga a como se procedió en el texto para una esfera maciza, busquemos para el potencial del campo en el vacío fuera de ella (región 1) y dentro de la cavidad (región 3) expresiones de la forma

$$\phi_1 = -E \cos \theta (r - A/r^2), \quad \phi_2 = -B E r \cos \theta,$$

respectivamente, y para el campo en la capa de dieléctrico (región 2), una del tipo

$$\phi_2 = -C E \cos \theta (r - D/r^2),$$

donde A, B, C, D son constantes que se determinan a partir de las condiciones de continuidad de ϕ y de $\epsilon \partial \phi / \partial r$ en las fronteras 1-2 y 2-3. De esta manera, el campo $\mathbf{E}_3 = B \mathbf{E}$ dentro de la cavidad resulta ser homogéneo (en cambio, el campo \mathbf{E}_2 en el estrato esférico no es homogéneo). El cálculo de las constantes conduce al resultado:

$$\mathbf{E}_3 = 9\epsilon \mathbf{E} / [(\epsilon + 2)(2\epsilon + 1) - 2(\epsilon - 1)^2(b/a)^3].$$

3. El mismo problema para un cilindro hueco en un campo homogéneo transversal**.

Solución. Es análoga a la del problema anterior y conduce al resultado:

$$\mathbf{E}_3 = 4\epsilon \mathbf{E} / [(\epsilon + 1)^2 - (\epsilon - 1)^2(b/a)^2].$$

* En los problemas de este párrafo se supone que el elipsoide se encuentra en el vacío.

** En un campo longitudinal, la respuesta es evidente: $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}$.

§ 9. Permitividad de una mezcla

Si la substancia de que se trata es una mezcla finamente dispersa (emulsión, mezcla de polvos, etc.), es posible considerar el campo eléctrico promediado en un volumen que es grande comparado con las distancias a que se aprecia el carácter heterogéneo del medio. Con relación a este campo promediado, la mezcla es un medio homogéneo e isotrópico y como tal puede caracterizarse por determinados valores efectivos de la permitividad que designaremos por ϵ_{mez} . Si \mathbf{E} y \mathbf{D} son la intensidad y el desplazamiento del campo promediados conforme se ha indicado, por la definición de ϵ_{mez} será

$$\mathbf{D} = \epsilon_{mez} \mathbf{E}. \quad (9.1)$$

Si todas las partículas de la mezcla son isotrópicas y las diferencias entre sus permitividades son pequeñas comparadas con los propios valores de ϵ , resulta posible calcular de forma general ϵ_{mez} con una precisión de hasta términos de segundo orden respecto de dichas diferencias.

Escribamos el valor local de la intensidad del campo en la forma $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}$, y el valor local de la permitividad, en la forma $\bar{\epsilon} + \delta\epsilon$, donde

$$\bar{\epsilon} = (1/V) \int \epsilon dV \quad (9.2)$$

se obtiene promediando en todo el volumen. Entonces el valor medio del desplazamiento será

$$\bar{\mathbf{D}} = \overline{(\bar{\epsilon} + \delta\epsilon)(\bar{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E})} = \bar{\epsilon} \bar{\mathbf{E}} + \overline{\delta\epsilon \delta\mathbf{E}} \quad (9.3)$$

(dado que, por la definición de $\delta\epsilon$ y $\delta\mathbf{E}$, sus valores medios son iguales a cero). En la aproximación de orden cero es $\epsilon_{mez} = \bar{\epsilon}$; el primer término correctivo no nulo será, naturalmente, de segundo orden respecto de $\delta\epsilon$, como puede verse en (9.3).

De la ecuación no promediada $\text{div } \mathbf{D} = 0$, con una aproximación que se limita a los términos de primer orden, deducimos

$$\text{div}[(\bar{\epsilon} + \delta\epsilon)(\bar{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E})] = \bar{\epsilon} \text{div } \delta\mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}} \cdot \text{grad } \delta\epsilon = 0,$$

o bien, substituyendo aquí $\delta\mathbf{E} = -\text{grad } \delta\phi$,

$$\bar{\epsilon} \Delta \delta\phi = \bar{\mathbf{E}} \cdot \text{grad } \delta\epsilon.$$

Aplicando a esta ecuación la operación grad , se obtendrá

$$\Delta \delta\mathbf{E} = -(1/\bar{\epsilon})(\bar{\mathbf{E}} \cdot \text{grad}) \text{grad } \delta\epsilon. \quad (9.4)$$

El promedio del producto $\delta\epsilon \delta\mathbf{E}$ en (9.3) lo efectuaremos en dos etapas. Ante todo, calcularemos el valor medio respecto del volumen de las partículas de una misma substancia, es decir, para un valor dado de $\delta\epsilon$. El valor medio así calculado de $\delta\mathbf{E}$ se obtiene fácilmente a partir de la ecuación (9.4). En efecto, dada la isotropía de la mezcla en conjunto, después de promediar los dos miembros de la igual-

dad (9.4), el operador $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$ en el segundo miembro pasa a ser

$$\frac{1}{3} \delta_{jk} \Delta,$$

de modo que se obtiene

$$\Delta \bar{\delta \mathbf{E}} = -(1/3\bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{E}} \Delta \delta \epsilon,$$

de donde

$$\bar{\delta \mathbf{E}} = -(1/3\bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{E}} \delta \epsilon.$$

Multiplicando por $\delta \epsilon$ y calculando el último promedio para todas las componentes de la mezcla, obtendremos

$$\overline{\delta \epsilon \delta \mathbf{E}} = -(1/3\bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{E}} \overline{(\delta \epsilon)^2}.$$

Finalmente, substituyendo esta expresión en (9.3) y comparando con (9.1) se llega al resultado buscado:

$$\epsilon_{mez} = \bar{\epsilon} - (1/3\bar{\epsilon}) \overline{(\delta \epsilon)^2}. \quad (9.5)$$

Esta fórmula puede presentarse también en otra forma si se observa que, con una precisión de segundo orden, se tiene

$$\bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}} = (\bar{\epsilon} + \bar{\delta \epsilon})^{\frac{1}{3}} = \bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\overline{(\delta \epsilon)^2}}{9\bar{\epsilon}^2} \right);$$

por lo tanto,

$$\epsilon_{mez}^{\frac{1}{3}} = \bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}}. \quad (9.6)$$

Cabe decir, por lo tanto, que en la aproximación considerada resulta ser aditiva la raíz cúbica de ϵ .

PROBLEMA

Determinar la permitividad de una emulsión, de concentración pequeña, para una diferencia arbitraria entre las permitividades del medio (ϵ_1) y de la fase dispersa (ϵ_2).

Solución. En la integral

$$\frac{1}{V} \int (\mathbf{D} - \epsilon_1 \mathbf{E}) dV \equiv \bar{\mathbf{D}} - \epsilon_1 \bar{\mathbf{E}}$$

el integrando es diferente de cero únicamente dentro de las partículas de la emulsión. Por ello, es proporcional a la concentración volumétrica c de la misma y al calcularla se puede considerar que las partículas de la emulsión se encuentran en un campo exterior igual al campo promedio $\bar{\mathbf{E}}$. Suponiendo que las partículas son esféricas y utilizando la fórmula (8.2), obtendremos para el coeficiente de proporcionalidad entre $\bar{\mathbf{D}}$ y $\bar{\mathbf{E}}$:

$$\epsilon_{mez} = \epsilon_1 + 3c\epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + 2\epsilon_1).$$

Esta fórmula es válida con una precisión de primer orden respecto de c . Para valores próximos de

ϵ_1 y ϵ_2 , coincide (dentro de una aproximación de primer orden respecto de c y de segundo respecto de $\epsilon_2 - \epsilon_1$) con el resultado que da para pequeños valores de c la fórmula (9.6).

§ 10. Relaciones termodinámicas para los dieléctricos en un campo eléctrico

La cuestión de cómo varían las propiedades termodinámicas debido a la existencia de un campo eléctrico no se plantea en el caso de los conductores. Dado que el campo eléctrico no existe dentro de un conductor, todas las variaciones de sus magnitudes termodinámicas se reducen, simplemente, a añadir a su energía total la energía del campo que crea en el espacio que lo rodea*. Esta cantidad no depende del estado termodinámico del cuerpo (en particular, de su temperatura) y así, por ejemplo, no se manifiesta en su entropía.

Por el contrario, un campo eléctrico penetra en el interior de un dieléctrico y ejerce así una profunda influencia sobre sus propiedades termodinámicas. Para estudiar estos efectos determinemos, en primer lugar, el trabajo realizado sobre un dieléctrico aislado térmicamente como consecuencia de una variación infinitesimal del campo en él.

El campo eléctrico en que se encuentra el dieléctrico hay que imaginarlo como determinado por ciertos conductores cargados externos, y la variación del campo se puede entonces considerar como resultado de una variación de las cargas de los conductores**. Para simplificar, supondremos que se tiene solamente un conductor con carga e y potencial ϕ . El trabajo que hay que realizar para aumentar su carga en la cantidad infinitesimal δe es igual a

$$\delta R = \phi \delta e; \quad (10.1)$$

éste es precisamente el trabajo mecánico que efectúa el campo dado sobre una carga δe al transportarla desde el infinito (donde el potencial del campo es igual a cero) hasta la superficie del conductor y que experimenta; en consecuencia, una diferencia de potencial igual a ϕ . Representemos δR en una forma que lo exprese en función del campo en el espacio que rodea al conductor y ocupado por el dieléctrico.

Si D_n es la proyección del vector desplazamiento eléctrico sobre la dirección de la normal a la superficie del conductor, exterior respecto del dieléctrico (e interior con relación al conductor), la densidad superficial de carga sobre el conductor es igual a $-D_n/4\pi$, de modo que

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint D_n df = -\frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}.$$

* Prescindimos aquí de la energía de enlace de la carga con la materia del conductor; esta energía se estudiará en el § 22.

** Las expresiones finales que obtendremos contienen solamente los valores del campo dentro del dieléctrico y no dependen así de cuál sea el origen del campo. Teniendo esto en cuenta, no será necesario mencionar de manera especial los casos en que el campo es creado no por conductores cargados, sino, por ejemplo, por cargas extrañas introducidas en el propio dieléctrico o bien por su polarización piroeléctrica (véase § 13).

Teniendo en cuenta que el potencial ϕ es constante en toda la superficie del conductor, escribiremos

$$\delta R = \phi \delta e = -\frac{1}{4\pi} \oint \phi \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}(\phi \delta \mathbf{D}) dV.$$

La última integral a la derecha se extiende a todo el volumen exterior al conductor. Dado que el campo variado, al igual que el inicial, satisface las ecuaciones del campo, se tiene $\operatorname{div} \delta \mathbf{D} = 0$, y, por lo tanto,

$$\operatorname{div}(\phi \delta \mathbf{D}) = \phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \phi = -\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}.$$

Obtenemos en definitiva de esta manera la importante fórmula que sigue:

$$\delta R = \int (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} / 4\pi) dV. \quad (10.2)$$

Hay que subrayar que la integración en ella se extiende a todo el campo, en particular también a la región ocupada por el vacío si el medio dieléctrico no ocupa todo el espacio fuera del conductor.

El trabajo efectuado sobre un cuerpo aislado térmicamente no es sino la variación de la energía del mismo manteniendo constante su entropía. Por consiguiente, la expresión (10.2) que hemos hallado debe incluirse en la relación termodinámica que determina la variación infinitesimal de la energía total del cuerpo, que comprende también la energía del campo eléctrico. Designando esta energía por \mathcal{U} , tenemos, por lo tanto,

$$\delta \mathcal{U} = T \delta \mathcal{S} + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV \quad (10.3)$$

(T es la temperatura y \mathcal{S} la entropía del cuerpo)*. En consecuencia, para la energía libre total $\mathcal{F} = \mathcal{U} - T\mathcal{S}$ ** resulta

$$\delta \mathcal{F} = -\mathcal{S} \delta T + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV. \quad (10.4)$$

Relaciones termodinámicas análogas pueden escribirse también para las magnitudes referidas a la unidad de volumen del cuerpo. Sean U , S y ρ la energía interna, la entropía y la masa por unidad de volumen del cuerpo. Como es sabido, la relación termodinámica ordinaria (cuando no existe campo) para la energía interna en el volumen dado se escribe:

$$dU = TdS + \zeta d\rho,$$

* En lo que concierne al volumen del cuerpo (cuya diferencial se suele incluir en la expresión de $\delta \mathcal{U}$), no hay que perder de vista que en un campo eléctrico el cuerpo pasa a ser, en general, no homogéneo y que, por ello, su volumen no caracteriza ya su estado.

** Sólo tiene sentido considerar esta magnitud en el caso en que la temperatura del cuerpo es constante en todo él.

donde ζ es el potencial químico de la sustancia*. Cuando en un dieléctrico existe campo, hay que añadir a ella un término que procede del integrando en (10.3):

$$dU = TdS + \zeta d\rho + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}/4\pi. \quad (10.5)$$

Para la energía libre $F = U - TS$ de la unidad de volumen del dieléctrico tenemos, según esto,

$$dF = -SdT + \zeta d\rho + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}/4\pi. \quad (10.6)$$

Las relaciones así obtenidas constituyen la base de la termodinámica de los dieléctricos.

Vemos, por lo tanto, que las magnitudes U y F son los potenciales termodinámicos respecto de las variables S , ρ , \mathbf{D} y T , ρ , \mathbf{D} , respectivamente. En particular, se puede obtener la intensidad del campo derivando estos potenciales respecto de las componentes del vector \mathbf{D} :

$$\mathbf{E} = 4\pi(\partial U/\partial \mathbf{D})_{S,\rho} = 4\pi(\partial F/\partial \mathbf{D})_{T,\rho}. \quad (10.7)$$

La utilización de la energía libre resulta más conveniente desde este punto de vista, ya que su derivada debe calcularse manteniendo constante la temperatura, mientras que la energía interna hay que expresarla en función de la entropía, lo que es menos fácil.

Junto con U y F conviene introducir los potenciales termodinámicos en los que representan el papel de variables independientes las componentes del vector \mathbf{E} , y no las de \mathbf{D} . Tales son las magnitudes

$$\tilde{U} = U - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/4\pi, \quad \tilde{F} = F - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/4\pi, \quad (10.8)$$

para cuyas diferenciales tenemos

$$\begin{aligned} d\tilde{U} &= TdS + \zeta d\rho - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}/4\pi, \\ d\tilde{F} &= -SdT + \zeta d\rho - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}/4\pi. \end{aligned} \quad (10.9)$$

En particular, de aquí se sigue

$$\mathbf{D} = -4\pi(\partial \tilde{U}/\partial \mathbf{E})_{S,\rho} = -4\pi(\partial \tilde{F}/\partial \mathbf{E})_{T,\rho}. \quad (10.10)$$

Conviene hacer observar que la relación entre las magnitudes termodinámicas que hemos designado mediante letras con el símbolo \sim y sin él, coincide precisamente con la que ya se introdujo en el § 5 para la energía del campo electrostático

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 24. En vez de la densidad de masa se utilizó el número de partículas N por unidad de volumen, ligado con la densidad por la igualdad $\rho = Nm$ (m es la masa de una molécula); en relación con esto, las definiciones del potencial químico en este y en aquel libro difieren en un factor (el potencial químico se refiere ahora a la unidad de masa, y no a una partícula de materia).

El potencial químico lo designaremos aquí por la letra ζ en vez de la notación corriente μ ; designar la densidad de masa de la sustancia por la misma letra ρ que la densidad de carga no puede conducir a confusión dado que estas magnitudes nunca figurarán juntas.

de los conductores en el vacío. En efecto, la integral $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$ se puede transformar de manera exactamente análoga a como hicimos al principio del § 2, utilizando para ello la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 0$ en el volumen del dieléctrico y la condición de contorno $D_n = 4\pi\sigma$ sobre la superficie de los conductores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \phi \cdot \mathbf{D} dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_a \int \phi_a D_n df = \sum_a \phi_a e_a. \end{aligned} \quad (10.11)$$

En consecuencia, por ejemplo, para la energía interna se tiene:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U} - \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{4\pi} dV = \mathcal{U} - \sum_a \phi_a e_a, \quad (10.12)$$

lo que corresponde a la definición (5.5).

Es útil establecer también las fórmulas para variaciones infinitesimales de estas cantidades expresándolas en función de la carga y del potencial de los conductores (que son las fuentes del campo). Así, para la variación de la energía libre (a una temperatura dada), se tiene

$$(\delta \mathcal{F})_T = \delta R = \sum_a \phi_a \delta e_a. \quad (10.13)$$

Para la variación de \mathcal{F} obtendremos, en cambio,

$$(\delta \mathcal{F})_T = (\delta \mathcal{F})_T - \delta \sum_a \phi_a e_a = - \sum_a e_a \delta \phi_a. \quad (10.14)$$

Cabe decir que las magnitudes sin el símbolo \sim son potenciales termodinámicos respecto de las cargas de los conductores, y las magnitudes con el símbolo \sim , respecto de sus potenciales.

Como es sabido por termodinámica*, los diferentes potenciales termodinámicos poseen la propiedad de alcanzar en el estado de equilibrio térmico un mínimo con relación a las diferentes variaciones posibles del estado del cuerpo. Al formular estas condiciones de equilibrio en un campo eléctrico, es necesario indicar si se consideran las variaciones del estado manteniendo constantes las cargas o manteniendo constantes los potenciales de los conductores, que son las fuentes del campo. Así, \mathcal{F} y $\tilde{\mathcal{F}}$ poseen en el equilibrio un mínimo respecto de las variaciones del estado que tienen lugar a temperatura constante y para cargas constantes o potenciales constantes de los conductores, respectivamente (lo mismo vale para \mathcal{U} y $\tilde{\mathcal{U}}$ en el caso en que se mantenga constante la entropía del cuerpo).

Si en un cuerpo pueden ocurrir procesos que no tienen una relación directa con el campo eléctrico (por ejemplo, las reacciones químicas), la condición de equilibrio respecto de estos procesos viene determinada por el mínimo de F para temperatura

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 15.

y densidad dadas del cuerpo y del desplazamiento \mathbf{D} en él, o por el mínimo de \tilde{F} cuando son constantes la densidad, la temperatura y la intensidad del campo \mathbf{E} .

Hasta aquí no hemos hecho hipótesis alguna acerca de la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} , de forma que todas las relaciones termodinámicas obtenidas conservan su validez sea cual sea el carácter de esta dependencia. Apliquémoslas ahora a un dieléctrico isótropo, con la dependencia lineal $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. En este caso la integración de las relaciones (10.5) y (10.6) da

$$\begin{aligned} U &= U_0(S, \rho) + D^2/8\pi\epsilon, \\ F &= F_0(T, \rho) + D^2/8\pi\epsilon, \end{aligned} \quad (10.15)$$

donde U_0 y F_0 se refieren al dieléctrico cuando no hay campo. De esta manera, en el caso considerado, la magnitud

$$D^2/8\pi\epsilon = \epsilon E^2/8\pi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/8\pi$$

representa la variación de la energía interna (para valores dados de la entropía y de la densidad), o la variación de la energía libre (para temperatura y densidad dadas) por unidad de volumen del medio dieléctrico, debidas a la existencia de un campo.

Las expresiones análogas para los potenciales \tilde{U} y \tilde{F} son:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U_0(S, \rho) - \epsilon E^2/8\pi, \\ \tilde{F} &= F_0(T, \rho) - \epsilon E^2/8\pi. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Vemos, pues, que las diferencias $U - U_0$ y $\tilde{U} - U_0$ difieren en este caso tan sólo en el signo, al igual que ocurría también para el campo eléctrico en el vacío (§ 5). En un medio dieléctrico, sin embargo, esta simple expresión es válida solamente cuando la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} es lineal.

Escribamos también, para ulteriores referencias, las fórmulas que dan la densidad de entropía S y del potencial químico de la substancia ζ , fórmulas que se siguen de (10.15):

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\rho, \mathbf{D}} = S_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_\rho \\ &= S_0(T, \rho) + \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_\rho, \end{aligned} \quad (10.17)$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_{T, \mathbf{D}} = \zeta_0(T, \rho) - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right)_T. \quad (10.18)$$

Estas dos cantidades son diferentes de cero, naturalmente, tan sólo dentro del dieléctrico.

La energía libre total se obtiene integrando (10.15) en todo el espacio. Teniendo

en cuenta (10.11), resulta

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV / 8\pi = \frac{1}{2} \sum e_a \phi_a. \quad (10.19)$$

Esta última expresión coincide formalmente con la fórmula para la energía del campo electrostático de los conductores en el vacío. Al mismo resultado cabe llegar también de manera inmediata partiendo de la variación $\delta\mathcal{F}$ (10.13) correspondiente a una variación infinitesimal de las cargas de los conductores. En el presente caso, cuando la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} es lineal, todas las ecuaciones del campo y las condiciones de contorno impuestas al mismo son lineales. Por ello, los potenciales de los conductores deben ser (como en el caso de un campo en el vacío) funciones lineales de sus cargas y la integración de la igualdad (10.13) conduce a (10.19).

Hay que subrayar que en todos estos razonamientos no se ha supuesto en modo alguno que el dieléctrico ocupe todo el espacio fuera de los conductores. Si efectivamente lo ocupa, cabe todavía ir más allá, utilizando los resultados expuestos al final de § 7, y afirmar lo que sigue. Para cargas dadas de los conductores, la introducción de un medio dieléctrico divide por ϵ tanto los potenciales de los conductores como la energía del campo (en comparación con los valores de estas cantidades para el campo en el vacío). En cambio, si se mantienen constantes los potenciales de los conductores, la energía del campo queda multiplicada por ϵ (junto con las cargas de los mismos).

PROBLEMA

Determinar la altura h que alcanza el nivel de un líquido introducido en un condensador plano vertical.

Solución. Para potenciales dados de las armaduras del condensador, \mathcal{F} debe ser mínima, magnitud ésta en la cual hay que incluir la energía $\rho g h^2/2$ de la columna de líquido en el campo de la gravedad. A partir de esta condición se obtiene fácilmente

$$h = (\epsilon - 1)E^2 / 8\pi \rho g.$$

§ 11. Energía libre total de un dieléctrico

La energía libre total \mathcal{F} (o la energía total interna \mathcal{U}), tal como se definió en el párrafo que precede, incluye también la energía del campo eléctrico exterior que polariza al dieléctrico. A la vez que esta magnitud, tiene sentido considerar la energía libre total de la que se excluye la energía del campo que existiría en todo el espacio de no haber el cuerpo. Designaremos la intensidad de este último por \mathfrak{E} . Entonces la energía libre «total», en el sentido indicado, es igual a la integral

$$\int (F - \mathfrak{E}^2 / 8\pi) dV, \quad (11.1)$$

donde F es la «densidad» de energía libre. Designaremos aquí esta magnitud con la misma letra \mathcal{F} que designaba en el § 10 a la integral $\int F dV$. Hay que subrayar que la diferencia entre las dos definiciones de \mathcal{F} se reduce a una cantidad que no

depende ni del estado termodinámico ni de las propiedades del dieléctrico y que, por ello, en modo alguno se refleja en las relaciones diferenciales termodinámicas básicas que valen para esta magnitud*.

Calculemos la variación de \mathcal{F} que resulta de una variación infinitesimal del campo que tiene lugar a temperatura constante y sin alterar el equilibrio termodinámico del medio.

Dado que $\delta F = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}$, tenemos

$$\delta \mathcal{F} = \int (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E}) dV / 4\pi.$$

Esta expresión se puede escribir también de manera idéntica en la forma

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = & \int (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E} dV / 4\pi + \\ & + \int \mathbf{E} \cdot (\delta \mathbf{D} - \delta \mathbf{E}) dV / 4\pi - \int (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E} dV / 4\pi. \end{aligned} \quad (11.2)$$

En la primera integral haremos $\delta \mathbf{E} = -\text{grad } \delta \phi_0$ (donde ϕ_0 es el potencial del campo \mathbf{E}) y la transformaremos integrando por partes:

$$\int \text{grad } \delta \phi_0 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{E}) dV = \oint \delta \phi_0 (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} - \int \delta \phi_0 \text{div} (\mathbf{D} - \mathbf{E}) dV.$$

Es fácil ver que las dos integrales en el segundo miembro de la igualdad se anulan. Para la integral de volumen esto se sigue desde luego de las ecuaciones $\text{div } \mathbf{D} = 0$ y $\text{div } \mathbf{E} = 0$ a las que satisfacen el desplazamiento en el dieléctrico y el campo en el vacío, respectivamente. La primera integral, por otra parte, se extiende a la superficie de los conductores que crean el campo y sobre una superficie infinitamente alejada. Esta última integral se reduce, como de ordinario, a cero, y sobre cada uno de los conductores se tiene $\delta \phi_0 = \text{const}$, de modo que

$$\oint \delta \phi_0 (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} = \delta \phi_0 \oint (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f}.$$

Pero el campo \mathbf{E} , por definición, viene determinado exactamente por las mismas fuentes que el campo \mathbf{D} (es decir, por los mismos conductores con las cargas e totales dadas sobre ellos). En consecuencia, las dos integrales $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}$ y $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}$ son iguales a una misma cantidad, $4\pi e$, y su diferencia es nula.

De manera análoga cabe comprobar que es nulo también el segundo término en (11.2) (para ello hacemos en él $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ y aplicamos la misma transformación). En definitiva se obtiene

$$\delta \mathcal{F} = - \int (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E} dV / 4\pi = - \int \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{E} dV. \quad (11.3)$$

Obsérvese que en esta expresión la integral se extiende tan sólo al volumen ocupado por el medio dieléctrico, ya que fuera del cuerpo es $\mathbf{P} = 0$.

* Obsérvese que restar de F la cantidad $E^2/8\pi$ carecería de sentido, puesto que \mathbf{E} es el campo ya modificado por la presencia del dieléctrico y, por ello, en cualquier caso sería imposible considerar la diferencia $F - (E^2/8\pi)$ como densidad de energía libre del dieléctrico como tal.

Sin embargo, hay que subrayar que el integrando $\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{E}$ no puede interpretarse como variación de la «densidad» de energía libre del cuerpo de manera análoga a como se hizo en relación con las fórmulas (10.3) y (10.4). Ante todo, esta «densidad» debe existir incluso fuera del cuerpo, ya que su presencia altera el campo también en el espacio en torno. Es claro asimismo que la densidad de energía en cada punto del cuerpo sólo puede depender del campo que realmente existe en él, y no del campo que habría en dicho punto en ausencia del cuerpo.

Si el campo exterior \mathbf{E} es homogéneo, se tendrá

$$\delta \mathcal{F} = -\delta \mathbf{E} \cdot \int \mathbf{P} dV = -\mathcal{P} \cdot \delta \mathbf{E}, \quad (11.4)$$

donde \mathcal{P} es el momento dipolar eléctrico total del cuerpo. Por consiguiente, la identidad termodinámica para la energía libre se puede escribir en el presente caso en la forma

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{S}dT - \mathcal{P} \cdot d\mathbf{E}. \quad (11.5)$$

El momento eléctrico total del cuerpo se puede obtener, en consecuencia, derivando la energía libre total:

$$\mathcal{P} = -(\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{E})_T. \quad (11.6)$$

Obsérvese que es posible llegar a la última fórmula de manera inmediata a partir de la fórmula estadística general

$$\overline{\partial \mathcal{H} / \partial \lambda} = (\partial \mathcal{F} / \partial \lambda)_T,$$

donde \mathcal{H} es el hamiltoniano del cuerpo como sistema constituido por las partículas que lo forman y λ un parámetro cualquiera que caracterice las condiciones externas en que se halla el cuerpo*. Para un cuerpo que se encuentre en un campo homogéneo exterior \mathbf{E} , el hamiltoniano contiene el término $-\mathbf{E} \cdot \mathcal{P}$, donde \mathcal{P} es el operador momento dipolar y, eligiendo \mathbf{E} como parámetro λ , obtendremos la fórmula buscada.

Si \mathbf{D} y \mathbf{E} están ligados entre sí por la relación lineal $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, de manera análoga se puede calcular en forma explícita no sólo la variación $\delta \mathcal{F}$, sino el propio valor de \mathcal{F} . Tenemos

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathcal{E}^2) dV / 8\pi.$$

Esta expresión se escribe idénticamente en la forma

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int (\mathbf{E} + \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{E}) dV / 8\pi - \int \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{E}) dV / 8\pi.$$

El primer término del segundo miembro de la igualdad se anula, como puede comprobarse haciendo en él $\mathbf{E} + \mathbf{E} = -\text{grad}(\phi + \phi_0)$ y efectuando una transformación exactamente análoga a la realizada más arriba. Obtenemos en consecuencia:

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(V, T) = -\frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} dV. \quad (11.7)$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, §§ 11, 15.

En particular, en un campo exterior homogéneo

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(V, T) = -\frac{1}{2}\mathfrak{E} \cdot \mathcal{P}. \quad (11.8)$$

La última igualdad se podría obtener también mediante integración directa de la igualdad (11.3) si se tiene en cuenta que, en virtud del carácter lineal de todas las ecuaciones del campo (cuando $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$), el momento eléctrico \mathcal{P} debe ser función lineal de \mathfrak{E} .

La dependencia lineal entre las componentes de \mathcal{P} y \mathfrak{E} puede escribirse en la forma

$$\mathcal{P}_i = V \alpha_{ik} \mathfrak{E}_k, \quad (11.9)$$

análogamente a como hicimos en el caso de los conductores (§ 2). Sin embargo, cuando no existen conductores la «polarizabilidad» del cuerpo dieléctrico depende no sólo de su forma, sino también de su constante dieléctrica. El carácter simétrico del tensor α_{ik} (carácter que hemos recordado ya en el § 2) se sigue inmediatamente de la relación (11.6); basta observar que la derivada segunda

$$\partial^2 \mathcal{F} / \partial \mathfrak{E}_k \partial \mathfrak{E}_i = -\partial \mathcal{P}_i / \partial \mathfrak{E}_k = -V \alpha_{ik}$$

no depende del orden de derivación.

La fórmula (11.7) se simplifica todavía más en el caso importante en que ϵ difiere poco de 1, es decir, cuando la susceptibilidad dieléctrica $\kappa = (\epsilon - 1)/4\pi$ es pequeña. En este caso, al calcular la energía se puede prescindir de la deformación del campo provocada por la presencia del cuerpo, esto es, hacer

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} \cong \kappa \mathfrak{E}.$$

Entonces

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2}\kappa \int \mathfrak{E}^2 dV, \quad (11.10)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen del cuerpo. En un campo homogéneo, el momento dipolar $\mathcal{P} = V\kappa\mathfrak{E}$, y la energía libre es

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2}\kappa V \mathfrak{E}^2. \quad (11.11)$$

En el caso general de dependencia arbitraria de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} no son aplicables las fórmulas sencillas (11.7) y (11.8). Para calcular \mathcal{F} puede ser entonces útil la fórmula

$$\mathcal{F} = \int \left(F - \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \right) dV = \int \left[F - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathfrak{E} \right] dV \quad (11.12)$$

cuya deducción es evidente después de efectuados los cálculos que preceden. También aquí el integrando (en la última integral) se anula fuera del cuerpo, de modo que la integración se extiende tan sólo al volumen ocupado por el mismo.

PROBLEMA

Obtener la fórmula que substituye a (11.7) para un cuerpo que se encuentra no en el vacío, sino en un medio de permeabilidad dieléctrica $\epsilon^{(e)}$.

Solución. Repitiendo para este caso las transformaciones realizadas en el texto, obtendremos

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{E} \cdot (\mathbf{D} - \epsilon^{(e)} \mathbf{E}) dV.$$

§ 12. Electrostricción de los dieléctricos isótropos

Para un dieléctrico sólido en un campo eléctrico es imposible introducir el concepto de presión tal como se hace para un cuerpo isótropo cuando no existe un campo, puesto que las fuerzas que actúan en él (que se determinarán en los §§ 15, 16) cambian de un punto a otro del mismo y son anisótropas incluso si el propio cuerpo es de por sí isótropo. Una determinación exacta de la deformación (de la llamada *electrostricción*) de un tal cuerpo exige resolver un problema complicado de la teoría de la elasticidad.

Con todo, el problema se simplifica considerablemente si tan sólo nos interesa la variación total del volumen del cuerpo. Conforme ya se indicó en el § 5, en estas condiciones se puede considerar que no varía la forma del cuerpo, es decir, cabe suponer que la deformación es una contracción o una dilatación uniforme.

Prescindiremos de las propiedades dieléctricas del medio exterior (por ejemplo, de la atmósfera) en que se encuentra el cuerpo considerado, es decir, supondremos que para él es $\epsilon = 1$. El papel del medio se reduce solamente a crear una presión uniforme que actúa sobre la superficie del cuerpo. Precisamente esta presión exterior es la que designaremos a continuación por p . Si \mathcal{F} es la energía libre total del cuerpo, según la conocida relación termodinámica se tendrá

$$p = -(\partial \mathcal{F} / \partial V)_T,$$

y, por lo tanto, en la expresión de la diferencial $d\mathcal{F}$ hay que añadir un término $-p dV$. Así, en un campo exterior homogéneo tenemos, en vez de (11.5),

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{S} dT - p dV - \mathcal{P} \cdot d\mathfrak{E}.$$

Introduzcamos el potencial termodinámico total del cuerpo de acuerdo con la definición termodinámica habitual:

$$g\mathcal{P} = \mathcal{F} + pV. \quad (12.1)$$

Para la diferencial de esta magnitud (en un campo exterior homogéneo) se tiene la igualdad

$$dg\mathcal{P} = -\mathcal{S} dT + V dp - \mathcal{P} \cdot d\mathfrak{E}. \quad (12.2)$$

La variación de las magnitudes termodinámicas en un campo eléctrico exterior

suelen ser relativamente pequeñas. Como es sabido*, una pequeña variación de la energía libre (para valores dados de T y V) y una pequeña variación del potencial termodinámico (para valores dados de T y p) son iguales entre sí. Por ello, junto con (11.8) se puede escribir la relación análoga

$$g = g_0 - \frac{1}{2} \mathcal{E} \cdot \mathcal{P} \quad (12.3)$$

para el potencial termodinámico de un cuerpo en un campo homogéneo exterior. En ella g_0 se refiere al cuerpo en ausencia del campo y para valores dados de p , T (mientras que \mathcal{P}_0 en (11.8) es la energía libre del cuerpo cuando no existe campo y para valores dados de V y T).

Expresando de manera explícita la dependencia del momento dipolar respecto de V y \mathcal{E} según (11.9), podemos escribir también (12.3) en la forma

$$g = g_0(p, T) - \frac{1}{2} V \alpha_{ik} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_k, \quad (12.4)$$

donde el término correctivo debe darse en función de la temperatura y de la presión de acuerdo con la ecuación de estado del cuerpo en ausencia de campo. Esta fórmula se simplifica particularmente en el caso en que la susceptibilidad dieléctrica de la materia es pequeña:

$$g = g_0(p, T) - \frac{1}{2} \kappa V \mathcal{E}^2; \quad (12.5)$$

(cf. (11.11)).

La variación de volumen $V - V_0$ que se busca debida al campo exterior puede obtenerse ahora sin más que derivar g respecto de la presión (manteniendo constantes T y \mathcal{E}). Así, a partir de (12.5) se encuentra

$$V - V_0 = -\frac{1}{2} \mathcal{E}^2 [\partial(\kappa V) / \partial p]_T. \quad (12.6)$$

Esta magnitud puede ser positiva o negativa (en contraste con la electrostricción de los conductores, cuyo volumen siempre aumenta cuando se encuentran en un campo).

De manera análoga se puede calcular también la cantidad de calor Q que se absorbe en el dieléctrico al aplicar isotérmicamente un campo eléctrico exterior (manteniendo constante la presión exterior)**.

La derivación de $g - g_0$ respecto de la temperatura da la variación de entropía del cuerpo, y multiplicándola por T obtendremos la cantidad de calor buscada. Así, de (12.5) se sigue

$$Q = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 T [\partial(\kappa V) / \partial T]_p. \quad (12.7)$$

Los valores positivos de Q corresponden a absorción del calor.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 15.

** Si, en cambio, el cuerpo está térmicamente aislado, el someterlo a la acción de un campo conduce a una variación de temperatura igual a $\Delta T = -Q/C_p$, donde C_p es la capacidad calorífica del cuerpo a presión constante.

PROBLEMAS

1. Determinar la variación de volumen y el efecto electrocalórico para un elipsoide dieléctrico en un campo eléctrico homogéneo paralelo a uno de sus ejes.

Solución. Según las fórmulas (12.3) y (8.9) tenemos

$$g^0 = g^0_0 - \frac{V}{8\pi} \frac{\epsilon - 1}{n\epsilon + 1 - n} \mathfrak{E}^2.$$

Para la variación de volumen se encuentra:

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{n\epsilon + 1 - n} \frac{1}{K} - \frac{1}{(n\epsilon + 1 - n)^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right],$$

y para el efecto electrocalórico:

$$Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{n\epsilon + 1 - n} \alpha + \frac{1}{(n\epsilon + 1 - n)^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right],$$

donde $\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ es el coeficiente de compresibilidad del cuerpo y $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ su coeficiente de dilatación térmica.

En particular, para una placa circular planoparalela en un campo perpendicular a la misma es $n = 1$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{V - V_0}{V} &= \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{1}{K} - \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right], \\ Q &= \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \alpha + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right]. \end{aligned}$$

Para la misma placa (o cualquier cuerpo cilíndrico) en un campo longitudinal es $n = 0$ y

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{K} - \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right], \quad Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[(\epsilon - 1)\alpha + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right].$$

2. Determinar la diferencia entre la capacidad calorífica \mathcal{C}_ϕ de una placa circular planoparalela en un campo perpendicular a la misma, para una diferencia de potenciales constante entre sus caras, y la capacidad calorífica \mathcal{C}_D cuando el desplazamiento eléctrico es constante; en ambos casos se mantiene constante la presión exterior*.

Solución. Según los resultados del problema 1 la entropía de la placa circular es

$$\mathcal{S} = - \left(\frac{\partial g^0}{\partial T} \right)_p, \mathfrak{E} = \mathcal{S}_0(p, T) + \frac{V\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \alpha + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right].$$

La inducción del campo dentro de la placa coincide con el campo exterior: $D = \mathfrak{E}$. Por ello, para calcular la capacidad calorífica \mathcal{C}_D hay que derivar \mathcal{S} manteniendo constante \mathfrak{E} . La diferencia de potenciales entre las dos caras de la placa es $\phi = El = \mathfrak{E}l/\epsilon$, donde l es el grosor de la misma. En una contracción o dilatación uniforme del cuerpo, l varía proporcionalmente a $V^{1/3}$. Por consiguiente, para calcular la capacidad calorífica \mathcal{C}_ϕ hay que derivar \mathcal{S} manteniendo constante el producto $\mathfrak{E}V^{1/3}/\epsilon$. En definitiva, encontramos para la diferencia buscada:

$$\mathcal{C}_\phi - \mathcal{C}_D = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{4\pi\epsilon} \left[(\epsilon - 1)\alpha + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right] \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p - \frac{1}{3}\alpha \right].$$

* \mathcal{C}_ϕ es la capacidad calorífica de la placa colocada entre las armaduras de un condensador plano conectado a un circuito de f.e.m. constante. En un condensador no conectado, con cargas constantes sobre las armaduras, la placa tendría una capacidad térmica \mathcal{C}_D .

3. Determinar el efecto electrocalórico en un dieléctrico homogéneo cuyo volumen total se mantiene constante.

Solución. Rigurosamente hablando, la densidad del cuerpo cambia cuando lo colocamos en un campo exterior (densidad que deja de ser constante en el mismo), incluso si su volumen total se mantiene constante. Sin embargo, al calcular la variación de la entropía total cabe prescindir de esta circunstancia y considerar constante la densidad ρ en todo el cuerpo*.

Según (10.17) la entropía total del cuerpo vale

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho \int E^2 dV,$$

donde la integración se extiende a todo el volumen del mismo. La cantidad de calor absorbida resulta ser

$$Q = \frac{T}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho \int E^2 dV.$$

4. Determinar la diferencia $\mathcal{C}_\phi - \mathcal{C}_D$ (véase problema 2) cuando se conserva constante el volumen total de la placa.

Solución. Cuando se conserva constante el volumen de la placa (y por ello también su grosor) la derivación manteniendo fija la diferencia de potenciales es equivalente a la derivación para intensidad E constante. Utilizando la fórmula obtenida en el problema 3 para la entropía, obtendremos:

$$\mathcal{C}_E - \mathcal{C}_D = \frac{TVE^2}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho^2.$$

5. Un condensador está formado por dos superficies conductoras, que se encuentran a una distancia h una de otra que es pequeña comparada con las dimensiones de las armaduras; el espacio entre éstas lo ocupa una substancia cuya permitividad es ϵ_1 . En el condensador se introduce una pequeña esfera de radio $a \ll h$ de permitividad ϵ_2 . Determinar la variación de la capacidad del condensador.

Solución. Supongamos que la bolita se introduce en el condensador de modo que la diferencia de potenciales ϕ entre sus armaduras permanezca constante. El papel de energía libre cuando son constantes los potenciales de los conductores lo representa \mathcal{F} . Cuando no hay la esferita, $\mathcal{F} = -\frac{C_0 \phi^2}{2}$, donde C_0 es la capacidad inicial del condensador. Teniendo en cuenta que las dimensio-

nes de aquella son pequeñas, cabe considerar que ha sido introducida en un campo homogéneo de intensidad $\mathcal{E} = \phi/h$, y que la variación de \mathcal{F} es pequeña. Ahora bien, una pequeña variación de \mathcal{F} cuando los potenciales se mantienen constantes, es igual a una pequeña variación de \mathcal{F} cuando son constantes las cargas de las fuentes del campo. Mediante la fórmula obtenida en el problema del § 11 y la fórmula (8.2), obtendremos

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} C_0 \phi^2 - \frac{1}{2} a^3 \epsilon^{(e)} (\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)}) \phi^2 / (2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}) h^2,$$

de donde se sigue la capacidad buscada

$$C = C_0 + a^3 \epsilon^{(e)} (\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)}) / (2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}) h^2.$$

* La variación de densidad $\delta\rho$ es una cantidad de segundo orden respecto de la intensidad del campo ($\sim E^2$) y la variación de la entropía total ligada con ella es una cantidad de cuarto orden. En efecto, el término lineal respecto de $\delta\rho$ en la variación de la entropía total es $\frac{\partial S_0}{\partial \rho} \int \delta\rho dV$; pero la integral $\int \delta\rho dV = 0$, debido a que se conserva constante la masa total del cuerpo.

§ 13. Propiedades dieléctricas de los cristales

En un medio dieléctrico anisótropo (monocristal) la relación lineal entre el desplazamiento y la intensidad del campo eléctrico tiene una forma más complicada que no se reduce a la de una mera proporcionalidad.

La forma más general de una dependencia de este tipo viene dada por una expresión de la forma

$$D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik} E_k, \quad (13.1)$$

donde D_0 es un vector constante y el conjunto de cantidades ϵ_{ik} constituye un tensor de segundo orden llamado *tensor permeabilidad dieléctrica* o *permitividad* (o, más brevemente, *tensor dieléctrico*). El término independiente D_0 en la relación (13.1) no existe, sin embargo, en un cristal cualquiera. La mayoría de los tipos de simetría cristalográfica no admite la existencia de un tal vector constante (véase más adelante) y entonces tenemos simplemente

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k. \quad (13.2)$$

El tensor ϵ_{ik} es simétrico:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}. \quad (13.3)$$

Para ver que así es, basta aplicar la relación termodinámica (10.10) y observar que la derivada segunda

$$-4\pi \partial^2 \tilde{F} / \partial E_k \partial E_i = \partial D_i / \partial E_k = \epsilon_{ik}$$

no depende del orden de derivación.

Para la propia magnitud \tilde{F} tenemos (cuando se cumple (13.2)) la expresión

$$\tilde{F} = F_0 - \epsilon_{ik} E_i E_k / 8\pi. \quad (13.4)$$

La energía libre F es

$$F = \tilde{F} + E_i D_i / 4\pi = F_0 + \epsilon^{-1}_{ik} D_i D_k / 8\pi. \quad (13.5)$$

Al igual que cualquier otro tensor simétrico de segundo orden, el tensor ϵ_{ik} puede reducirse a la forma diagonal mediante una elección adecuada de los ejes de coordenadas. En general, por consiguiente, el tensor ϵ_{ik} viene determinado por tres cantidades independientes, a saber, por los tres valores principales $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$. Todas estas cantidades son siempre mayores que la unidad, de manera análoga a como $\epsilon > 1$ en un cuerpo isótropo (véase § 14).

Según sea el tipo de simetría del cristal, el número de valores principales del tensor ϵ_{ik} diferentes puede resultar también ser menor que tres*.

* Las propiedades del tensor simétrico ϵ_{ik} , bastante obvias, que se exponen a continuación se obtienen de manera muy simple utilizando la propiedad conocida por el álgebra tensorial según la cual a cada tensor simétrico de segundo orden se puede hacer corresponder el llamado «elipsoide tensorial», la longitud de cuyos semiejes es proporcional a los valores principales del tensor. La simetría del elipsoide corresponde en tal caso a la simetría del cristal necesariamente.

En los cristales de los sistemas triclínico, monoclínico y rómbico los tres valores propios son diferentes; estos cristales se llaman *cristales biáxicos**. En particular, para los cristales del sistema triclínico las direcciones de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} no están ligadas de manera unívoca con ninguna dirección cristalográfica. En los cristales del sistema monoclínico queda determinada de antemano la dirección de uno de los ejes principales: debe coincidir con el eje de simetría de segundo orden o ser perpendicular al plano de simetría del cristal. En cambio, en los cristales del sistema rómbico están determinados cristalográficamente los tres ejes principales del tensor ϵ_{ik} .

Por otra parte, en los cristales de los sistemas tetragonal, romboédrico y hexagonal coinciden dos de los tres valores principales, de modo que se tienen en total sólo dos cantidades independientes; tales cristales se califican de *uniáxicos*. Uno de los ejes principales coincide en este caso con el eje cristalográfico de simetría de orden cuarto, tercero o sexto y la dirección de los otros dos ejes principales se puede elegir de manera arbitraria**.

Finalmente, en los cristales del sistema cúbico son iguales los tres valores principales del tensor ϵ_{ik} y las direcciones de los ejes principales son por completo arbitrarias***. Esto significa que el tensor ϵ_{ik} tiene la forma $\epsilon\delta_{ik}$, es decir, viene determinado por un escalar ϵ . En otras palabras, en relación con sus propiedades dieléctricas los cristales de simetría cúbica no difieren de los cuerpos isótropos.

Pasemos ahora a examinar las propiedades dieléctricas típicas de los cristales que contienen el término constante D_0 en (13.1). La presencia de este término significa que el dieléctrico se polariza espontáneamente, incluso cuando no existe el campo eléctrico exterior; tales cuerpos se llaman *piroeléctricos*. El valor de esta polarización espontánea, sin embargo, es de hecho siempre muy pequeño (comparado con el de los campos moleculares). Esta circunstancia está vinculada con el hecho de que valores grandes de D_0 conducirían a la existencia de campos intensos dentro del cuerpo, lo que siempre es desfavorable desde el punto de vista energético y, por ello, no podría corresponder al equilibrio termodinámico. El que D_0 sea pequeño asegura al mismo tiempo la legitimidad del desarrollo de D en potencias de E , desarrollo cuyos dos primeros términos forman precisamente la expresión (13.1).

Las magnitudes termodinámicas de un cuerpo piroeléctrico se encuentran integrando la igualdad

$$-4\pi\partial\tilde{F}/\partial E_i = D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik}E_k,$$

de donde

$$\tilde{F} = F_0 - \epsilon_{ik}E_iE_k/8\pi - E_iD_{0i}/4\pi. \quad (13.6)$$

* Este término está vinculado con las propiedades ópticas de los cristales (véanse §§ 78 y 79).

** El elipsoide tensorial degenera en este caso en un elipsoide de rotación simétrico respecto del eje longitudinal. Hay que subrayar que para las propiedades físicas de un cristal, determinadas por un tensor simétrico de segundo orden, la existencia de un eje de simetría de tercer orden es ya equivalente a la isotropía total en un plano perpendicular a dicho eje.

*** El elipsoide tensorial degenera aquí en una esfera.

La energía libre es

$$\begin{aligned} F &= \tilde{F} + E_i D_i / 4\pi = F_0 + \epsilon_{ik} E_i E_k / 8\pi \\ &= F_0 + \epsilon^{-1}_{ik} (D_i - D_{0i})(D_k - D_{0k}) / 8\pi. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Obsérvese que en F desaparece el término que encontramos en \tilde{F} lineal respecto de E_i^* .

La energía libre total de un piroeléctrico se puede calcular según la fórmula (11.12), substituyendo en ella (13.7) y (13.1). Cuando no existe campo exterior, $\mathcal{E} = 0$, se tiene el sencillo resultado

$$F = \int [F_0 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 / 8\pi)] dV. \quad (13.8)$$

Es notable que la energía libre de un piroeléctrico, cuando no existe campo exterior, depende (como el campo \mathbf{E}) no sólo de su volumen, sino también de su forma.

Conforme se hizo ya notar, el fenómeno de la piroelectricidad no es posible para cualquier simetría del cristal. Dado que en una transformación de simetría arbitraria deben conservarse invariables todas las propiedades de un cristal, es claro que sólo puede ser piroeléctrico un cristal en el que existe una dirección orientada que se conserva constante (en particular, que no cambia en la de sentido opuesto) en todas las transformaciones de simetría; en esta dirección precisamente se encontrará el vector constante \mathbf{D}_0 .

Esta condición la cumplen solamente aquellos grupos de simetría que se componen de un solo eje junto con planos de simetría que pasan por el mismo. En particular, es evidente que no pueden ser piroeléctricos los cristales que poseen un centro de simetría. Veamos en cuáles de entre las 32 clases cristalográficas se manifiesta la piroelectricidad:

Sistema triclínico: C_1

Sistema monoclínico: C_s, C_2

Sistema rómbico: C_{2v}

Sistema tetragonal: C_4, C_{4v}

Sistema romboédrico: C_3, C_{3v}

Sistema hexagonal: C_6, C_{6v} .

Naturalmente, no existen cristales piroeléctricos entre las clases del sistema cúbico. En un cristal de la clase C_1 la dirección del vector piroeléctrico \mathbf{D}_0 no está ligada con ninguna dirección cristalográfica privilegiada, y en un cristal de la clase C_s debe estar situado en el plano de simetría. En cambio, en todas las restantes clases a que nos hemos referido más arriba, la dirección de \mathbf{D}_0 coincide con la del eje de simetría.

* Hay que hacer notar que en estas fórmulas prescindimos, en realidad, del efecto piezoeléctrico (es decir, de la influencia de las tensiones internas sobre las propiedades eléctricas del cuerpo, véase § 17). En consecuencia, y rigurosamente hablando, dichas fórmulas son aplicables solamente en el caso de campos homogéneos en el volumen del cuerpo, cuando las tensiones en él pueden no existir.

Hay que señalar que, en condiciones ordinarias, los cristales piroeléctricos carecen de momento dipolar eléctrico total, a pesar de que en ellos la polarización no es igual a cero. La razón de que así ocurra estriba en que dentro de un dieléctrico polarizado espontáneamente se tiene una intensidad no nula del campo \mathbf{E} . Gracias a que, efectivamente, la muestra posee de ordinario una cierta conductibilidad, que aunque pequeña no es, con todo, igual a cero, la existencia del campo provoca la aparición de una corriente que durará hasta que las cargas libres que se forman sobre la superficie del cuerpo hagan desaparecer el campo en la muestra. Al mismo efecto conducen los iones que se depositan sobre la superficie de la muestra procedentes del aire. En la práctica, las propiedades piroeléctricas se observan al calentar el cuerpo, cuando el valor de su polarización espontánea cambia y se pone de manifiesto esta variación.

PROBLEMAS

1. Determinar el campo creado por una esfera piroeléctrica en el vacío.

Solución. Dentro de la esfera se tiene un campo homogéneo en el cual la intensidad y el desplazamiento están ligados por la relación $2\mathbf{E} = -\mathbf{D}$ (como se sigue de (8.1) para $\mathbf{C} = 0$, es decir, en ausencia de un campo exterior superpuesto). Substituyendo en (13.1), obtendremos la ecuación

$$2E_i + \epsilon_{ik} E_k = -D_{0i}.$$

Elijamos los ejes de coordenadas a lo largo de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} . Se obtiene entonces a partir de dicha ecuación

$$E_i = -D_{0i}/(2 + \epsilon^{(i)}).$$

La polarización de la esfera vale

$$P_i = (D_i - E_i)/4\pi = 3D_{0i}/4\pi(2 + \epsilon^{(i)}).$$

El campo fuera de la misma es el campo de un dipolo eléctrico con momento eléctrico $\mathcal{P} = \mathbf{P}\mathbf{V}$.

2. Determinar el campo de una carga puntual en un medio anisótropo homogéneo*.

Solución. El campo de la carga puntual viene dado por la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi e \delta(\mathbf{r})$ (la carga se encuentra en el origen de coordenadas). En un medio anisótropo se tiene $D_i = \epsilon_{ik} E_k = -\epsilon_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}$; eligiendo los ejes x, y, z a lo largo de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} , obtendremos para el potencial la ecuación

$$\epsilon^{(x)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \epsilon^{(y)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \epsilon^{(z)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi e \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Mediante la introducción de nuevas variables definidas por

$$x' = x/\sqrt{\epsilon^{(x)}}, \quad y' = y/\sqrt{\epsilon^{(y)}}, \quad z' = z/\sqrt{\epsilon^{(z)}}, \quad (1)$$

dicha ecuación se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = -\frac{4\pi e}{\sqrt{(\epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}\epsilon^{(z)})}} \delta(x') \delta(y') \delta(z'),$$

* En los problemas 2-5 se supone que la anisotropía dieléctrica del medio no es piroeléctrica.

que formalmente difiere de la ecuación para el campo en el vacío tan sólo en la substitución de e por $e/\sqrt{\epsilon(x)\epsilon(y)\epsilon(z)}$. Por consiguiente,

$$\phi = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{(\epsilon(x)\epsilon(y)\epsilon(z))}} \left[\frac{x^2}{\epsilon(x)} + \frac{y^2}{\epsilon(y)} + \frac{z^2}{\epsilon(z)} \right]^{-1/2}.$$

En notación tensorial, sin presuponer cuál es el sistema de coordenadas elegido, tenemos

$$\phi = e/\sqrt{(|\epsilon| \epsilon^{-1}_{ik} x_i x_k)},$$

donde $|\epsilon|$ es el determinante del tensor ϵ_{ik} .

3. Determinar la capacidad de una esfera conductora (de radio a) que se encuentra en el interior de un medio dieléctrico anisótropo.

Solución. Mediante la transformación indicada en el problema que precede, la determinación del campo de una esfera con carga e en un medio anisótropo se reduce a determinar el campo en el vacío creado por la carga e' distribuida sobre la superficie del elipsoide

$$\epsilon_{ik} x'_i x'_k = \epsilon(x) x'^2 + \epsilon(y) y'^2 + \epsilon(z) z'^2 = a^2.$$

Aplicando la fórmula (4.14) para el potencial del campo de un elipsoide, obtendremos para la capacidad buscada

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon(x)\epsilon(y)\epsilon(z)}} \int_0^\infty \left[\left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon(x)} \right) \left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon(y)} \right) \left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon(z)} \right) \right]^{-1/2} d\xi.$$

4. Determinar el campo en una placa anisótropa planoparalela que se encuentra en un campo homogéneo exterior \mathfrak{E} .

Solución. De la condición de continuidad de la componente tangencial de la intensidad se deduce que

$$\mathbf{E} = \mathfrak{E} + A\mathbf{n},$$

donde \mathfrak{E} es la intensidad del campo homogéneo dentro de la placa, \mathbf{n} el vector unitario normal a su superficie y A una constante. Esta última se determina a partir de la condición de continuidad de la componente normal del desplazamiento: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot \mathfrak{E}$, o bien

$$n_i \epsilon_{ik} E_k = n_i \epsilon_{ik} \mathfrak{E}_k + A \epsilon_{ik} n_i n_k = \mathfrak{E}_i n_i.$$

De aquí se sigue

$$A = -(\epsilon_{ik} - \delta_{ik}) n_i \mathfrak{E}_k / \epsilon_{lm} n_l n_m.$$

5. Determinar el momento de las fuerzas que actúan sobre una esfera dieléctrica anisótropa que se encuentra (en el vacío) en un campo homogéneo exterior \mathfrak{E} .

Solución. Según (8.2) tenemos para la intensidad del campo dentro de la esfera

$$E_x = 3\mathfrak{E}_x/(\epsilon(x)+2),$$

(y análogamente para E_y , E_z), habiendo elegido los ejes x , y , z , a lo largo de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} . De aquí se sigue para las componentes del momento dipolar de una esfera (de radio a):

$$\mathcal{P}_x = \frac{4}{3} \pi a^3 P_x = \frac{\epsilon(x)-1}{\epsilon(x)+2} a^3 \mathfrak{E}_x, \text{ etc.}$$

En cuanto a la componente del momento de las fuerzas que actúan sobre la esfera, se tiene

$$K_z = (\mathcal{P} \times \mathfrak{E})_z = 3a^3 \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y (\epsilon(x) - \epsilon(y)) / (\epsilon(x) + 2)(\epsilon(y) + 2),$$

y análogamente para K_x , K_y .

6. En un medio anisótropo infinito existe una cavidad esférica. Expresar el campo en ella en función del campo homogéneo $E^{(e)}$ en el medio lejos de la misma.

Solución. Mediante la transformación (1) del problema 2 la ecuación para el potencial del campo en el medio se reduce a la ecuación de Laplace para el campo en el vacío. La ecuación para el potencial del campo en la cavidad se transforma, por el contrario, en la ecuación que corresponde al potencial en un medio con constantes dieléctricas $1/\epsilon^{(x)}$, $1/\epsilon^{(y)}$, $1/\epsilon^{(z)}$. Además, la esfera (de radio a) se transforma en un elipsoide con semiejes $a/\sqrt{\epsilon^{(x)}}$, $a/\sqrt{\epsilon^{(y)}}$, $a/\sqrt{\epsilon^{(z)}}$. Sean $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ los coeficientes de despolarización de este elipsoide (determinados por las fórmulas (4.25)). Aplicando al campo de este elipsoide la fórmula (8.7), obtendremos la relación

$$(1 - n^{(x)}) \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x'} + \frac{n^{(x)}}{\epsilon^{(x)}} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x'} = \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x'}$$

(y las analogas a lo largo de los ejes y' y z'). Volviendo a las coordenadas primitivas, se tiene

$$\partial \phi / \partial x' = \sqrt{\epsilon^{(x)}} \partial \phi / \partial x = \sqrt{\epsilon^{(x)}} E_x,$$

de modo que para el campo en la cavidad queda finalmente

$$E^{(i)}_x = \frac{\epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(x)} - n^{(x)}(\epsilon^{(x)} - 1)} E^{(e)}_x.$$

§ 14. Carácter positivo de la susceptibilidad eléctrica

Para determinar el carácter de la dependencia de las magnitudes termodinámicas de un dieléctrico en un campo con relación a su constante dieléctrica, consideremos el problema formal de la variación de la componente eléctrica de la energía libre total del cuerpo cuando ϵ experimente una variación infinitesimal.

Para un dieléctrico isótropo (pero no necesariamente homogéneo) tenemos, según (10.19),

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int (D^2 / 8\pi\epsilon) dV.$$

Al variar ϵ , varía también el desplazamiento del campo. Por lo tanto, la variación considerada de la energía libre es igual a

$$\delta \mathcal{F} = \int \frac{\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{D}}{4\pi\epsilon} dV - \int \frac{D^2}{8\pi\epsilon^2} \delta\epsilon dV = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}}{4\pi} dV - \int \frac{E^2}{8\pi} \delta\epsilon dV.$$

El primer término en el último miembro de la igualdad coincide con la expresión (10.2) del trabajo realizado en una variación infinitamente pequeña de las fuentes del campo (de las cargas de los conductores). Pero en el presente caso consideramos el cambio del campo cuando se conservan fijas sus fuentes; en consecuencia, este término se anula y obtenemos

$$\delta \mathcal{F} = - \int \delta\epsilon (E^2 / 8\pi) dV. \quad (14.1)$$

De esta fórmula se sigue, en primer lugar, el siguiente resultado importante: cualquier aumento de la constante dieléctrica del medio, sea cual sea la porción del mismo en que se produzca (manteniendo constantes las fuentes del campo), conduce a una disminución de su energía libre total. En particular, cabe afirmar

que la energía libre disminuye siempre al introducir en el medio dieléctrico conductores no cargados, dado que estos últimos pueden considerarse (en electrostática) como cuerpos en que ϵ es infinitamente grande. Esta proposición generaliza el teorema enunciado en el § 2 acerca de la disminución de la energía de un campo electrostático en el vacío cuando se introduce en él un conductor no cargado.

Por otra parte, se puede utilizar la fórmula (14.1) para demostrar la propiedad ya recordada en el § 7 de que la constante dieléctrica de un cuerpo cualquiera es mayor que la unidad (es decir, que la susceptibilidad eléctrica $(\epsilon - 1)/4\pi$ es positiva). Para ello es necesario demostrar antes, independientemente, que la variación total de la energía libre de un dieléctrico cuando se introduce en un campo electrostático es negativa*. La demostración puede basarse en la teoría termodinámica de perturbaciones, considerando la variación de la energía libre del cuerpo como resultado de una perturbación de sus niveles de energía cuánticos debida al campo eléctrico. Según esta teoría se tiene**

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \bar{V}_{nn} - \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \frac{|V_{nm}|^2 (w_m - w_n)}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} - \frac{1}{2kT} (\bar{V}_{nn} - \bar{V}_{nn})^2. \quad (14.2)$$

$E_n^{(0)}$ son aquí los niveles no perturbados, V_{mn} los elementos de matriz de la energía de perturbación y el trazo significa el promedio estadístico realizado según la distribución de Gibbs

$$w_n = \exp \{(\mathcal{F}_0 - E_n^{(0)})/kT\}.$$

El término \bar{V}_{nn} en la fórmula (14.2), lineal respecto del campo, es nulo salvo en los cuerpos piroeléctricos. En cambio, la variación de la energía libre que nos interesa, y que es cuadrática respecto del mismo, viene dada por los restantes términos de esta fórmula. En la forma en que se han escrito aquí, su carácter negativo es evidente.

Pero si de manera formal se considera la variación de la energía libre como resultado de un cambio gradual de la constante dieléctrica en el volumen del cuerpo, desde el valor 1 hasta el valor dado ϵ , de la fórmula (14.1) se sigue que $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ será negativo únicamente si $\epsilon > 1$, con lo que queda demostrado lo dicho anteriormente.

Exactamente de la misma manera se demuestran las desigualdades $\epsilon^{(i)} > 1$ para los valores principales del tensor ϵ_{ik} de un medio dieléctrico anisótropo. Para ello basta evidentemente considerar la energía de un campo dirigido a lo largo de cada uno de los tres ejes principales.

La energía libre total disminuye, en particular, cuando una carga cualquiera se lleva al cuerpo dieléctrico desde el infinito (lo que se puede interpretar como aumento de ϵ en un cierto volumen del campo en torno de la carga). Para deducir

* Nos referimos a una variación proporcional al cuadrado del campo. Recordaremos que, en los cuerpos piroeléctricos, la variación de la energía libre contiene también un término lineal respecto del campo, término que aquí carece de interés.

** Véase *Física estadística*, § 32, fórmulas (32.5) y (32.6); la fórmula que aquí damos difiere de aquellas tan sólo en la manera como se ha escrito.

de aquí que toda carga es atraída hacia el dieléctrico sería necesario demostrar aún, estrictamente hablando, que F no puede alcanzar un mínimo, cualquiera que sea la distancia finita no nula entre la carga y el cuerpo. No nos detendremos aquí a demostrar esta proposición, tanto más cuanto que la aparición de fuerzas atractivas entre una carga y un dieléctrico se puede considerar como un resultado bastante evidente de la interacción de esta carga con el momento dipolar del dieléctrico polarizado por ella.

Consecuencia inmediata de la fórmula (14.1) es la relativa a la dirección del movimiento del cuerpo dieléctrico en un campo eléctrico casi homogéneo, es decir, en un campo que se puede considerar constante en la región ocupada por el cuerpo. En este caso E^2 puede sacarse fuera del símbolo de integración y la diferencia $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ es una cantidad negativa proporcional a E^2 . Tendiendo a ocupar la posición en la que su energía libre será mínima, el cuerpo se desplazará, por consiguiente, en la dirección orientada en que aumenta E .

§ 15. Fuerzas eléctricas en un dieléctrico líquido

El problema de calcular las fuerzas (llamadas a veces fuerzas *ponderomotrices*) que actúan sobre los dieléctricos en un campo eléctrico no homogéneo arbitrario, es bastante complicado y exige considerar separadamente los líquidos (o gases) y los sólidos. Empezaremos con el caso más simple, que es el de los dieléctricos líquidos.

Designaremos por $f dV$ la fuerza que actúa sobre el elemento de volumen del medio dV ; el vector \mathbf{f} puede llamarse *densidad (volumétrica) de fuerza*.

Como es sabido, las fuerzas que actúan sobre un volumen finito de un cuerpo pueden reducirse a fuerzas aplicadas a la superficie de este volumen*. Esta circunstancia resulta ser consecuencia de la ley de conservación del impulso. La fuerza que actúa sobre la materia en el volumen dV coincide con la variación de su impulso por unidad de tiempo. Esta variación debe ser igual a la cantidad de impulso que penetra durante el mismo tiempo en este volumen a través de su superficie. Si designamos el tensor flujo de impulso por σ_{ik} , se tendrá

$$\int f_i dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \quad (15.1)$$

donde la integración en el segundo miembro de la igualdad se extiende a la superficie del volumen V . El tensor σ_{ik} se llama *tensor de tensiones*. Es evidente que

$$\sigma_{ik} df_k = \sigma_{ik} n_k df$$

es la i -ésima componente de la fuerza que actúa sobre el elemento de superficie df (\mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie exterior al volumen dado).

* Véase vol. VII *Teoría de la elasticidad*, § 2.

De manera análoga, a una integral de superficie se reduce también el momento total de las fuerzas que actúan en el volumen en cuestión, con lo que queda asegurado el que se cumpla la ley de conservación del momento cinético. Como es sabido, la posibilidad de esta reducción se debe a la simetría del tensor de tensiones ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$). Esta última propiedad expresa, por consiguiente, la conservación de dicho momento.

Transformando la integral de superficie en (15.1) en una integral de volumen, obtendremos

$$\int f_i dV = \int (\partial \sigma_{ik} / \partial x_k) dV,$$

y de aquí se sigue, dado que el volumen de integración es arbitrario,

$$f_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k. \quad (15.2)$$

Ésta es la conocida fórmula que expresa las fuerzas volumétricas en función del tensor de tensiones.

Pasemos ahora al cálculo de dicho tensor. Cada pequeña porción de superficie se puede considerar como plana, y las propiedades del cuerpo, al igual que las del campo eléctrico cerca de la misma, como propiedades homogéneas. Por ello, para simplificar el razonamiento podemos considerar, sin limitar la generalidad del mismo, una placa de materia planoparalela homogénea (por su composición, densidad y temperatura) de grosor h que se encuentra en un campo eléctrico de dirección arbitraria, pero homogéneo*. Cabe imaginar este campo como creado por planos conductores superpuestos a las superficies de la capa y que llevan consigo las correspondientes distribuciones de cargas.

Siguiendo el método general de determinación de las fuerzas, sometamos uno de los planos conductores («el superior») a un desplazamiento virtual paralelo de valor infinitamente pequeño ξ ; la dirección de ξ es arbitraria y no coincide necesariamente con la dirección de la normal \mathbf{n} . Supondremos que el potencial del conductor (en cada uno de sus puntos) se conserva constante en el desplazamiento y que la deformación homogénea de la capa de dieléctrico provocada por este desplazamiento es isoterma.

Sobre la unidad de área de superficie actúa, de la parte del propio cuerpo (de la capa), una fuerza $-\sigma_{ik} n_k$. En el desplazamiento virtual esta fuerza efectúa un trabajo $-\sigma_{ik} n_k \xi_i$. Por otra parte, el trabajo realizado en la deformación isoterma y manteniendo constantes los potenciales de los conductores es igual a la disminución de la cantidad $\int \tilde{F} dV$, o bien (por unidad de área de la superficie de la capa) de la cantidad $h\tilde{F}$. De esta manera

$$\sigma_{ik} \xi_i n_k = \delta(h\tilde{F}) = h\delta\tilde{F} + \tilde{F}\delta h. \quad (15.3)$$

* Con ello prescindimos en el tensor de tensiones de términos que podrían depender de los gradientes de la temperatura, del campo, etc. Estos términos, sin embargo, son términos extraordinariamente pequeños comparados con los que no contienen derivadas, en el mismo sentido en que son pequeños los términos que las contienen y que podrían existir en la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} .

Las magnitudes termodinámicas de un líquido dependen (para valores dados de la temperatura y de la intensidad del campo) tan sólo de su densidad; las deformaciones que no varían esta última (deformaciones de cizalla), no repercuten en el estado termodinámico. Por consiguiente, para una variación isoterma $\delta\tilde{F}$ en un líquido, escribiremos

$$\begin{aligned}\delta\tilde{F} &= \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\right)_{T,\rho} \cdot \delta\mathbf{E} + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T} \delta\rho \\ &= -\frac{\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E}}{4\pi} + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T} \delta\rho.\end{aligned}\quad (15.4)$$

La variación de densidad de la capa de materia está ligada con la variación de su grosor por la relación $\delta\rho = -\rho \frac{\delta h}{h}$. En cuanto a la variación del campo, ésta se calcula como sigue.

A un punto dado del espacio (con vector posición \mathbf{r}) va a parar, en el desplazamiento, la materia que se encontraba en el punto $\mathbf{r}-\mathbf{u}$, donde \mathbf{u} es el vector desplazamiento de las partículas en el volumen de la capa. Dado que en las condiciones consideradas (deformación homogénea y constancia del potencial sobre los planos conductores) cada partícula de materia cambia de posición arrastrando consigo el valor de su potencial, la variación de este último en el punto dado del espacio vale

$$\delta\phi = \phi(\mathbf{r}-\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{u} \cdot \text{grad } \phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E},$$

donde \mathbf{E} es el campo homogéneo dentro de la capa no deformada. Pero puesto que la deformación es homogénea, tenemos

$$\mathbf{u} = z\xi/h, \quad (15.5)$$

donde z es la distancia contada a partir de la superficie inferior. Por lo tanto, la variación de la intensidad del campo será

$$\delta\mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \xi)/h. \quad (15.6)$$

Substituyendo en (15.4) todas las expresiones obtenidas y teniendo también en cuenta que $\delta h = \xi_z = \xi \cdot \mathbf{n}$, obtendremos

$$\begin{aligned}\sigma_{ik}\xi_i n_k &= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})(\xi \cdot \mathbf{E}) - \xi \cdot \mathbf{n} \rho \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho} + \xi \cdot \mathbf{n} \tilde{F} \\ &= \left\{ \frac{E_i D_k}{4\pi} - \rho \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho} \delta_{ik} + \tilde{F} \delta_{ik} \right\} \xi_i n_k.\end{aligned}$$

A partir de aquí se obtiene finalmente la siguiente expresión del tensor de tensiones

$$\sigma_{ik} = [\tilde{F} - \rho(\partial\tilde{F}/\partial\rho)_{\mathbf{E},T}] \delta_{ik} + E_i D_k / 4\pi. \quad (15.7)$$

En medios isotrópos, que son precisamente los que aquí consideramos, las direcciones de \mathbf{E} y \mathbf{D} coinciden. Por ello $E_i D_k = E_k D_i$ y el tensor (15.7) resulta simétrico, como debía ser.

Cuando la relación lineal es de la forma $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, se tiene

$$\tilde{F} = F_0(\rho, T) - \epsilon E^2/8\pi \quad (15.8)$$

(véase (10.16)). F_0 es la energía libre por unidad de volumen de la materia cuando no existe campo. Según una conocida relación termodinámica, la derivada de la energía libre de la unidad de masa de materia respecto del volumen específico es la presión:

$$\left[\frac{\partial}{\partial(1/\rho)} \left(\frac{F_0}{\rho} \right) \right]_T = F_0 - \rho \left(\frac{\partial F_0}{\partial \rho} \right)_T = -p_0;$$

$p_0 = p_0(\rho, T)$ es aquella presión que se tendría en el medio de no existir el campo y para valores dados de ρ y T . En consecuencia, al substituir (15.8) en (15.7) se obtendrá

$$\sigma_{ik} = -p_0(\rho, T) \delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi} \left[\epsilon - \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] \delta_{ik} + \frac{\epsilon E_i E_k}{4\pi}. \quad (15.9)$$

En el vacío, esta expresión pasa a ser el conocido tensor maxwelliano de tensiones del campo eléctrico*:

$$\sigma_{ik} = (E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik})/4\pi.$$

Las fuerzas con que actúan sobre la superficie de separación dos medios diferentes en contacto, deben ser iguales y opuestas: $\sigma_{ik} n_k = -\sigma'_{ik} n'_k$, donde las cantidades con apóstrofo y sin él se refieren a uno y otro medio. Los vectores normales \mathbf{n} y \mathbf{n}' poseen sentidos opuestos, de modo que cabe escribir

$$\sigma_{ik} n_k = \sigma'_{ik} n_k. \quad (15.10)$$

Sobre la frontera de dos medios isotrópos la igualdad de las componentes tangenciales de las fuerzas se cumple idénticamente. En efecto, substituyendo (15.7) en (15.10) y tomando la componente tangencial, obtendremos

$$\mathbf{E}_t D_n = \mathbf{E}'_t D'_n.$$

Pero esta igualdad queda ya satisfecha en virtud de las condiciones de contorno relativas a la continuidad de \mathbf{E}_t y D_n . En cambio, la condición de que sean iguales las componentes normales de las fuerzas proporciona una condición no trivial que se impone a la diferencia de presiones entre un medio y otro.

Consideremos, por ejemplo, la frontera entre un líquido y la atmósfera (para esta última cabe hacer $\epsilon = 1$). Caracterizando con un apóstrofo las cantidades que se refieren a la atmósfera y utilizando para σ_{ik} la fórmula (15.9), se obtiene

$$-p_0(\rho, T) + \frac{E^2}{8\pi} \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T + \frac{\epsilon}{8\pi} (E_n^2 - E_t^2) = -p_{\text{atm}} + \frac{1}{8\pi} (E'_n{}^2 - E'_t{}^2).$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 33.

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno $E_t = E'_t$, $D_n = \epsilon E_n = D'_n = E'_n$, escribiremos esta igualdad en la forma

$$p_0(\rho, T) - p_{\text{atm}} = \frac{\rho E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} (\epsilon E_n^2 + E_t^2). \quad (15.11)$$

Esta relación hay que interpretarla como ecuación que determina la densidad ρ del líquido cerca de su superficie debida al campo eléctrico en él.

Determinemos ahora las fuerzas volumétricas que actúan en un medio dieléctrico. Derivando según (15.2) la expresión (15.9), obtendremos

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-p_0 + \frac{E^2}{8\pi} \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} E^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} (E_i D_k) \right].$$

Teniendo en cuenta la ecuación $\text{div } \mathbf{D} \equiv \partial D_k / \partial x_k = 0$, la expresión entre paréntesis en el último término se reduce a la suma

$$-\epsilon E_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + D_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} = -D_k \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right),$$

que se anula debido a que $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Así, pues, se tiene

$$\mathbf{f} = -\text{grad } p_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[E^2 \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \text{grad } \epsilon. \quad (15.12)$$

Si en el dieléctrico existen cargas extrañas con densidad volumétrica ρ_{ex} , a la fuerza \mathbf{f} se añade todavía el término

$$\mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} / 4\pi;$$

dado que $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ex}}$, este término es igual a

$$\rho_{\text{ex}} \mathbf{E}; \quad (15.13)$$

sin embargo, no debe pensarse que este resultado sea de suyo evidente (cf. el problema 3 del § 16).

En un gas, conforme se indicó ya en el § 7, cabe considerar la diferencia $\epsilon - 1$ como proporcional a la densidad. Entonces es $\rho \partial \epsilon / \partial \rho = \epsilon - 1$ y la fórmula (15.12) toma la forma más sencilla:

$$\mathbf{f} = -\text{grad } p_0 + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad } E^2. \quad (15.14)$$

La fórmula (15.12) es válida tanto para medios homogéneos como para medios no homogéneos respecto de su composición. En un medio no homogéneo, ϵ es función no sólo de ρ y T , sino también de la concentración de la mezcla, que varía de un punto a otro del medio. En cambio, en un medio de composición homogénea ϵ

es función solamente de ρ , T y $\text{grad } \epsilon$ puede escribirse explícitamente

$$\text{grad } \epsilon = (\partial \epsilon / \partial T)_\rho \text{ grad } T + (\partial \epsilon / \partial \rho)_T \text{ grad } \rho.$$

En estas condiciones, (15.12) pasa a ser

$$\mathbf{f} = -\text{grad } p_0(\rho, T) + \frac{\rho}{8\pi} \text{ grad } \left[E^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho \text{ grad } T. \quad (15.15)$$

Si también la temperatura es constante en el cuerpo, se anula el tercer término, y en el primero puede substituirse ∇p_0 por $\rho \nabla \zeta_0$ (según la conocida identidad termodinámica relativa al potencial químico en ausencia del campo: $\rho d\zeta_0 = dp_0 - S_0 dT$) con lo cual

$$\mathbf{f} = -\rho \text{ grad } \left[\zeta_0 - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right]. \quad (15.16)$$

Pero la expresión entre paréntesis no es sino el potencial químico de la materia en el campo eléctrico (véase (10.18)), de modo que

$$\mathbf{f} = -\rho \text{ grad } \zeta.$$

En particular, la condición de equilibrio mecánico $\mathbf{f} = 0$ en el caso de temperatura constante es:

$$\zeta = \zeta_0 - (E^2/8\pi)(\partial \epsilon / \partial \rho)_T = \text{const}, \quad (15.17)$$

de acuerdo con la condición termodinámica general de equilibrio*. De ordinario esta condición puede escribirse en una forma todavía más simple. La variación de densidad del medio bajo la acción del campo es proporcional a E^2 . Por consiguiente, si cuando no existe campo el medio es homogéneo respecto de su densidad, también cuando el campo exista cabe hacer $\rho = \text{const}$ en los dos últimos términos de (15.15); tener en cuenta la variación de ρ en las fórmulas que presuponen la relación lineal $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, representaría ir más allá de la precisión admitida. Entonces, igualando a cero el valor de \mathbf{f} dado por (15.15), obtendremos en el caso de temperatura constante la condición de equilibrio en la forma

$$p_0(\rho, T) - (\rho E^2/8\pi)(\partial \epsilon / \partial \rho)_T = \text{const}, \quad (15.18)$$

que difiere de (15.17) en que, en vez de ζ , aparece en ella p_0/ρ .

§ 16. Fuerzas eléctricas en los sólidos

Las propiedades dieléctricas de un sólido varían no sólo al cambiar su densidad (como en el caso de un líquido), sino también en las deformaciones que no la modifican (cizallamientos). Consideremos en primer lugar los cuerpos que son isótropos

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 25.

en ausencia del campo. La deformación rompe, en general, la isotropía del cuerpo; como resultado de ello pasan a ser también anisótropas sus propiedades dieléctricas y la permitividad escalar ϵ se ve substituida por el tensor dieléctrico (tensor permitividad) ϵ_{ik} .

El estado de un cuerpo poco deformado se describe, como es sabido, por el tensor de deformación

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

donde $\mathbf{u}(x, y, z)$ es el vector desplazamiento de los puntos del cuerpo. Teniendo en cuenta que estas cantidades son pequeñas, en la variación de las componentes ϵ_{ik} basta limitarnos únicamente a los términos de primer orden de magnitud respecto de u_{ik} . De acuerdo con esto, representaremos el tensor dieléctrico del cuerpo deformado como sigue:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{il} \delta_{lk}. \quad (16.1)$$

ϵ_0 es aquí la permeabilidad dieléctrica del cuerpo no deformado y los dos términos siguientes (que contienen las dos constantes escalares a_1, a_2) representan la forma más general de un tensor de segundo orden que se puede construir de manera lineal a partir de las componentes del tensor u_{ik} .

Veamos ahora en qué punto debe modificarse el razonamiento expuesto en el párrafo que precede. Dado que en un sólido \tilde{F} depende de todas las componentes del tensor de deformación, en vez de (15.4) hay que escribir

$$\delta \tilde{F} = -\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} / 4\pi + (\partial \tilde{F} / \partial u_{ik}) \delta u_{ik}.$$

En el desplazamiento virtual considerado, el vector \mathbf{u} viene dado por la fórmula (15.5), de modo que el tensor de deformación es

$$u_{ik} = (\xi_i n_k + \xi_k n_i) / 2h.$$

Substituyendo este valor en $\delta \tilde{F}$ y teniendo en cuenta la simetría del tensor u_{ik} (y, por consiguiente, también la de las derivadas $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}}$), se obtendrá

$$\delta \tilde{F} = -\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} / 4\pi + (\xi_i n_k / h) \partial \tilde{F} / \partial u_{ik}. \quad (16.2)$$

Está claro ahora que para el tensor de tensiones obtendremos, en lugar de (15.7), la expresión siguiente*:

$$\sigma_{ik} = \tilde{F} \delta_{ik} + (\partial \tilde{F} / \partial u_{ik})_{T,E} + E_i D_k / 4\pi. \quad (16.3)$$

* En esta fórmula la magnitud \tilde{F} , al igual que en todo lo que precede, es la energía libre referida a la unidad de volumen del cuerpo. Sin embargo, en teoría de la elasticidad se adopta de ordinario una definición algo distinta: las magnitudes termodinámicas se refieren a la cantidad de materia contenida en la unidad de volumen del cuerpo no deformado, materia que después de la deformación puede ocupar otro volumen. Es fácil pasar de una definición a la otra expresando la variación relativa de volumen debida a la

La fórmula (16.3) es aplicable cualquiera que sea la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} . Para un cuerpo no piroeléctrico (y no piezoeléctrico), en el cual $D_i = \epsilon_{ik} E_k$, $\tilde{\mathbf{F}}$ viene dada por la fórmula (13.4) y para las derivadas que necesitamos se obtiene

$$\partial \tilde{\mathbf{F}} / \partial u_{ik} = \partial F_0 / \partial u_{ik} - (a_1 E_i E_k + a_2 E^2 \delta_{ik}) / 8\pi.$$

Hecho esto, en (16.3) haremos en todos los términos $\epsilon_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik}$ con lo que se encuentra la siguiente fórmula para el tensor de tensiones:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + (2\epsilon_0 - a_1) E_i E_k / 8\pi - (\epsilon_0 + a_2) E^2 \delta_{ik} / 8\pi. \quad (16.4)$$

$\sigma_{ik}^{(0)}$ es el tensor de tensiones en ausencia de campo eléctrico, determinado por los módulos de rigidez y de compresión según las fórmulas ordinarias de teoría de la elasticidad.

Pasemos ahora a los cálculos análogos correspondientes a sólidos anisótropos*. Los cambios que, al hacerlo, hay que introducir en el razonamiento expuesto anteriormente se limitan a lo que sigue. En una deformación virtual de una capa de materia, sus ejes cristalográficos experimentan una rotación, en virtud de la cual cambian sus orientaciones respecto del campo eléctrico. Dada la anisotropía de las capas dieléctricas de un cristal, esta circunstancia conduce a una variación suplementaria de $\tilde{\mathbf{F}}$ que no se tuvo en cuenta en (16.2). Al calcular esta variación es indiferente suponer que los ejes del cristal giran de un cierto ángulo $\delta\phi$ respecto del campo \mathbf{E} , o que éste gira respecto de los ejes de un ángulo $-\delta\phi$; el segundo procedimiento es más cómodo. De esta manera, a la variación del campo (15.6), hay que añadir la variación de \mathbf{E} al girar $-\delta\phi$

$$\delta \mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi}) / h - \delta\phi \times \mathbf{E}.$$

El ángulo $\delta\phi$ está ligado con el vector corrimiento \mathbf{u} en la deformación por $\delta\phi = (\frac{1}{2}) \text{rot } \mathbf{u}$ (esta igualdad se obtiene fácilmente observando que en una rotación del cuerpo de ángulo $\delta\phi$ sus puntos se desplazan en $\mathbf{u} = \delta\phi \times \mathbf{r}$). Substituyendo aquí la expresión de \mathbf{u} dada por (15.5), obtendremos

$$\delta\phi = \text{rot } \mathbf{x} \boldsymbol{\xi} / 2h = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi} / 2h,$$

y luego

$$\delta \mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi}) / h + \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi}) / 2h = -[\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})] / 2h.$$

El primer término en (16.2) toma la forma

$$-\frac{1}{4\pi} \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} = \frac{1}{8\pi h} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})] = \frac{1}{4\pi h} \xi_i n_k \cdot \frac{1}{2} (E_i D_k + E_k D_i).$$

deformación en función del tensor u_{ik} (teniendo en cuenta la presencia en (16.3) de la derivada respecto de u_{ik} , esta operación hay que efectuarla con una precisión de hasta los términos de segundo orden). Como resultado, los dos primeros términos de (16.3) se reducen a un término de la forma $\partial \tilde{\mathbf{F}} / \partial u_{ik}$, de acuerdo con la fórmula habitual de la teoría de la elasticidad.

* Veremos en el § 17 que, para determinados tipos de simetría, el fenómeno de la electrostricción en los cristales puede diferir esencialmente de la electrostricción de los cuerpos isótropos. Tales cristales se califican de *piezoeléctricos*. Sin embargo, trataremos aquí tan sólo de los cristales no piezoeléctricos.

Resulta así evidente que el producto $E_i D_k$ debe ser substituido en (16.3) por la semisuma que aparece aquí entre paréntesis:

$$\sigma_{ik} = \tilde{F} \delta_{ik} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} + \frac{1}{8\pi} (E_i D_k + E_k D_i). \quad (16.5)$$

Obsérvese que la expresión obtenida resulta automáticamente simétrica respecto de los índices i y k , como debía ser.

En lo que concierne al tensor dieléctrico del cristal deformado, en vez de la expresión (16.1) con dos constantes escalares tendremos, en el caso general, una expresión de la forma

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}_{ik} + a_{iklm} u_{lm}, \quad (16.6)$$

donde a_{iklm} es un tensor constante de cuarto orden, simétrico respecto de los pares de índices i, k y l, m (pero no simétrico respecto de la permutación del par i, k con el par l, m). El número de componentes independientes no nulas de este tensor depende de la simetría del cristal, precisamente de su clase cristalográfica.

No nos detendremos a escribir aquí la fórmula para el tensor de tensiones (análoga a (16.4)) que se obtiene aplicando (16.6).

Las fórmulas obtenidas determinan las tensiones en el interior de un dieléctrico sólido. Sin embargo, no son necesarias si queremos determinar la fuerza total \mathbf{F} o el momento total \mathbf{K} de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y debidas al campo exterior. Consideremos un cuerpo sumergido en un medio líquido (o gaseoso) y que se mantiene inmóvil en el mismo. La fuerza total que actúa sobre él es igual a la integral $\oint \sigma_{ik} n_k df$, extendida a su superficie. En virtud de la continuidad de las fuerzas $\sigma_{ik} n_k$, es indiferente que el cálculo de esta integral se efectúe mediante los valores σ_{ik} de (16.4) o a partir de la fórmula (15.9) que se refiere al medio que rodea al cuerpo. Supongamos que este medio se encuentra en equilibrio mecánico y térmico. Entonces el cálculo se simplifica todavía más si se tiene en cuenta la condición de equilibrio (15.18). En virtud de esta condición, una parte del tensor de tensiones (15.9) resulta ser una compresión (o expansión) igual en todas direcciones y constante en todo el medio, fuerza que no contribuye en modo alguno ni a la fuerza \mathbf{F} ni al momento de las fuerzas \mathbf{K} totales que actúan sobre el cuerpo. Para calcular estas últimas, por lo tanto, cabe escribir σ_{ik} simplemente en la forma

$$\sigma_{ik} = (\epsilon/4\pi) (E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik}) \quad (16.7)$$

donde \mathbf{E} es el campo en el líquido y ϵ su permitividad; esta expresión difiere del tensor de tensiones maxwelliano del campo eléctrico en el vacío tan sólo en el factor ϵ . Así pues:

$$\mathbf{F} = (\epsilon/4\pi) \oint [\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{n}] df, \quad (16.8)$$

$$\mathbf{K} = (\epsilon/4\pi) \oint [\mathbf{r} \times \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{r} \times \mathbf{n}] df. \quad (16.9)$$

Haremos observar también que, dado que el líquido se encuentra en equilibrio, en estas fórmulas se puede calcular la integral extendiéndola a cualquier superficie cerrada que contenga al cuerpo en su interior (pero, claro está, que no encierre dentro de sí ninguno de los cuerpos cargados que son las fuentes del campo).

El cálculo de la fuerza total que actúa sobre un dieléctrico en un campo eléctrico (en el vacío) cabe abordarlo también desde otro punto de vista, a saber, expresándola no en función del campo que existe de hecho, sino del campo \mathcal{E} que crearían las fuentes dadas si no existiera el dieléctrico; éste es precisamente el «campo exterior» en que se introduce el cuerpo. En todo esto se supone que la distribución de las cargas que crean el campo no cambia al introducir el cuerpo en el mismo. Esta condición puede no cumplirse en la práctica, por ejemplo, si las cargas están distribuidas sobre la superficie de un conductor extenso y el dieléctrico se lleva a una distancia finita del mismo.

En una traslación virtual del cuerpo como un todo a lo largo de una distancia infinitamente pequeña \mathbf{u} , la energía libre total del mismo cambia, de acuerdo con (11.3), en el valor

$$\delta\mathcal{F} = - \int \mathbf{P} \cdot \delta\mathcal{E} dV,$$

donde

$$\delta\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - \mathcal{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathcal{E}$$

es la variación del campo en un punto dado \mathbf{r} del cuerpo. Dado que $\mathbf{u} = \text{const}$ y que $\text{rot } \mathcal{E} = 0$, tenemos

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathcal{E} = \mathbf{P} \cdot \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathcal{E}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathcal{E},$$

de modo que

$$\delta\mathcal{F} = -\mathbf{u} \cdot \int (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathcal{E} dV.$$

Por otra parte, $\delta\mathcal{F} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$ y llegamos así a la fórmula siguiente para la fuerza buscada*:

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathcal{E} dV. \quad (16.10)$$

De manera análoga es posible determinar el momento total de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Sin detenernos en efectuar los cálculos correspondientes, daremos el resultado:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{P} \times \mathcal{E} dV + \int \mathbf{r} \times (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathcal{E} dV. \quad (16.11)$$

* Hay que subrayar, sin embargo, que el integrando en esta integral no puede interpretarse en ningún caso como densidad volumétrica de fuerza. Ello es así porque las fuerzas locales en un dieléctrico están determinadas no sólo por el campo \mathcal{E} , sino también por los propios campos internos, campos que, en virtud de la ley de conservación del impulso, no proporcionan contribución alguna a la fuerza total, pero que influyen sobre la distribución de las fuerzas en el volumen del cuerpo.

En un campo cuasihomogéneo, que se puede considerar constante a distancias que son del orden de las dimensiones del cuerpo, la fórmula (16.10) da en primera aproximación

$$\mathbf{F} = \left(\int \mathbf{P} dV \cdot \text{grad} \right) \mathcal{E} = (\mathcal{P} \cdot \text{grad}) \mathcal{E}, \quad (16.12)$$

donde \mathcal{P} es el momento dipolar total del dieléctrico polarizado. Esta fórmula, claro está, podría obtenerse también derivando directamente \mathcal{F} en (11.8). En la fórmula (16.11) prescindimos en primera aproximación del segundo término comparado con el primero y llegamos así a la conclusión natural de que

$$\mathbf{K} = \mathcal{P} \times \mathcal{E}. \quad (16.13)$$

PROBLEMAS

1. Una esfera dieléctrica (de radio a) que se encuentra en un campo homogéneo exterior \mathcal{E} está dividida en dos mitades por un plano perpendicular a la dirección del campo. Determinar la fuerza de atracción entre los dos hemisferios.

Solución. Imaginemos que los dos hemisferios están separados por un estrato hueco de espesor infinitesimal y determinemos la fuerza mediante la fórmula (16.8) (con $\epsilon = 1$) efectuando en ella la integración sobre la superficie de un hemisferio y tomando para \mathbf{E} la intensidad del campo en el vacío cerca de la misma. Según (8.2), el campo dentro de la esfera es homogéneo e igual a $\mathbf{E}^{(i)} = 3\mathcal{E}/(2+\epsilon)$ (ϵ es la constante dieléctrica de la esfera). El campo en el estrato es perpendicular a la superficie e igual a

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{(i)} = 3\epsilon\mathcal{E}/(2+\epsilon).$$

En cambio, sobre la superficie exterior de la esfera se tiene

$$E_r = D_r^{(i)} = \frac{3\epsilon}{2+\epsilon} \mathcal{E} \cos \theta, \quad E_\theta = E_\theta^{(i)} = -\frac{3}{\epsilon+2} \mathcal{E} \sin \theta,$$

donde θ es el ángulo que forman el vector posición y el campo \mathcal{E} .

El cálculo de la integral conduce a una fuerza de atracción igual a*

$$F = 9(\epsilon-1)^2 a^2 \mathcal{E}^2 / 16(\epsilon+2)^2.$$

2. Determinar el cambio en la forma de una esfera dieléctrica en un campo eléctrico exterior homogéneo.

Solución. La solución es por completo análoga a la del problema 4 del § 5. Al determinar el cambio en la forma se supone que el volumen de la esfera no varía**. Para la parte elástica de la energía libre tenemos la misma expresión que en el problema 4 del § 5. La parte eléctrica viene dada por la igualdad

$$-\frac{1}{2} \mathcal{P} \cdot \mathcal{E} = -\frac{V}{8\pi} \frac{\epsilon(x)-1}{1+n(\epsilon(x)-1)} \mathcal{E}^2,$$

* La coincidencia del límite de esta expresión para $\epsilon \rightarrow \infty$ con el resultado del problema 3 del § 5 para una esfera conductora es pura coincidencia (en realidad, incluso el signo de estas fuerzas es diferente). La no-equivalencia física de estos dos casos es clara, dado que en el estrato intermedio entre los hemisferios conductores (que se encuentran a un mismo potencial) no hay campo, y en el problema en cuestión sí lo hay.

** El cambio de volumen se determina en el problema 1 del § 12.

donde, según (16.1), la permitividad a lo largo del eje x vale

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 + a_1 u_{xx} = \epsilon_0 + \frac{2}{3} a_1 (u_{xx} - u_{yy}) = \epsilon_0 + \frac{2}{3} a_1 (a - b)/R.$$

De la condición de mínimo de la energía libre total se sigue

$$\frac{a-b}{R} = \frac{9\epsilon^2 (\epsilon_0 - 1)^2 + 5a_1}{40\pi\mu (\epsilon_0 + 2)^2}.$$

Cuando $\epsilon_0 \rightarrow \infty$, esta expresión tiende al resultado correspondiente a una esfera conductora.

3. Determinar las fuerzas volumétricas en un dieléctrico sólido isótropo cuando existen en él cargas extrañas; el cuerpo se supone homogéneo.

Solución. Suponiendo constantes ϵ_0 , a_1 , a_2 y aplicando las ecuaciones $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{D} \cong \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{ex}}$, a partir de (16.4) obtendremos

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma^{(0)}_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{8\pi} (\frac{2}{3}a_1 + a_2) \frac{\partial E^2}{\partial x_i} + \left(1 - \frac{a_1}{2\epsilon_0}\right) \rho_{\text{ex}} E_i.$$

§ 17. Cuerpos piezoeléctricos

Las tensiones internas que aparecen en un dieléctrico isótropo que se encuentra en un campo eléctrico constituyen un efecto que es cuadrático respecto del campo. Este mismo efecto se presenta también en los cristales pertenecientes a toda una serie de clases cristalográficas. Pero para determinados tipos de simetría, las propiedades de electrostricción de los cristales tienen un carácter esencialmente distinto. Las tensiones internas que aparecen en estos cuerpos (llamados *cuerpos piezoeléctricos*) y debidas a un campo eléctrico son proporcionales a la primera potencia del campo. Recíprocamente, se presenta también el efecto contrario, es decir, la deformación de un cuerpo piezoeléctrico va acompañado de la aparición en él de un campo proporcional al valor de la deformación.

Dado que en un cuerpo piezoeléctrico nos interesa solamente el efecto fundamental, que es lineal, podemos prescindir en la fórmula general (16.5) de los términos de segundo grado respecto del campo. Entonces

$$\sigma_{ik} = \tilde{F} \delta_{ik} + (\partial \tilde{F} / \partial u_{ik})_{T,E}.$$

En este párrafo utilizaremos las magnitudes termodinámicas referidas a la cantidad de materia contenida en la unidad de volumen del cuerpo no deformado (véase la nota en la pág. 83). Entendiendo \tilde{F} en este sentido, tendremos simplemente

$$\sigma_{ik} = (\partial \tilde{F} / \partial u_{ik})_{T,E}. \quad (17.1)$$

Análogamente, la relación termodinámica para la diferencial $d\tilde{F}$ será

$$d\tilde{F} = -S dT + \sigma_{ik} du_{ik} - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}/4\pi. \quad (17.2)$$

Acerca del último término, es necesario hacer la siguiente observación: en la forma en que aquí aparece, este término (que procede de (10.9)) se refiere, estrictamente hablando, a la unidad de volumen del cuerpo deformado. Al no tener en cuenta esto, cometimos un error que, sin embargo, en el presente caso (para un cuerpo piezoeléctrico) es una cantidad de un orden de pequeñez mayor que el de los restantes términos en (17.2).

Las componentes del tensor u_{ik} representan en (17.2) el papel de variables independientes. En algunos casos puede ser conveniente utilizar, en vez de estas variables, las componentes σ_{ik} . Para ello hay que introducir el potencial termodinámico definido por

$$\tilde{\Phi} = \tilde{F} - u_{ik}\sigma_{ik}. \quad (17.3)$$

Para la diferencial de esta magnitud tendremos

$$d\tilde{\Phi} = -SdT - u_{ik}d\sigma_{ik} - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}/4\pi. \quad (17.4)$$

Hay que subrayar que la introducción del potencial termodinámico $\tilde{\Phi}$ en la electrodinámica de acuerdo con las fórmulas (17.3) y (17.4), está vinculada con la validez de la relación (17.1) y, por ello, es sólo posible en el caso de los cuerpos piezoeléctricos.

Una vez definidas las magnitudes termodinámicas necesarias, pasemos a describir las propiedades piezoeléctricas de los cristales. Si se eligen como variables independientes las magnitudes σ_{ik} y E_k , hay que considerar el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} como función de las mismas, y en el desarrollo de esta función hemos de conservar los términos de primer orden respecto de aquéllas. Los términos lineales en el desarrollo de las componentes de un vector en potencias de las componentes de un tensor de segundo orden pueden escribirse, en el caso más general, en la forma $4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}$, donde el conjunto de las constantes $\gamma_{i,kl}$ constituye un tensor de tercer orden (el factor 4π se ha introducido por conveniencia). Dado que el tensor σ_{kl} es simétrico respecto de sus índices, es claro que también el tensor $\gamma_{i,kl}$ se puede considerar simétrico con relación a los dos índices correspondientes:

$$\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk}. \quad (17.5)$$

Para mayor claridad, separamos del primer índice mediante una coma el par de índices simétrico k, l . Llamaremos al tensor $\gamma_{i,kl}$ *tensor piezoeléctrico*. Dado este tensor, quedan completamente determinadas las propiedades piezoeléctricas de un cristal.

Sumando los términos piezoeléctricos a la expresión (13.1) del desplazamiento eléctrico en un cristal, escribiremos

$$D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik}E_k + 4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}. \quad (17.6)$$

Los correspondientes términos adicionales aparecen también en las magnitudes termodinámicas. En un cristal no piezoeléctrico, cuando no existe un campo, el

potencial termodinámico es

$$\tilde{\Phi} = \Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2} \mu_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm},$$

donde Φ_0 se refiere al cuerpo no deformado y el segundo término representa la energía elástica ordinaria, que viene determinada por el *tensor de constantes elásticas* μ_{iklm} *. Para un piezoeléctrico, en cambio, tendremos

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{1}{2} \mu_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm} - \epsilon_{ik} E_i E_k / 8\pi - E_i D_{0i} / 4\pi - \gamma_{i,kl} E_i \sigma_{kl}. \quad (17.7)$$

La forma de los últimos tres términos se determina teniendo en cuenta que las derivadas de $\tilde{\Phi}$ respecto de E_i (para valores dados de las tensiones internas y de la temperatura), calculadas según la fórmula

$$D_i = -4\pi \partial \tilde{\Phi} / \partial E_i,$$

deben conducir a las expresiones (17.6).

Conocido $\tilde{\Phi}$, se puede obtener a partir de (17.4) una fórmula que expresa el tensor de deformación en función de las tensiones σ_{ik} y del campo \mathbf{E} :

$$u_{ik} = -(\partial \tilde{\Phi} / \partial \sigma_{ik})_{T, \mathbf{E}} = \mu_{iklm} \sigma_{lm} + \gamma_{i,kl} E_l. \quad (17.8)$$

Hay que hacer notar que la interpretación de las magnitudes μ_{iklm} y ϵ_{ik} como constantes elásticas y permitividad en el caso de un piezoeléctrico es, en cierto sentido, un puro convenio. De acuerdo con la definición que hemos adoptado, dan la dependencia de la deformación respecto de las tensiones elásticas, para una intensidad dada del campo, y la dependencia del desplazamiento eléctrico respecto de dicha intensidad, para valores dados de las tensiones, respectivamente. Pero si la deformación tiene lugar para un desplazamiento dado del campo, o bien si consideramos la dependencia del primero respecto de la intensidad para una deformación dada, el papel de los coeficientes elásticos y de la permitividad lo representarán otras magnitudes que pueden expresarse (si bien de manera bastante complicada) en función de las componentes de los tensores μ , ϵ y γ .

La determinación del campo en un cuerpo piezoeléctrico debe efectuarse junto con la determinación de su deformación y constituye un problema a la vez de electrostática y de teoría de la elasticidad. En efecto, debe buscarse una solución común a las ecuaciones electrostáticas

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (17.9)$$

* El tensor μ_{iklm} determina la relación existente entre las tensiones y las deformaciones:

$$u_{ik} = -\partial \Phi / \partial \sigma_{ik} = \mu_{iklm} \sigma_{lm}.$$

En la *Teoría de la elasticidad* (vol. VII, § 10), escribimos la dependencia inversa

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}$$

Es claro que todas las propiedades de simetría del tensor μ_{iklm} coinciden completamente con las propiedades de simetría del tensor λ_{iklm} .

En la energía libre F , la energía elástica aparece con el signo más:

$$F_{el} = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}.$$

En cambio, el potencial termodinámico se obtiene a partir de F restando $\sigma_{ik} u_{ik}$ y, por consiguiente,

$$\Phi_{el} = F_{el} - \sigma_{ik} u_{ik} = -\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} = -\frac{1}{2} \mu_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm}.$$

con \mathbf{D} dado por (17.6), y a las ecuaciones del equilibrio elástico

$$\partial \sigma_{ik} / \partial x_k = 0, \quad (17.10)$$

con las correspondientes condiciones de contorno sobre la superficie del cuerpo y teniendo en cuenta la relación entre σ_{ik} y la deformación dada por las fórmulas (17.8). En el caso general, este planteo del problema resulta muy complicado.

Sin embargo, el problema se simplifica considerablemente para un cuerpo de forma elipsoidal cuya superficie es libre (es decir, a la cual no se aplica ninguna fuerza mecánica exterior). En este caso (§ 8) el campo en el interior del cuerpo, y en consecuencia también su deformación, son homogéneos y todas las tensiones elásticas $\sigma_{ik} = 0$.

Finalmente, consideremos la cuestión que plantea el determinar qué tipos de simetría cristalográfica son susceptibles de presentar efectos piezoeléctricos. En otras palabras, se trata de ver qué limitaciones imponen las condiciones de simetría a las componentes del tensor $\gamma_{i,kl}$. En el caso general este tensor (que es simétrico respecto de los índices k y l) tiene 18 componentes no nulas independientes, pero de hecho el número de componentes independientes suele ser considerablemente menor.

En todas las transformaciones de simetría de un cristal dado, las componentes de su tensor $\gamma_{i,kl}$ deben conservarse invariables. De aquí se sigue desde luego que, en cualquier caso, no puede ser piezoeléctrico un cuerpo que posea un centro de simetría; en particular, naturalmente, ningún cuerpo isótropo puede serlo. En efecto, en la simetría respecto de dicho centro (cambio de signo de las tres coordenadas) cambian de signo todas las componentes de un tensor de tercer orden.

De las 32 clases cristalográficas, sólo 20 en total pueden presentar efectos piezoeléctricos. A éstas pertenecen, ante todo, las 10 clases de que se habló en el § 13, clases en las que se dan también los efectos piroeléctricos (todos los cuerpos piroeléctricos son también piezoeléctricos). Además, son piezoeléctricos los cristales de las siguientes 10 clases:

sistema rómbico: \mathbf{D}_2

sistema tetragonal: \mathbf{D}_4 , \mathbf{D}_{2d} , \mathbf{S}_4

sistema romboédrico: \mathbf{D}_3

sistema hexagonal: \mathbf{D}_6 , \mathbf{C}_{3h} , \mathbf{D}_{3h}

sistema cúbico: \mathbf{T} , \mathbf{T}_d .

Las componentes no nulas del tensor piezoeléctrico para cada clase se dan en los problemas de este párrafo.

PROBLEMAS

1. Determinar las componentes no nulas del tensor $\gamma_{i,kl}$ para las clases cristalinas no piroeléctricas susceptibles de ser piezoeléctricas.

Solución. La clase \mathbf{D}_2 tiene tres ejes de simetría de segundo orden perpendiculares entre sí que elegiremos como ejes x , y , z . Los giros de 180° en torno de estos ejes cambian los signos de cada

dos de las tres coordenadas. Dado que las componentes $\gamma_{i,kl}$ se transforman como los productos $x_i x_k x_l$, sólo pueden ser diferentes de cero aquellas componentes cuyos tres índices son todos diferentes:

$$\gamma_{x,yz}, \gamma_{z,xy}, \gamma_{y,zx}.$$

Las restantes componentes no nulas son iguales a éstas en virtud de la propiedad $\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk}$. De acuerdo con esto, la parte piezoeléctrica del potencial termodinámico* es

$$\tilde{\Phi}_{pie} = -2(\gamma_{x,yz} E_x \sigma_{yz} + \gamma_{y,zx} E_y \sigma_{zx} + \gamma_{z,xy} E_z \sigma_{xy}). \quad (1)$$

La clase D_{2d} se obtiene añadiendo a los ejes de la clase D_2 dos planos de simetría más, planos que pasan por uno de los ejes (digamos, por el eje z) y que dividen en dos el ángulo formado por los ejes x e y . La reflexión sobre uno de estos planos equivale a la transformación $x \rightarrow y, y \rightarrow x, z \rightarrow z$. Por ello, las componentes $\gamma_{i,kl}$ que difieren en la permutación de los índices x e y deben ser iguales, de modo que de los tres coeficientes en (1) solamente dos se conservan independientes:

$$\gamma_{z,xy}, \gamma_{x,yz} = \gamma_{y,zx}.$$

La clase T se obtiene a partir de la clase D_2 añadiendo cuatro ejes diagonales de simetría de tercer orden, la rotación en torno de los cuales equivale a la permutación circular de los ejes x, y, z , por ejemplo: $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$. Por ello, pasan a ser iguales los tres coeficientes en (1):

$$\gamma_{x,yz} = \gamma_{y,zx} = \gamma_{z,xy}.$$

El mismo resultado se obtiene para la clase cúbica T_d .

La clase D_4 posee un eje de simetría de cuarto orden (eje z) y cuatro ejes de segundo orden que se encuentran en el plano xy . Además de los ejes de simetría de la clase D_2 , basta considerar aquí la rotación de 90° en torno del eje z , es decir, la transformación $x \rightarrow y, y \rightarrow -x, z \rightarrow z$. En virtud de ésta, uno de los coeficientes en (1) se anula ($\gamma_{z,xy} = -\gamma_{z,yx} = -\gamma_{z,xy}$, de donde $\gamma_{z,xy} = 0$), y los otros dos difieren tan sólo en el signo: El mismo resultado se obtiene para la clase D_6 .

La clase S_4 contiene las transformaciones $x \rightarrow y, y \rightarrow -x, z \rightarrow -z$ y $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$. Las componentes diferentes de cero son

$$\gamma_{z,xy}, \gamma_{x,yz} = \gamma_{y,zx}, \gamma_{z,zx} = -\gamma_{z,yx}, \gamma_{x,zx} = -\gamma_{y,zy}.$$

Eligiendo convenientemente las direcciones de los ejes x, y , una de estas cantidades puede reducirse a cero.

La clase D_3 posee un eje de simetría de tercer orden (eje z) y tres ejes de simetría de segundo orden en el plano xy , uno de los cuales elegiremos como eje x . Para hallar las limitaciones que impone la existencia de un eje de tercer orden, conviene aplicar una transformación formal introduciendo las «coordenadas» complejas

$$\xi = x + iy, \eta = x - iy;$$

la coordenada z la conservaremos sin modificación alguna. A estas nuevas coordenadas refiramos también el tensor $\gamma_{i,kl}$. Los subíndices que caracterizan a sus componentes toman ahora los valores ξ, η, z . En una rotación de 120° alrededor del eje z , estas «coordenadas» se transforman de acuerdo con

$$\xi \rightarrow \xi e^{2\pi i/3}, \eta \rightarrow \eta e^{-2\pi i/3}, z \rightarrow z.$$

Las únicas componentes que, en estas condiciones, se conservan invariables y, por consiguiente, pueden ser diferentes de cero son las siguientes: $\gamma_{z,\eta\xi}, \gamma_{\eta,z\xi}, \gamma_{\xi,z\eta}, \gamma_{\xi,\xi\xi}, \gamma_{\eta,\eta\eta}$. En cambio, una rotación de 180° en torno del eje x conduce a la transformación $x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$

* Para evitar interpretaciones erróneas recordaremos que si se calculan las componentes del tensor de deformación u_{ik} derivando directamente la expresión concreta de Φ respecto de σ_{ik} , las derivadas respecto de las componentes σ_{ik} con $i \neq k$ darán un valor doble de las correspondientes componentes u_{ik} (cf. vol. VII, *Teoría de la elasticidad*, nota al final del problema del § 10).

o bien, en «coordenadas» $\xi, \eta, z : \xi \rightarrow \eta, \eta \rightarrow \xi, z \rightarrow -z$. Entonces $\gamma_{z, \eta \xi}$ y $\gamma_{z, z z}$ cambian de signo y, por lo tanto, deben anularse, mientras que el resto de las componentes antes citadas se transforman entre sí dos a dos, lo que conduce a las igualdades $\gamma_{\eta, z \xi} = -\gamma_{\xi, z \eta}$, $\gamma_{\xi, \xi \xi} = \gamma_{\eta, \eta \eta}$. Para escribir la expresión de Φ_{pie} hay que formar la suma $-\gamma_{i, kl} E_i \sigma_{kl}$ en la cual los índices toman los valores ξ, η, z :

$$\Phi_{pie} = -2\gamma_{\eta, z \xi} (E_{\eta} \sigma_{z \xi} - E_{\xi} \sigma_{z \eta}) - \gamma_{\xi, \xi \xi} (E_{\xi} \sigma_{\xi \xi} + E_{\eta} \sigma_{\eta \eta}).$$

Aquí hay que expresar aún las componentes E_i y σ_{ik} , dadas en función de las «coordenadas» ξ, η, z , en términos de las componentes relativas a las coordenadas iniciales x, y, z . Es fácil hacerlo aplicando la propiedad de que las componentes de un tensor se transforman como los productos de las correspondientes coordenadas. En consecuencia, por ejemplo, de

$$\xi^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

se sigue que

$$\sigma_{\xi \xi} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}.$$

Obtenemos así en definitiva

$$\Phi_{pie} = 2a(E_y \sigma_{zx} - E_x \sigma_{zy}) + b[2E_y \sigma_{xy} - E_x(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})], \quad (2)$$

donde $a = 2i\gamma_{\eta, z \xi}$, $b = 2\gamma_{\xi, \xi \xi}$ son constantes reales. Las relaciones entre las componentes $\gamma_{i, kl}$ expresadas en función de las coordenadas x, y, z son, como puede verse en (2)*:

$$\gamma_{y, zx} = -\gamma_{x, zy} \equiv a, \quad \gamma_{y, xy} = -\gamma_{x, xx} = \gamma_{x, yy} \equiv b.$$

La clase D_{3h} se obtiene añadiendo a la clase D_3 un plano de simetría perpendicular al eje de tercer orden (plano xy). La reflexión sobre este plano equivale a cambiar el signo de z y, por ello, también $\gamma_{\eta, z \xi} = 0$, de modo que en (2) queda sólo el término con el coeficiente b .

La clase C_{3h} posee, junto con un eje de tercer orden, un plano de simetría perpendicular al mismo. La reflexión en dicho plano equivale a cambiar el signo de z y, en consecuencia, deben ser iguales a cero todas las componentes $\gamma_{i, kl}$ entre cuyos índices aparece z un número impar de veces. Teniendo en cuenta también las limitaciones antes consideradas que impone un eje de simetría de tercer orden, se encuentra que sólo dos componentes son diferentes de cero, $\gamma_{\eta, \eta \eta}$ y $\gamma_{\xi, \xi \xi}$. Estas cantidades deben ser conjugado-complejas entre sí a fin de que Φ sea real. Haciendo $2\gamma_{\eta, \eta \eta} = a + ib$, $2\gamma_{\xi, \xi \xi} = a - ib$, obtendremos

$$\Phi_{pie} = a[2E_y \sigma_{xy} - E_x(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})] + b[2E_x \sigma_{xy} + E_y(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})]. \quad (3)$$

Mediante una elección adecuada de las direcciones de los ejes x, y , se pueden reducir a cero a o b .

2. El mismo problema para las clases susceptibles de presentar efectos piroeléctricos.

Solución. Tomemos como eje z el eje de simetría de segundo, tercero, cuarto o sexto orden, y en la clase C_s , el perpendicular al plano de simetría. En las clases C_{nv} el plano xz coincide con uno de los planos de simetría. Mediante una elección adecuada de los ejes, en la clase C_1 se pueden anular aún tres componentes, y la elección de los ejes x, y en la clase C_s , C_n permite anular una componente.

A continuación se indican todas las componentes no nulas de $\gamma_{i, kl}$ para cada una de las clases.

Clase C_1 : todas las $\gamma_{i, kl}$.

Clase C_s : todas las componentes que no contienen el índice z o lo contienen dos veces.

Clase C_{2v} : $\gamma_{z, xx}, \gamma_{z, yy}, \gamma_{z, zz}, \gamma_{x, xz}, \gamma_{y, yz}$.

Clase C_2 : igual que en la clase C_{2v} y, además, $\gamma_{x, yz}, \gamma_{y, xz}, \gamma_{z, xy}$.

Clase C_{4v} : $\gamma_{z, xx} = \gamma_{z, yy}, \gamma_{z, zz}, \gamma_{x, xz} = \gamma_{y, yz}$.

Clase C_4 : las mismas que en C_{4v} y, además, $\gamma_{x, yz} = -\gamma_{y, xz}$.

* En coordenadas no ortogonales, cual lo son las coordenadas ξ, η, z , hay que distinguir, como es sabido, entre las componentes covariantes y contravariantes de los tensores. Esta circunstancia debería tenerse en cuenta también al pasar a las coordenadas originales x, y, z . Sin embargo, evitamos el hacerlo obteniendo la relación que buscamos entre las diferentes componentes de $\gamma_{i, kl}$ en el sistema x, y, z directamente a partir de la forma de la combinación escalar (2).

Clase C_{3v} : $\gamma_{z,zz}, \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz}, \gamma_{x,xx} = -\gamma_{x,yy} = -\gamma_{y,xy}, \gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}$.

Clase C_3 : las mismas que en la clase C_{3v} y, además, $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,zx}, \gamma_{y,xx} = -\gamma_{y,yy} = \gamma_{x,xy}$.

Clase C_{6v} : $\gamma_{z,zz}, \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz}, \gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}$.

Clase C_6 : las mismas que en la clase C_{6v} y, además, $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,zx}$.

3. Determinar el módulo de Young (el coeficiente de proporcionalidad entre la tracción y el alargamiento relativo) para una placa planoparalela constituida por un cuerpo piezoeléctrico no piroeléctrico en los siguientes casos: a) de la placa tiran las armaduras de un condensador en cortocircuito, b) de la placa tiran las armaduras de un condensador no cargado, c) la placa se extiende paralelamente a su plano en ausencia de un campo exterior.

Solución. a) En este caso la intensidad del campo dentro de la placa es $E = 0$. La única componente diferente de cero del tensor σ_{ik} es la tensión σ_{zz} (el eje z es perpendicular al plano de la placa*). De (17.8) se sigue $u_{zz} = \mu_{zzzz} \sigma_{zz}$, de donde resulta para el módulo de Young E :

$$E = 1/\mu_{zzzz}.$$

b) En este caso en la placa se tiene $E_x = E_y = 0, D_z = 0$. De (17.6) y (17.8) se sigue

$$D_z = \epsilon_{zz} E_z + 4\pi \gamma_{z,zz} \sigma_{zz} = 0, u_{zz} = \mu_{zzzz} \sigma_{zz} + \gamma_{z,zz} E_z.$$

Eliminando entre estas dos ecuaciones E_z , se encuentra

$$1/E = \mu_{zzzz} - 4\pi \gamma_{z,zz}^2 / \epsilon_{zz}.$$

c) En este caso también $E_x = E_y = 0, D_z = 0$, mientras que la tensión puede suponerse aplicada a lo largo del eje x . Tenemos

$$D_z = \epsilon_{zz} E_z + 4\pi \gamma_{z,xx} \sigma_{xx} = 0, u_{xx} = \mu_{xxxx} \sigma_{xx} + \gamma_{z,xx} E_z.$$

Eliminando E_z , se obtendrá

$$1/E = \mu_{xxxx} - 4\pi \gamma_{z,xx}^2 / \epsilon_{zz}.$$

4. Hallar la ecuación que determina la velocidad del sonido en un medio piezoeléctrico.

Solución. En este problema resulta más conveniente utilizar como variables independientes las magnitudes u_{ik} , en vez de las σ_{ik} . Escribamos \tilde{F} en la forma

$$\tilde{F} = F_0 + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} - \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ik} E_i E_k - \frac{1}{4\pi} E_i D_{0i} + \beta_{i,kl} E_i u_{kl},$$

donde

$$\beta_{i,kl} = -\lambda_{klk'l'} \gamma_{i,k'l'},$$

por lo que

$$\sigma_{ik} = \partial \tilde{F} / \partial u_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} + \beta_{i,kl} E_l.$$

Las ecuaciones del movimiento de la teoría de la elasticidad son

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + \beta_{i,kl} \frac{\partial E_l}{\partial x_k},$$

donde \mathbf{u} es el vector desplazamiento ligado con u_{ik} por la igualdad

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

La ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 0$ da

$$\epsilon_{ik} \frac{\partial E_k}{\partial x_i} - 4\pi \beta_{i,kl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_i} = 0,$$

* No se supone que coincida con alguna de las direcciones cristalográficas privilegiadas.

y la intensidad del campo la expresaremos en función de su potencial:

$$\mathbf{E}_i = -\partial\phi/\partial x_i,$$

con lo que queda satisfecha la ecuación $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

En una onda acústica plana \mathbf{u} y ϕ son proporcionales a $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y de las ecuaciones antes escritas se sigue

$$\omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m - \beta_{i,ik} k_k k_l \phi,$$

$$\epsilon_{ik} k_i k_k \phi + 4\pi \beta_{i,ki} k_i k_k u_i = 0.$$

Eliminando entre ellas ϕ , escribiremos la condición de compatibilidad de las ecuaciones que se obtienen para u_i en la forma

$$|\omega^2 \delta_{ik} - \lambda_{iklm} k_l k_m - 4\pi(\beta_{i,mi} k_l k_m)(\beta_{p,qk} k_p k_q)/\epsilon_{rs} k_r k_s| = 0.$$

Para cada dirección dada del vector de onda \mathbf{k} , esta ecuación determina tres velocidades de fase, en general diferentes, para la propagación del sonido ω/k . La complicada dependencia de la velocidad respecto de la dirección de la onda constituye una propiedad característica de los medios piezoeléctricos.

§ 18. Desigualdades termodinámicas

Según las fórmulas del § 10, la energía libre total se representa en forma de integral

$$\mathcal{F} = \int F(T, \rho, \mathbf{D}) dV, \quad (18.1)$$

extendida a todo el espacio. Supondremos que la función $\mathbf{D}(x, y, z)$ que aparece en el integrando está sometida únicamente a la condición de cumplir la ecuación

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (18.2)$$

dentro del dieléctrico, y la condición

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi e \quad (18.3)$$

sobre la superficie de un conductor que posee una carga dada; mediante estas igualdades se establece la relación del campo con sus fuentes. Por lo demás, consideraremos la función $\mathbf{D}(x, y, z)$ como arbitraria y, en particular, no le imponemos de antemano la condición de que satisfaga a la segunda ecuación del campo $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ (donde $\mathbf{E} = 4\pi\partial F/\partial \mathbf{D}$), ni la condición de contorno $\phi = \text{const}$ sobre la superficie de los conductores. Demostraremos que estas últimas ecuaciones pueden obtenerse entonces a partir de la condición de que sea mínima la integral (18.1) respecto de las variaciones de la función $\mathbf{D}(x, y, z)$ que satisfacen a las ecuaciones (18.2) y (18.3). Hay que subrayar que la posibilidad de proceder de esta manera no es evidente a priori, ya que las distribuciones del campo que intervienen en la determinación del mínimo de la integral (18.1) no corresponden a estados físicamente posibles (tales distribuciones no satisfacen todas las ecuaciones del campo); en la condición termodinámica de mínimo de la energía libre, en cambio, se comparan entre sí únicamente estados diferentes físicamente posibles.

El problema de hallar el mínimo de la integral (18.1), supuesto que se cumplan las condiciones suplementarias (18.2) y (18.3), se resuelve mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Siguiendo este método, multiplicaremos la variación de la condición (18.2) por una función, de momento indeterminada, de las coordenadas (designémosla por $-\phi/4\pi$), y la variación de la condición (18.3) por un factor constante indeterminado (que llamaremos $\phi_0/4\pi$), igualando luego a cero la suma de las variaciones

$$\int \delta F dV - \frac{1}{4\pi} \int \phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} dV + \frac{\phi_0}{4\pi} \oint \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

En el primer término hagamos*

$$\delta F = (\partial F / \partial \mathbf{D})_{T, \rho} \cdot \delta \mathbf{D} = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} / 4\pi,$$

y el segundo lo transformamos integrando por partes:

$$\int \phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} dV = \oint \phi \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} - \int \delta \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \phi dV.$$

En definitiva obtenemos

$$\int (\mathbf{E} + \operatorname{grad} \phi) \cdot \delta \mathbf{D} dV + \oint (\phi_0 - \phi) \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

De aquí se sigue que en todo el volumen debe ser $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ (y, en consecuencia, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$) y que sobre la superficie del conductor se tiene $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ Estas son precisamente las ecuaciones correctas para la intensidad del campo, y el factor de Lagrange ϕ resulta ser su potencial.

De manera análoga se puede demostrar que las ecuaciones relativas al desplazamiento eléctrico se obtienen a partir de la condición de que sea mínima la integral

$$\mathcal{F} = \int \tilde{F}(T, \rho, \mathbf{E}) dV$$

en la que se varía la función $\mathbf{E}(x, y, z)$ con las condiciones suplementarias de que sea $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ y $\phi = \text{const}$ sobre la superficie del conductor. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \int (\partial \tilde{F} / \partial \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E} dV = \int \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \delta \phi dV / 4\pi \\ &= \oint \delta \phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} / 4\pi - \int \delta \phi \operatorname{div} \mathbf{D} dV / 4\pi = 0. \end{aligned}$$

La primera integral es igual a cero, puesto que $\delta \phi = 0$ sobre la superficie, y de la segunda se sigue, teniendo en cuenta que $\delta \phi$ es arbitraria en el volumen, la ecuación buscada $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

* La energía libre presenta un mínimo para una temperatura dada. La variación debe efectuarse respecto de dos magnitudes independientes: \mathbf{D} y ρ . Nos interesa aquí tan sólo el resultado de la variación respecto de \mathbf{D} . La variación de la integral (18.1) respecto de la densidad (con la condición suplementaria de que sea constante la masa del cuerpo, es decir, la integral $\int \rho dV$), en cambio, da una de las condiciones ordinarias del equilibrio térmico, a saber, la constancia del potencial químico ζ .

Si el cuerpo no se encuentra en un campo eléctrico exterior (en particular, si no existen conductores cargados), puede resultar posible formular la condición de equilibrio termodinámico como condición de mínimo absoluto (incondicional) de la energía libre total (18.1). Esta condición se reduce a la condición de que sea mínima la densidad de energía libre F en tanto que función de la variable independiente \mathbf{D} :

$$\partial F / \partial \mathbf{D} = \mathbf{E} / 4\pi = 0,$$

es decir, la intensidad del campo debe ser nula en todo el espacio. Si en estas condiciones se puede hallar una distribución del desplazamiento eléctrico que satisfaga la condición $\text{div } \mathbf{D} = 0$, el estado que así se encuentra corresponderá al equilibrio termodinámico*.

Igualando a cero la variación primera de la energía libre, encontramos tan sólo condiciones necesarias, pero no suficientes, para que aquélla sea mínima. La determinación de condiciones suficientes exige investigar la variación segunda. Estas condiciones adoptan la forma de determinadas desigualdades (las llamadas *desigualdades termodinámicas*) y, como es sabido, son condiciones que permiten asegurar el carácter estable de un estado del cuerpo**.

Cuando el vínculo entre \mathbf{D} y \mathbf{E} es lineal, todas las relaciones se simplifican considerablemente y la desigualdad termodinámica que nos interesa (ligada con las propiedades dieléctricas del cuerpo) pasa a ser evidente. La energía libre total vale

$$F_0 + \int (D^2 / 8\pi\epsilon) dV.$$

Está claro que esta energía puede presentar un mínimo tan sólo si $\epsilon > 0$; en el caso contrario sería posible disminuir indefinidamente el valor de la integral sin más que atribuir al desplazamiento \mathbf{D} un valor arbitrariamente grande. De esta manera, nada esencialmente nuevo obtenemos en este caso, puesto que ya sabemos que la permitividad debe ser, en efecto, no tan sólo positiva, sino también mayor que la unidad (véase § 14).

En cambio, en el caso general en que la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} es arbitraria hay que considerar la variación segunda de la integral (18.1), variando precisamente a la vez \mathbf{D} y ρ (manteniendo constante tan sólo la temperatura). En un cuerpo isotropo $F(T, \rho, \mathbf{D})$ depende únicamente del módulo del vector \mathbf{D} , si bien se varían sus tres componentes independientemente. Elijamos la dirección del vector \mathbf{D} antes de la variación según el eje z . Entonces, el cambio en el módulo del vector \mathbf{D} se expresa en función de las variaciones de sus componentes, con una precisión que alcanza los términos de segundo orden, mediante la igualdad

$$\delta D = \delta D_z + (\delta D_x)^2 / 2D + (\delta D_y)^2 / 2D.$$

* Estamos considerando aquí cuerpos en los cuales puede ser $\mathbf{D} \neq 0$ a la vez que $\mathbf{E} = 0$ (véase el párrafo siguiente). En el caso contrario tendríamos, simplemente, el resultado trivial $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ en todo el espacio.

** Véase vol. V. *Física estadística*, § 21.

Las variaciones primera y segunda de la integral (18.1) se obtienen a la vez en la expresión

$$\int \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \delta D + \frac{\partial F}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} (\delta D)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \partial \rho} \delta D \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} (\delta \rho)^2 \right\} dV.$$

Substituyendo aquí δD por su valor y reuniendo los términos de segundo orden, se encuentra la variación segunda:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{2D} \frac{\partial F}{\partial D} [(\delta D_x)^2 + (\delta D_y)^2] dV + \\ & + \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} (\delta D_z)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \partial \rho} \delta D_z \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} (\delta \rho)^2 \right\} dV. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Los dos términos aquí escritos son independientes el uno del otro. El primero de ellos es positivo si $\frac{1}{D} \frac{\partial F}{\partial D} > 0$. Pero $\partial F / \partial \mathbf{D} = \mathbf{E} / 4\pi$, de modo que la derivada $\partial F / \partial D$ es positiva o negativa según que el vector \mathbf{D} sea paralelo o antiparalelo al vector \mathbf{E} . Así pues, las direcciones orientadas de los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} deben ser las mismas.

Las condiciones para que el segundo término en (18.4) sea positivo se reducen a las desigualdades

$$\partial^2 F / \partial \rho^2 > 0, \quad (18.5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial D} \right)^2 > 0. \quad (18.6)$$

Dado que $\partial F / \partial \rho = \zeta$, $\partial F / \partial D = E / 4\pi$, de la primera de ellas se deduce

$$(\partial \zeta / \partial \rho)_{D, T} > 0, \quad (18.7)$$

y la segunda se puede escribir también en forma de jacobiano:

$$\frac{\partial(\partial F / \partial D, \partial F / \partial \rho)}{\partial(D, \rho)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \rho)} > 0.$$

Pasando de las variables D, ρ a las variables D, ζ , se tiene

$$\frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \rho)} = \frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \zeta)} \frac{\partial(D, \zeta)}{\partial(D, \rho)} = \left(\frac{\partial E}{\partial D} \right)_{\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_D > 0;$$

en virtud de (18.7), esta desigualdad equivale a la condición

$$(\partial E / \partial D)_{\zeta, T} > 0. \quad (18.8)$$

Hemos obtenido así las desigualdades termodinámicas que buscábamos. Cuando

no existe campo la desigualdad (18.7) pasa a ser la condición ordinaria de que sea positiva la compresibilidad isotérmica $(\partial p / \partial \rho)_T > 0^*$. En cambio, la desigualdad (18.8) da $\epsilon > 0$, de modo que cuando $E \rightarrow 0$ el desplazamiento $D \rightarrow \epsilon E$.

De las dos desigualdades (18.5) y (18.6), la segunda es la más restrictiva; puede quedar violada antes que la primera, mientras que es imposible que ocurra lo contrario. La igualdad

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial D} \right)^2 = \frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \rho)} = 0$$

corresponde al llamado *estado crítico***. Esta condición es más conveniente escribirla en otra forma multiplicándola por el factor diferente de cero $\partial(D, \rho) / \partial(E, \rho)$:

$$\partial(E, \zeta) / \partial(E, \rho) = (\partial \zeta / \partial \rho)_{E, T} = 0. \quad (18.9)$$

La determinación de las condiciones suplementarias de estabilidad del estado crítico de una sustancia exige investigar las variaciones tercera y cuarta, problema en que no nos detendremos aquí. Tan sólo indicaremos que ello conduce a los resultados

$$(\partial^2 \zeta / \partial \rho^2)_{E, T} = 0, \quad (18.10)$$

$$(\partial^3 \zeta / \partial \rho^3)_{E, T} > 0, \quad (18.11)$$

análogos a los que son válidos en ausencia del campo eléctrico.

PROBLEMA

Determinar el desplazamiento del punto crítico de una sustancia dieléctrica en un campo eléctrico.

Solución. Substituyendo en (18.9) la expresión de ζ dada por (10.18), encontramos

$$(\partial \zeta_0 / \partial \rho)_T - (E^2 / 8\pi)(\partial^2 \epsilon / \partial \rho^2)_T = 0.$$

Para el potencial químico cuando $E = 0$ se tiene $\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$ (ver nota* al pie de la pág.) donde $p = p(\rho, T)$ debe interpretarse como ecuación de estado de la materia cuando no existe campo. Así, pues,

$$(\partial p / \partial \rho)_T = (\rho E^2 / 8\pi)(\partial^2 \epsilon / \partial \rho^2)_T.$$

* Recordemos que, cuando no existe campo, ζ es el potencial termodinámico por unidad de masa de materia y, según las relaciones termodinámicas ordinarias, su diferencial $d\zeta = \frac{1}{\rho} dp - \frac{S}{\rho} dT$, de modo que $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$. En el razonamiento expuesto hemos dejado de lado la segunda de las desigualdades termodinámicas ordinarias, la que expresa que la capacidad calorífica es positiva.

** Véase vol. V, *Física estadística*, § 83.

Si no hay campo eléctrico, el punto crítico viene determinado por la igualdad $(\partial p / \partial \rho)_T = 0$, a la vez que para su estabilidad debe ser también $(\partial^2 p / \partial \rho^2)_T = 0$. Tenemos, por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \cong \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \Delta \rho + \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T} \Delta T \cong \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T} \Delta T,$$

donde ΔT , $\Delta \rho$ son las variaciones de la temperatura crítica y de la densidad (variaciones que, como confirma el resultado final, son del mismo orden de pequeñez). Finalmente, para la variación de la temperatura se obtiene

$$\Delta T = \frac{\rho E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right)_T / \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T}.$$

El desplazamiento de la presión crítica en función de ΔT se determina por

$$\Delta p = (\partial p / \partial T)_\rho \Delta T.$$

En cambio, en lo que concierne a la variación $\Delta \rho$, para determinarla es necesario utilizar de manera análoga la igualdad (18.10).

§ 19. Medios ferroeléctricos

Entre las diferentes modificaciones cristalográficas de una misma sustancia cabe encontrar tanto las piroeléctricas como las no piroeléctricas. Si el paso entre dos de tales modificaciones tiene lugar mediante un cambio de fase de segunda especie, cerca del punto en que se produce la transición la sustancia muestra toda una serie de propiedades características que la distinguen de los piroeléctricos ordinarios. Estas propiedades se califican de *ferroeléctricas*.

En un cristal piroeléctrico ordinario el cambio de la dirección de polarización espontánea está vinculado con la necesidad de una reconstrucción profunda de la red cristalina. Incluso si el resultado final de dicha reconstrucción fuese favorable desde el punto de vista energético, bien puede ocurrir que el que tenga lugar resulte imposible debido al hecho de que exigiría saltar «barreras energéticas» muy altas.

En un cuerpo ferroeléctrico, en cambio, la situación es fundamentalmente otra, debido a que cerca del punto de cambio de fase de segunda especie (del punto de Curie) la disposición de los átomos en la red cristalina de la fase piroeléctrica difiere relativamente muy poco de su disposición en la red no piroeléctrica (en virtud de lo cual es también pequeña la polarización espontánea). Por esta causa, un cambio en la dirección de la polarización espontánea exige, en tal caso, únicamente una reestructuración más bien pequeña de la red (un pequeño desplazamiento de los átomos) y puede producirse de manera relativamente fácil.

El carácter concreto de las propiedades ferroeléctricas de un cuerpo dependen de modo esencial de su simetría cristalográfica. La dirección de polarización espontánea de la fase piroeléctrica (que llamaremos *eje ferroeléctrico*) viene determinada de antemano por la propia estructura de la fase no piroeléctrica al otro lado del punto de Curie. En algunos casos esta determinación es unívoca, en el sentido de que el eje ferroeléctrico se manifiesta solamente en una dirección cristalográfica del todo determinada; la dirección de la polarización espontánea viene fijada en este caso salvo el signo, puesto que en la fase no piroeléctrica las dos direcciones de sen-

tidos opuestos paralelos al eje ferroeléctrico deben ser del todo equivalentes (en el caso contrario, también esta modificación cristalográfica poseería características piroeléctricas). En cambio, en otros casos, la simetría de la fase no piroeléctrica puede ser tal que admita la aparición de una polarización espontánea en una cualquiera de varias direcciones cristalográficas equivalentes*.

La teoría cuantitativa de la ferroelectricidad puede desarrollarse en correspondencia con la teoría general de los cambios de fase de segunda especie**; así procedió V. L. GINZBURG (1945).

Como base de los razonamientos que seguirán más adelante, expondremos algunas consideraciones relativas a la estabilidad termodinámica de los estados. Desde este punto de vista, la transición se caracteriza por el hecho de que, a un lado de la misma, el estado con $\mathbf{D} = 0$ puede ser estable, mientras que al otro lado es siempre inestable y, en consecuencia, debe aparecer un desplazamiento eléctrico diferente de cero (incluso para un campo \mathbf{E} igual a cero). Para concretar, supondremos a continuación que la fase piroeléctrica ($\mathbf{D} \neq 0$) corresponde a temperaturas $T < \Theta$ (Θ es el punto de transición); sin embargo, hay que subrayar que esta disposición de las fases, si bien es la más frecuente, en modo alguno es necesaria: en la naturaleza se observa también el caso opuesto.

Dado que nos interesan, ante todo, las propiedades dieléctricas de la materia, supondremos en primer lugar que no hay tensiones internas en el cuerpo. Para determinar las condiciones de estabilidad cabe partir de la condición de que sea mínimo (para un valor dado de la temperatura y tensiones constantes iguales a cero) el potencial termodinámico total del cuerpo. Como vimos en el § 18, dicha condición se reduce a la de que sea positiva la variación segunda del potencial termodinámico por unidad de volumen Φ . Para los estados en que el desplazamiento difiere poco de cero, el papel de variación segunda de Φ lo representa simplemente la expresión

$$\Phi - \Phi_0 = (1/8\pi)\epsilon^{-1}_{ik}D_iD_k.$$

Si se eligen los ejes de coordenadas de forma que coincidan con los ejes principales del tensor ϵ_{ik} , se tendrá

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon(x)} D_x^2 + \frac{1}{\epsilon(y)} D_y^2 + \frac{1}{\epsilon(z)} D_z^2 \right). \quad (19.1)$$

* Un ejemplo del primer tipo lo ofrece la sal de Seignette, cuya fase no piroeléctrica presenta simetría rómbica. El eje ferroeléctrico aparece en ella (en el punto de Curie) en una dirección cristalográfica bien determinada (uno de los ejes de segundo orden), pasando a ser monoclinica la propia red.

Un ejemplo del segundo tipo es el del titanato de bario. Su modificación no piroeléctrica posee una red cúbica y puede ser ferroeléctrico cualquiera de sus tres ejes cúbicos. Una vez que en el punto de Curie se presenta la polarización espontánea, estas tres direcciones, naturalmente, dejan de ser equivalentes: tan sólo sigue siendo eje de cuarto orden el eje ferroeléctrico y la red se transforma en tetragonal.

** Véase vol. V, *Física estadística*, cap. XIV. La exposición que sigue, sin embargo, se ajusta a un esquema que difiere del habitual.

Mientras los tres coeficientes $\frac{1}{\epsilon^{(i)}}$ sean positivos, el estado con $\mathbf{D} = 0$ satisface las condiciones de estabilidad (es decir, puede corresponder a un mínimo de Φ). Así pues, la fase piroeléctrica puede aparecer tan sólo si cambia de signo uno de estos coeficientes. El cambio de fase de segunda especie se determina así por la condición de que este coeficiente se anule.

En estas condiciones, pasa a ser ferroeléctrico el eje para el cual $1/\epsilon^{(i)}$ toma el valor cero. Aquí son posibles varios casos, según sea la simetría de la fase no piroeléctrica. Si esta simetría es tal que $\epsilon^{(x)} \neq \epsilon^{(y)} \neq \epsilon^{(z)}$, se anula uno sólo de los coeficientes (19.1) y la posición del eje ferroeléctrico queda fijada unívocamente. Si $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon^{(z)}$ (para lo cual es necesario que la simetría sea cúbica), los tres coeficientes se anulan simultáneamente y el eje ferroeléctrico puede aparecer en diferentes direcciones (véase más adelante). Finalmente, si en virtud de la simetría $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} \neq \epsilon^{(z)}$, pueden anularse o bien un coeficiente o bien dos de ellos a la vez en (19.1).

Consideremos primero el caso en que el eje ferroeléctrico queda fijado unívocamente, eje que tomaremos como eje z . Las propiedades dieléctricas del cristal en las direcciones de los ejes x e y no presentan en tal caso ninguna anomalía y para estudiar las propiedades a lo largo del eje z basta considerar en el potencial termodinámico solamente los términos que contienen D_z .

La expresión (19.1) constituye esencialmente los primeros términos del desarrollo de Φ en potencias de D . Dado que cerca del punto de transición $1/\epsilon^{(z)}$ es pequeño, en esta región, junto con el término cuadrático, es necesario tener en cuenta también el término siguiente del desarrollo respecto de D_z . No puede haber términos con potencias impares en dicho desarrollo, puesto que cambiarían de signo (y con ello cambiaría el valor de Φ) al cambiar D_z por $-D_z$, mientras que los dos sentidos a lo largo del eje z son equivalentes en este caso. Por ello, el término que sigue al de segundo orden es un término proporcional a D_z^4 :

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{8\pi\epsilon^{(z)}} D_z^2 + \frac{B}{16\pi} D_z^4.$$

Para que el estado con $D_z = 0$ pueda ser estable en el propio punto $T = \Theta$ es necesario, evidentemente, que el coeficiente B sea positivo en este punto y, por consiguiente, también en un cierto entorno del mismo. Cerca del punto de transición, $1/\epsilon^{(z)}$ puede desarrollarse en potencias de la diferencia $T - \Theta$; el primer término del desarrollo es de la forma $\alpha(T - \Theta)$ con el coeficiente α positivo (de manera que sea $1/\epsilon^{(z)} > 0$ para $T > \Theta$). Así pues,

$$\epsilon^{(z)} = 1/\alpha(T - \Theta), \quad (19.2)$$

y el potencial electrodinámico es

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\alpha(T - \Theta)}{8\pi} D_z^2 + \frac{B}{16\pi} D_z^4. \quad (19.3)$$

Las fórmulas que acabamos de escribir bastan para explicar todas las propiedades que nos interesan de un ferroeléctrico cerca del punto de transición. Ante todo, según la fórmula $E_z = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial D_z}$ encontramos

$$E_z = \alpha(T - \Theta)D_z + BD_z^3. \quad (19.4)$$

Ésta es la relación fundamental que determina la que existe entre el campo y el desplazamiento en un ferroeléctrico.

Cuando $T > \Theta$ (en la fase no piroeléctrica), D_z se anula a la vez que E_z . Cuando E_z crece (para un valor dado de $T - \Theta$), el desplazamiento crece al principio según una ley lineal ($D_z = E_z/\alpha(T - \Theta)$), mas para valores de E_z suficientemente grandes lo hace según la ley $D_z = (E_z/B)^{1/3}$. El coeficiente de proporcionalidad $\epsilon^{(z)}$ en la ley lineal es la permitividad de la fase no piroeléctrica. Cuando $T \rightarrow \Theta$, dicha constante crece tendiendo a infinito de manera inversamente proporcional a la diferencia $T - \Theta$; sin embargo, al mismo tiempo tiende a desaparecer el dominio en que se observa la ley lineal.

Cuando $T < \Theta$ (fase piroeléctrica), el valor $D_z = 0$ no puede nunca corresponder a un estado estable. Si $E_z = 0$, el desplazamiento posee un valor no nulo, que, según (19.4), es igual a

$$D_z = D_{z0} = \pm \sqrt{[\alpha(\Theta - T)/B]}. \quad (19.5)$$

Por lo tanto, la polarización espontánea $P_{z0} = D_{z0}/4\pi$ de un ferroeléctrico disminuye proporcionalmente a $\sqrt{\Theta - T}$ al acercarnos al punto de Curie.

La «constante dieléctrica» de la fase piroeléctrica puede definirse como el valor de la derivada dD_z/dE_z para $E_z = 0$. De (19.4) se deduce

$$1 = [-\alpha(\Theta - T) + 3BD_z^2]dD_z/dE_z;$$

substituyendo aquí (19.5), obtendremos

$$dD_z/dE_z = 1/2\alpha(\Theta - T) \text{ para } E_z = 0.$$

Para valores de E_z suficientemente pequeños, la relación entre D_z y E_z toma la forma

$$D_z - D_{z0} = E_z/2\alpha(\Theta - T). \quad (19.6)$$

La comparación de (19.2) y (19.6) prueba que la «constante dieléctrica» de la fase piroeléctrica es la mitad del valor correspondiente a la fase no piroeléctrica a igual distancia del punto de Curie.

Derivando Φ dado por (19.3) respecto de la temperatura, encontramos la entropía

$$S = -(\partial \Phi / \partial T)_D = S_0 - \alpha D_z^2 / 8\pi.$$

(Se puede prescindir aquí del término de cuarto orden, ya que no se anula el término de segundo.) En la fase no piroeléctrica, cuando $E_z = 0$ también es $D_z = 0$, de modo que $S = S_0$. En cambio, para la fase piroeléctrica, substituyendo el valor de D_z

dado por (19.5), se encuentra

$$S = S_0 - \alpha^2(\Theta - T)/8\pi B.$$

De aquí se sigue para la capacidad calorífica de esta fase en el propio punto de transición

$$C_p = T\partial S/\partial T = C_{p0} + \alpha^2\Theta/8\pi B, \quad (19.7)$$

donde C_{p0} es la capacidad calorífica de la fase no piroeléctrica en el mismo punto. Así pues, si la transición desde una fase ferroeléctrica a otra se produce siendo $E_z = 0$, dicha transición va acompañada de una discontinuidad de la capacidad calorífica, al igual que en los cambios de fase ordinarios de segunda especie. En estas condiciones, se tiene $C_p > C_{p0}$, esto es, cuando aparece la piroelectricidad la capacidad calorífica aumenta.

Volvamos al estudio de la ecuación (19.4) en la fase piroeléctrica (es decir, cuando $T < \Theta$). En la figura 13 se ha representado como ejemplo la forma de una gráfica de la función $D_z(E_z)$ determinada por esta ecuación. Vemos, en primer lugar, que el arco de curva CC' (representado en la fig. 13 por trazos) no corresponde nunca a estados estables que puedan presentarse en la naturaleza. Sobre él se tiene

$$\partial E_z/\partial D_z = 4\pi\partial^2\Phi/\partial D_z^2 < 0,$$

mientras que la condición de que sea positiva la variación segunda del potencial termodinámico exige que el signo de esta derivada sea precisamente el opuesto. Las ordenadas de los puntos C y C' se determinan por la igualdad $\partial E_z/\partial D_z = 0$ y llegamos a la conclusión de que los valores posibles de $|D_z|$ en la fase piroeléctrica están inferiormente acotados por la condición

$$D_z^2 > \alpha(\Theta - T)/3B. \quad (19.8)$$

Si se consideran los estados de un ferroeléctrico para un valor dado de E_z , en el segmento determinado por las abscisas de los puntos C y C' se conserva la dualidad en el valor posible de D_z y se plantea la cuestión acerca del sentido físico de estas dos posibilidades. Para verlo imaginaremos que la sustancia ferroeléctrica está constituida por una placa homogénea planoparalela (con el eje ferroeléctrico perpendicular al plano de la placa) que se encuentra entre las armaduras de un condensador mantenidas a potenciales dados, es decir, de forma que se cree un campo homogéneo de intensidad dada $E = E_z$.

Para potenciales dados de los conductores, la condición de estabilidad exige que sea mínimo el potencial termodinámico $\tilde{\Phi} = \Phi - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$. En particular, cuando

$\mathbf{E} = 0$ se tienen dos estados que difieren en el signo de D_z (puntos A y A' sobre la curva de la fig. 13), pero que corresponden a un mismo valor exactamente de $\tilde{\Phi} (= \Phi)$. Estos dos estados, en consecuencia, son estables en igual grado, es decir, constituyen dos «fases» que pueden existir simultáneamente en contacto una con otra.

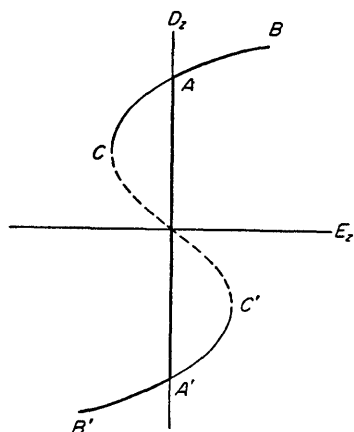


FIG. 13

Ya de aquí resulta claro que los arcos AC y $A'C'$ sobre la curva corresponden a estados que no son absolutamente estables, sino tan sólo metaestables. No cuesta comprobar, también de manera inmediata, que los valores de Φ sobre los arcos AC y $A'C'$ son efectivamente mayores que los correspondientes sobre las ramas $A'B'$ y AB para los mismos valores de E_z . Las ordenadas de los puntos A y A' vienen dadas por la fórmula (19.5). De esta manera, la región de metaestabilidad se encuentra en el intervalo

$$\alpha(\Theta - T)/3B < D_z^2 < \alpha(\Theta - T)/B, \quad (19.9)$$

La existencia de dos «fases» con $\mathbf{E} = 0$ es muy importante, puesto que conduce a la posibilidad de que se descomponga un cuerpo ferroeléctrico en una serie de regiones separadas (o *dominios*) que difieren en los sentidos de la polarización. Sobre las superficies de separación entre estas regiones deben cumplirse las condiciones de continuidad de la componente normal de \mathbf{D} y de la componente tangencial de \mathbf{E} . La segunda de éstas queda satisfecha idénticamente (porque en cualquier caso $\mathbf{E} = 0$). En cambio, de la primera se sigue que las fronteras entre dominios deben ser paralelas al eje z .

Las formas y dimensiones concretas de los dominios se determinan por la condición de que sea mínimo el potencial termodinámico total del cuerpo*.

Si no interesan los detalles de esta estructura y se consideran porciones del cuerpo grandes comparadas con las dimensiones de los dominios, cabe introducir el desplazamiento $\bar{\mathbf{D}}$ promediado en un volumen de dichas porciones. Su componente \bar{D}_z puede, evidentemente, tomar valores en un intervalo entre las ordenadas de los

* Esta cuestión relativa a las sustancias ferroeléctricas ha sido muy poco investigada todavía.

puntos A y A' en la figura 13, es decir,

$$-\sqrt{[\alpha(\Theta - T)/B]} < \bar{D}_z < \sqrt{[\alpha(\Theta - T)/B]}. \quad (19.10)$$

En otras palabras, si en el diagrama de la figura 13 se entiende por D_z el valor del desplazamiento promediado en el sentido indicado, a la región de la estructura en dominios corresponderá el segmento vertical AA' y la curva representada de trazo continuo $BAA'B'$ da todos los estados estables del cuerpo.

Un ferroeléctrico debe poseer una estructura en dominios, en particular, cuando no se encuentra en un campo eléctrico exterior. En efecto, vimos en el § 18 que las condiciones de equilibrio termodinámico en ausencia de un campo exterior se reducen a las condiciones de mínimo absoluto de Φ considerado como función de \mathbf{D} ; además, debe ser en todas partes $\mathbf{E} = 0^*$.

Pasemos a los ferroeléctricos que pertenecen al sistema cúbico (en la fase no piroeléctrica). La simetría cúbica exige que sea $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon^{(z)} \equiv \epsilon$ y admite dos invariantes independientes de cuarto orden formados a partir de las componentes del vector \mathbf{D} y para los que, por ejemplo, cabe elegir

$$D_x^4 + D_y^4 + D_z^4 \quad \text{y} \quad D_x^2 D_y^2 + D_x^2 D_z^2 + D_y^2 D_z^2.$$

Por lo tanto, el desarrollo del potencial termodinámico tendrá la forma

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + \alpha(T - \Theta)(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)/8\pi + B(D_x^4 + D_y^4 + D_z^4)/16\pi + \\ + C(D_x^2 D_y^2 + D_x^2 D_z^2 + D_y^2 D_z^2)/8\pi, \end{aligned} \quad (19.11)$$

donde, por las mismas razones que antes, hemos hecho $\frac{1}{\epsilon} = \alpha(T - \Theta)$; α , B , C son constantes.

Sin embargo, no hay que perder de vista que la simetría cúbica puede admitir también un invariante de tercer orden $D_x D_y D_z$ (para las clases cristalográficas cúbicas T y T_d , que no poseen un centro de simetría). En tales casos el estado con $\mathbf{D} = 0$, evidentemente, no podría satisfacer la condición de estabilidad (no puede corresponder a un mínimo de Φ), de modo que la existencia del punto de Curie es del todo imposible. Por consiguiente, una transición ferroeléctrica únicamente es posible en las clases O , T_h , O_h del sistema cúbico, lo que se ha supuesto ya en el desarrollo (19.11).

La suma de los términos de cuarto orden en (19.11) debe ser una expresión definida positiva. Para ello ha de tenerse

$$B > 0, \quad C > -B. \quad (19.12)$$

* Hay que subrayar que se trata aquí del equilibrio termodinámico total. Este equilibrio se alcanza en los ferroeléctricos, pero nunca puede tener lugar en los piroeléctricos ordinarios debido a la dificultad, que hemos recordado más arriba, de reorientación de su polarización (y, en consecuencia, de la formación de dominios).

La polarización espontánea de un ferroeléctrico cuando no existe campo exterior se determina, conforme se hizo ya notar más arriba, por la condición de que sea un mínimo absoluto Φ como función de \mathbf{D} . En particular, dado que el término de segundo orden en (19.11) no depende de la dirección de \mathbf{D} , la dirección de la polarización espontánea se determina por la condición de que sean mínimos los términos de cuarto orden para un valor absoluto dado de \mathbf{D} . Son entonces posibles dos casos. Si $C > B$, al mínimo de Φ corresponde una dirección de \mathbf{D} a lo largo de los ejes x , y , z , es decir, a lo largo de cualquiera de las tres aristas del cubo (las direcciones cristalográficas [001], [010], [100]). Pero si $C < B$, Φ alcanza el mínimo cuando \mathbf{D} está dirigido a lo largo de cualquiera de las cuatro diagonales espaciales del cubo (direcciones cristalográficas [111], [$\bar{1}11$], etc.), es decir, cuando

$$D_x^2 = D_y^2 = D_z^2 = \frac{1}{3}D^2.$$

En el primer caso la fase piroeléctrica polarizada espontáneamente del ferroeléctrico posee simetría tetragonal, y en el segundo, simetría romboédrica.

Consideremos más detenidamente, por ejemplo, el primer caso ($C > B$) y elijamos como eje z la dirección de la polarización espontánea por debajo del punto de Curie. El módulo de la polarización espontánea viene determinado por el mínimo de la expresión

$$-\alpha(\Theta - T)D^2/8\pi + BD^4/16\pi,$$

de donde

$$D_0^2 = \alpha(\Theta - T)/B. \quad (19.13)$$

La «permitividad» por debajo de dicho punto, naturalmente, es diferente a lo largo del eje z y a lo largo de los ejes x , y . Si el campo \mathbf{E} es pequeño, son también pequeñas D_x , D_y y $D_z - D_0$. Derivando la expresión (19.11), tenemos entonces

$$\begin{aligned} E_z &= 4\pi\partial\Phi/\partial D_z = -\alpha(\Theta - T)D_z + BD_z^3 \cong 2BD_0^2(D_z - D_0), \\ E_x &= 4\pi\partial\Phi/\partial D_x \cong [CD_0^2 - \alpha(\Theta - T)]D_x, \text{ de donde} \\ D_z - D_0 &= E_z/2\alpha(\Theta - T), \\ D_x &= BE_x/\alpha(\Theta - T)(C - B). \end{aligned} \quad (19.14)$$

Por encima del punto de Curie la permitividad de un ferroeléctrico cúbico es la misma en todas direcciones e igual a

$$\epsilon = 1/\alpha(T - \Theta). \quad (19.15)$$

Finalmente, consideremos brevemente las propiedades elásticas de los ferroeléctricos.

Según sea su clase cristalográfica, la fase no piroeléctrica de un ferroeléctrico, igual puede poseer que no poseer propiedades piezoeléctricas*. En particular, pre-

* La fase no piroeléctrica de un ferroeléctrico posee propiedades piezoeléctricas si pertenece a ocho de las diez clases de que se habló en la pág. 91: D_2 , D_4 , D_{2d} , S_4 , D_3 , D_6 , C_{3h} , D_{3h} .

sentan especial interés aquellos cristales piezoeléctricos cuya simetría admite una relación piezoeléctrica entre las deformaciones y la polarización a lo largo del eje ferroeléctrico. Entre ellos encontramos las clases cristalográficas D_2 , D_{2d} , S_4 ; en estos tres casos la inducción D_z a lo largo del eje ferroeléctrico aparece en la parte piezoeléctrica del potencial termodinámico en forma del término*

$$-\lambda_{z,xy} D_z \sigma_{xy}.$$

En cambio, la componente σ_{xy} interviene en la expresión de la energía elástica de los cristales de la simetría indicada en forma del término

$$-\mu_{xyxy} \sigma_{xy}^2.$$

Así pues, para el potencial termodinámico cerca del punto de Curie se tiene (para abreviar, utilizamos la notación $\lambda_{z,xy} = \lambda$, $\mu_{xyxy} = \mu$)

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha(T - T_0) D_z^2 / 8\pi + B D_z^4 / 16\pi - \lambda D_z \sigma_{xy} - \mu \sigma_{xy}^2. \quad (19.16)$$

No nos interesan los términos que contienen las restantes componentes, dado que no conducen a anomalía alguna de las propiedades piezoeléctricas cerca del punto de Curie.

Derivando Φ respecto de D_z y respecto de σ_{xy} , obtendremos el campo E_z y la deformación u_{xy}^{**} :

$$E_z = 4\pi \partial \Phi / \partial D_z = \alpha(T - T_0) D_z + B D_z^3 - 4\pi \lambda \sigma_{xy}, \quad (19.17)$$

$$u_{xy} = \frac{1}{2} \lambda D_z + \mu \sigma_{xy}. \quad (19.18)$$

En la región no piroeléctrica y para un campo E débil, cabe prescindir en (19.17) del término que contiene D_z^3 :

$$E_z = \alpha(T - T_0) D_z - 4\pi \lambda \sigma_{xy}.$$

Substituyendo aquí el valor de D_z dado por (19.18), obtendremos

$$u_{xy} = \frac{\lambda}{2\alpha(T - T_0)} E_z + \left[\mu + \frac{2\pi\lambda^2}{\alpha(T - T_0)} \right] \sigma_{xy}.$$

El coeficiente de σ_{xy} en esta fórmula representa el papel de módulo elástico para aquellas deformaciones en las que se conserva constante la intensidad del campo E_z , mientras que μ en la fórmula (19.18) es el módulo elástico para la deformación cuando es constante el desplazamiento D_z . Podemos escribir, por ello,

$$\mu^{(E)} = \mu^{(D)} + 2\pi\lambda^2 / \alpha(T - T_0), \quad (19.19)$$

* Dado que aquí utilizamos el potencial Φ , y no el $\tilde{\Phi}$ como en el § 17, tampoco el tensor piezoeléctrico $\lambda_{i,kl}$ coincide con el tensor $\gamma_{i,kl}$ antes introducido. Con todo, las propiedades de simetría de estos tensores son, claro está, las mismas.

** Acerca de la derivación respecto de las componentes u_{ik} , véase la nota en el § 17, problema 1.

donde los índices superiores indican el carácter de la deformación. Vemos así que ambos coeficientes se comportan cerca del punto de Curie de manera totalmente distinta: mientras que $\mu^{(D)}$ es una cantidad finita constante, el módulo $\mu^{(E)}$ crece sin límites al acercarnos al punto de Curie.

La fórmula (19.18) pone de manifiesto que en la región piroeléctrica la polarización espontánea conduce a una determinada deformación del cuerpo. Cuando no existen tensiones internas y para una intensidad del campo \mathbf{E} nula, la deformación u_{xy} es proporcional a D_{z0} , es decir, según (19.5), proporcional a $\sqrt{\Theta - T}$.

Si la simetría (por ejemplo cúbica) de la fase no piroeléctrica de un ferroeléctrico no admite un efecto piezoeléctrico lineal (respecto de \mathbf{D}), los primeros términos no nulos del desarrollo del potencial termodinámico en potencias de σ_{ik} y \mathbf{D} son cuadráticos respecto de las componentes D_i , es decir, tienen la forma

$$-\gamma_{iklm}D_iD_k\sigma_{lm}, \quad (19.20)$$

donde γ_{iklm} es un tensor de cuarto orden, simétrico con relación a los pares de índices i, k y l, m .

Cabe dudar de la validez de aplicar la expresión (19.20) al potencial termodinámico, puesto que en el § 17 se indicó que esto último se puede utilizar solamente con la condición de que se prescinda de los efectos cuadráticos. Sin embargo, un ferroeléctrico constituye en este sentido una excepción, dado que (cerca del punto de Curie) la intensidad \mathbf{E} es pequeña comparada con el desplazamiento \mathbf{D}^* . La introducción del potencial termodinámico supone el prescindir de cantidades del orden de EDu_{ik} (o bien, lo que es lo mismo, del de $ED\sigma_{ik}$); la expresión (19.20), en cambio, es del orden de $D^2\sigma_{ik}$.

* Esto se ve, por ejemplo, en la fórmula (19.4): el primer término en el segundo miembro de la igualdad contiene la pequeña cantidad $T - \Theta$, y el segundo término, una cantidad de tercer orden respecto de \mathbf{D} .

CAPÍTULO III

CORRIENTE CONTINUA

§ 20. Densidad de corriente y conductibilidad

Del estudio de los campos eléctricos creados por cargas en reposo, pasamos ahora a considerar el movimiento estacionario de las cargas en conductores (corriente eléctrica continua).

Designaremos la densidad media de flujo de cargas por \mathbf{j} ; esta magnitud se llama *densidad de corriente eléctrica**. En una corriente continua la distribución espacial de \mathbf{j} no depende del tiempo y obedece a la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (20.1)$$

que expresa el carácter constante de la carga media total que se encuentra en una parte arbitraria de volumen del conductor.

El campo eléctrico creado en el interior de un conductor por el que circula una corriente continua es también constante en el tiempo y, por ello, satisface la ecuación

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (20.2)$$

es decir, deriva de un potencial.

A las ecuaciones (20.1) y (20.2) debe añadirse todavía una ecuación que ligue entre sí las magnitudes \mathbf{j} y \mathbf{E} . Esta relación depende de la propiedad del material del conductor. En la inmensa mayoría de casos, cabe considerarla lineal (*ley de Ohm*).

Si el conductor es homogéneo e isotrópico, la dependencia lineal se reduce a una mera proporcionalidad

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (20.3)$$

El coeficiente σ depende de la naturaleza y estado del conductor; recibe el nombre de *coeficiente de conductibilidad eléctrica*, o, simplemente, el de *conductibilidad del cuerpo*.

En un conductor homogéneo es $\sigma = \text{const}$ y la substitución de (20.3) en (20.1)

* En este capítulo no consideramos el campo magnético creado por la corriente y, en consecuencia, no se tiene en cuenta la reacción de este campo sobre la corriente. Tener en cuenta esta influencia exige precisar la definición de densidad de corriente, lo que se hará en el § 29.

da $\text{div } \mathbf{E} = 0$. En este caso, por lo tanto, el potencial del campo eléctrico satisface la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$.

Sobre la superficie de separación de dos medios conductores, la componente normal de la densidad de corriente ha de ser continua, evidentemente. Además, según la condición general de continuidad de la componente tangencial del campo (condición que se sigue de la ecuación $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, cf. (1.7) y (6.9)), debe ser continua la razón \mathbf{j}_t/σ . De esta manera, las condiciones de contorno para la densidad de corriente se escriben:

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \mathbf{j}_{t1}/\sigma_1 = \mathbf{j}_{t2}/\sigma_2, \quad (20.4)$$

o bien para la intensidad del campo

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}, \quad \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}. \quad (20.5)$$

En cambio, sobre la frontera entre un conductor y un medio no conductor tenemos simplemente $j_n = 0$ o $E_n = 0^*$.

El campo eléctrico que mantiene la corriente efectúa sobre las partículas cargadas (portadoras de la corriente) que se mueven en el conductor, un trabajo mecánico; el trabajo realizado en 1 s por unidad de volumen es igual, evidentemente, al producto $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Este trabajo se disipa en la materia de que está constituido el conductor transformándose en calor. Por consiguiente, la cantidad de calor que se libera en 1 s y en 1 cm^3 de conductor homogéneo es igual a

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = j^2/\sigma \quad (20.6)$$

(ley de Joule-Lenz).

La producción de calor conduce a un aumento de la entropía del cuerpo. Cuando se libera la cantidad de calor $dQ = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$, la entropía del elemento de volumen dado aumenta en dQ/T . Por ello, la velocidad de variación de la entropía total del cuerpo es igual a

$$d\mathcal{S}/dt = \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}/T) dV. \quad (20.7)$$

En virtud de la ley de crecimiento de la entropía, esta derivada debe ser positiva. Substituyendo en ella $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, vemos que de esta condición cabe deducir que la conductibilidad σ es positiva.

En general, las direcciones de los vectores \mathbf{j} y \mathbf{E} no coinciden en un cuerpo anisótropo (monocristal) y la relación lineal entre ellos se expresa por fórmulas del tipo

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad (20.8)$$

* Hay que hacer notar que las ecuaciones $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } (\sigma \mathbf{E}) = 0$ y las condiciones de contorno (20.5) ponen de manifiesto la analogía formal con las ecuaciones del campo electrostático en los dieléctricos, de las que difieren tan sólo en la substitución de ϵ por σ . Esta circunstancia permite hallar la solución de diferentes problemas relativos a la distribución de corriente en un medio conductor ilimitado a partir directamente de las soluciones de los problemas electrostáticos análogos. Cuando existen fronteras entre un conductor y un medio no conductor esta analogía a nada conduce, puesto que en electrostática no hay ningún medio con $\epsilon = 0$.

donde las magnitudes σ_{ik} constituyen un tensor de segundo orden simétrico (véase más adelante), llamado *tensor conductibilidad*.

Es necesario hacer aquí la observación siguiente. La simetría de un cristal podría admitir de suyo la existencia de un término independiente en la relación lineal entre \mathbf{j} y \mathbf{E} , es decir, una fórmula del tipo

$$\mathbf{j}_i = \sigma_{ik} \mathbf{E}_k + \mathbf{j}_i^{(0)},$$

con un vector constante $\mathbf{j}^{(0)}$. La existencia de un tal término significaría que el conductor es «piroeléctrico», esto es, que en ausencia de corriente ($\mathbf{j} = 0$) existiría en él un campo diferente de cero. En realidad, sin embargo, esto es imposible en virtud de la ley de crecimiento de la entropía: un término $\mathbf{j}^{(0)} \cdot \mathbf{E}$ en el integrando de la expresión (20.7) podría tener, evidentemente, cualquier signo, con lo cual $\dot{\mathcal{S}}$ no podría ser una magnitud definida positiva.

De manera análoga a como en un medio isótropo la condición $\dot{\mathcal{S}} > 0$ conduce a que σ sea positiva, también para un cuerpo anisótropo se sigue de esta condición que los valores principales del tensor σ_{ik} son positivos.

La dependencia del número de componentes independientes del tensor σ_{ik} respecto de la simetría del cristal es la misma que en el caso de un tensor simétrico cualquiera de segundo orden (véase § 13): en los cristales biáxicos los tres valores principales son diferentes, en los uniaxiales, dos de ellos son iguales, y en los cúbicos, los tres coinciden, es decir, un cristal cúbico se comporta, en relación con sus propiedades de conductibilidad, como si fuera un cuerpo isótropo.

La simetría del tensor conductibilidad

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (20.9)$$

resulta ser consecuencia del llamado principio de *simetría de los coeficientes cinéticos*. Una formulación de este principio general, que se debe a L. Onsager, cómoda para su aplicación aquí y más adelante (en los §§ 25-26), es la siguiente*.

Sean x_1, x_2, \dots ciertas magnitudes que caracterizan el estado del cuerpo en cada uno de sus puntos. Introduzcamos junto con ellas las magnitudes

$$X_a = -\partial S / \partial x_a, \quad (20.10)$$

donde S es la entropía de la unidad de volumen del cuerpo y la derivada se toma suponiendo constante la energía de este volumen. En un estado próximo al de equilibrio, las magnitudes x_a difieren poco de los valores que toman en dicho estado, y las cantidades X_a son pequeñas. En estas condiciones, en el cuerpo tendrán lugar procesos que tienden a llevarlo al estado de equilibrio. Acerca de las velocidades de cambio de las cantidades x_a en tales procesos, cabe por lo general afirmar que en cada uno de los puntos del cuerpo son funciones tan sólo de los valores de las magnitudes x_a (o X_a) en aquellos mismos puntos. Desarrollando estas funciones

* Véase vol. V, *Física Estadística*, § 122 y vol. VI, *Hidrodinámica*, § 58.

en serie de potencias de X_a y limitándonos a los términos lineales, obtendremos relaciones de la forma

$$\partial x_a / \partial t = - \sum_b \gamma_{ab} X_b. \quad (20.11)$$

Se puede afirmar entonces que los coeficientes γ_{ab} (los llamados *coeficientes cinéticos*) son simétricos respecto de los índices a y b :

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \quad (20.12)$$

Para la utilización práctica de este principio es necesario, una vez elegidas de una u otra manera las magnitudes x_a (o directamente sus derivadas \dot{x}_a), determinar las correspondientes X_a . Este problema puede resolverse ordinariamente de manera muy simple mediante la fórmula que determina la velocidad de variación con el tiempo de la entropía total del cuerpo:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = - \int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t} dV, \quad (20.13)$$

donde la integración se extiende a todo el volumen del mismo.

En el presente caso, para el movimiento de la corriente en el conductor tenemos para aquella velocidad la fórmula (20.7). Comparándola con (20.13), vemos que si para las magnitudes \dot{x}_a se eligen las componentes del vector densidad de corriente \mathbf{j} , las correspondientes magnitudes X_a serán las componentes del vector $-\mathbf{E}/T$. Por otra parte, la comparación de las fórmulas (20.8) y (20.11) muestra que el papel de coeficientes cinéticos lo representan, en estas condiciones, las componentes del tensor conductibilidad multiplicadas por T , cuya simetría se sigue así inmediatamente a partir de las relaciones generales (20.12).

PROBLEMAS

1. En un medio conductor se ha introducido un sistema de electrodos que se mantienen a potenciales constantes ϕ_a . De cada uno de ellos sale una corriente J_a . Determinar el calor total de Joule liberado en el medio en 1 segundo.

Solución. El calor buscado Q viene dado por la integral

$$Q = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = - \int \mathbf{j} \cdot \text{grad } \phi dV = - \int \text{div}(\phi \mathbf{j}) dV,$$

extendida a todo el volumen del medio. Transformemos esta integral en una integral de superficie, teniendo en cuenta que sobre la frontera exterior del medio es $j_n = 0$ y que sobre la superficie de los electrodos se tiene $\phi = \text{const} = \phi_a$. El resultado que se obtiene es

$$Q = \sum \phi_a J_a.$$

2. Determinar la distribución de potencial en una esfera conductora en la que una corriente J penetra por un polo y sale por el polo opuesto.

Solución. Cerca de los polos O y O' (fig. 14) el potencial debe tener, respectivamente, la forma

$$\phi = J/2\pi\sigma R_1 \quad \text{y} \quad \phi = -J/2\pi\sigma R_2$$

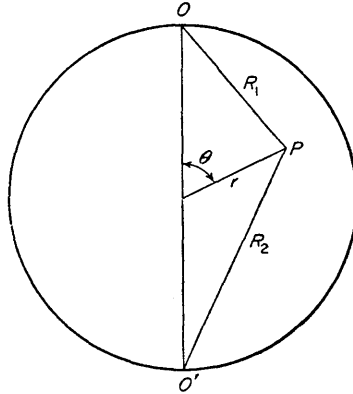


FIG. 14

donde R_1, R_2 son las distancias a los polos. Estas funciones satisfacen la ecuación de Laplace, y las integrales $-\sigma \int \nabla \phi \cdot d\mathbf{f}$ extendidas a hemisferios infinitamente pequeños en torno de los puntos O O' son iguales a $\pm J$. Busquemos para el potencial en un punto cualquiera P de la esfera una expresión de la forma

$$\phi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \psi \right),$$

donde ψ es una solución de la ecuación de Laplace que carece de polos dentro de la esfera y sobre su superficie. Por razones de simetría es evidente que ψ (al igual que ϕ) es función solamente de las coordenadas esféricas r y θ .

Sobre la superficie de la esfera ($r = a$) debe ser $\partial\psi/\partial r = 0$. Efectuando la derivación, deducimos de aquí para ψ la siguiente condición de contorno:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ para } r = a.$$

Si $f(r, \theta)$ es una solución cualquiera de la ecuación de Laplace, también la función $\int_0^r \frac{f(r, \theta)}{r} dr$ es una solución*. Comparando con la condición de contorno escrita, es fácil concluir que a ésta satisface la solución

$$\psi = \frac{1}{2} \int_0^r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{dr}{r}.$$

Substituyendo $R_{1,2} = \sqrt{a^2 + r^2 \mp 2ar \cos \theta}$ y efectuando la integración, obtenemos en definitiva

$$\phi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2a} \left(\operatorname{arsenh} \frac{a+r \cos \theta}{r \sin \theta} - \operatorname{arsenh} \frac{a-r \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \right).$$

* Es fácil ver que así es, ya sea por comprobación directa, o basándose en que cualquier solución $f(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace que dependa solamente de las variables r, θ , puede representarse en la forma

$$f = \sum c_n r^n P_n(\cos \theta),$$

donde las c_n son constantes y los P_n son polinomios de Legendre.

3. Probar que la distribución de corriente en un medio conductor corresponde a un mínimo de la disipación de energía.

Solución. Se trata del mínimo de la integral $\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV = \int (j^2/\sigma) \, dV$ cuando se cumple la condición $\text{div } \mathbf{j} = 0$ que expresa la conservación de la carga. Variando respecto de \mathbf{j} la integral

$$\int [(j^2/\sigma) - 2\phi \text{div } \mathbf{j}] dV,$$

(2ϕ es el factor indeterminado de Lagrange) e igualando a cero la variación, obtendremos la ecuación $\mathbf{j} = -\sigma \nabla \phi$, o bien

$$\text{rot } (\mathbf{j}/\sigma) = 0,$$

que coincide con las ecuaciones (20.2) y (20.3).

§ 21. Efecto Hall

Si un conductor se encuentra en un campo magnético exterior \mathbf{H} , la relación entre la densidad de corriente y la intensidad del campo eléctrico viene dada, como antes, por las igualdades

$$j_i = \sigma_{ik} E_k,$$

pero las componentes del tensor conductibilidad σ_{ik} son funciones de \mathbf{H} y, lo que es particularmente importante, ya no son simétricas respecto de los índices i, k . La simetría de este tensor se demostró en el § 20 partiendo del principio de simetría de los coeficientes cinéticos. Pero en un campo magnético, como es sabido, la formulación de este principio cambia un poco: a la vez que se permutan los índices en los coeficientes cinéticos, debe cambiarse también el sentido del campo magnético*. En consecuencia, para las componentes del tensor $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ tendremos ahora las igualdades

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (21.1)$$

Las magnitudes $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ y $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ no son ya iguales entre sí.

Como cualquier tensor de segundo orden, el tensor σ_{ik} puede descomponerse en una parte simétrica y una antisimétrica, que designaremos por s_{ik} y a_{ik} :

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \quad (21.2)$$

Por definición,

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ki}(\mathbf{H}), \quad (21.3)$$

y de (21.1) se sigue que

$$\begin{aligned} s_{ik}(\mathbf{H}) &= s_{ki}(-\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}), \\ a_{ik}(\mathbf{H}) &= a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (21.4)$$

Así, pues, las componentes del tensor s_{ik} son funciones pares del campo magnético, y las del tensor a_{ik} , funciones impares.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 122.

Es sabido que todo tensor antisimétrico de segundo orden a_{ik} es equivalente a un cierto vector axil (su dual) cuyas componentes son

$$a_x = a_{yz}, \quad a_y = -a_{xz}, \quad a_z = a_{xy}. \quad (21.5)$$

Mediante este vector, las componentes del producto $a_{ik} E_k$ se pueden escribir en forma de componentes del producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k = s_{ik} E_k + (\mathbf{E} \times \mathbf{a})_i. \quad (21.6)$$

El calor de Joule producido por el paso de la corriente se determina por el producto $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. En virtud de la ortogonalidad de los vectores $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$ y \mathbf{E} , su producto escalar se anula, de modo que

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = s_{ik} E_i E_k, \quad (21.7)$$

o sea, el calor de Joule viene determinado (para un campo dado \mathbf{E}) sólo por la parte simétrica del tensor conductibilidad.

La mayor parte de los campos magnéticos exteriores pueden considerarse débiles; según esto, es posible desarrollar las componentes del tensor conductibilidad en potencias del campo. Teniendo en cuenta que la función $\mathbf{a}(\mathbf{H})$ es impar, en el desarrollo de este vector intervendrán solamente términos de grado impar. Los primeros términos del desarrollo son lineales respecto del campo, es decir, tienen la forma

$$a_i = \alpha_{ik} H_k. \quad (21.8)$$

Los vectores \mathbf{a} y \mathbf{H} son ambos axiles; por lo tanto, las componentes α_{ik} constituyen un tensor ordinario (polar). En el desarrollo de las funciones pares $s_{ik}(\mathbf{H})$, en cambio, intervienen tan sólo términos de grado par. El primer término del desarrollo es la conductibilidad $\sigma_{0,ik}$ en ausencia de campo, y los términos correctivos siguientes son cuadráticos respecto del campo:

$$s_{ik} = \sigma_{0,ik} + \beta_{iklm} H_l H_m. \quad (21.9)$$

El tensor β_{iklm} es simétrico tanto respecto de los índices i, k , como de los índices l, m .

De esta manera el efecto principal, lineal respecto del campo, de la influencia del campo magnético está representado por el término $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$ (*efecto Hall*). Este efecto, conforme vemos, consiste en la aparición de una corriente perpendicular al campo eléctrico y cuyo módulo es proporcional a la intensidad del campo magnético. Sin embargo, no hay que perder de vista que, en el caso general de un medio anisótropo cualquiera, la corriente de Hall no es la única perpendicular a \mathbf{E} ; componentes de este tipo puede también tenerlas la corriente $s_{ik} E_k$, que no es la de Hall.

El efecto Hall presenta también otro aspecto cuando se consideran las fórmulas recíprocas que expresan el campo \mathbf{E} en función de la densidad de corriente:

$$E_i = \sigma^{-1}_{ik} j_k.$$

El tensor inverso σ^{-1}_{ik} , al igual que el directo, puede descomponerse en una parte simétrica (que designaremos por ρ_{ik}) y una antisimétrica, equivalente ésta a un cierto vector axil \mathbf{b} :

$$E_i = \rho_{ik} j_k + (\mathbf{j} \times \mathbf{b})_i. \quad (21.10)$$

El tensor ρ_{ik} y el vector \mathbf{b} poseen las mismas propiedades que s_{ik} y \mathbf{a} . En particular, en los campos débiles el vector \mathbf{b} es lineal respecto del campo magnético. En las fórmulas (21.10) el efecto Hall viene representado por el término $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$, es decir, se traduce en la aparición de un campo eléctrico perpendicular a la corriente y cuyo valor absoluto es proporcional al campo magnético (y a la corriente \mathbf{j}).

Todas las igualdades que acabamos de escribir se simplifican considerablemente si el conductor es isótropo. En este caso, por razones de simetría es evidente que el vector \mathbf{b} (o el \mathbf{a}) sólo puede estar dirigido a lo largo del campo magnético. Las únicas componentes no nulas del tensor ρ_{ik} son $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ y ρ_{zz} , donde se ha elegido el eje z de modo que coincida con la dirección (orientada) del campo. Representando estas dos cantidades por ρ_{\perp} y ρ_{\parallel} y eligiendo el plano xz de modo que pase por la dirección de la corriente, tendremos

$$E_x = \rho_{\perp} j_x, \quad E_y = -b j_x, \quad E_z = \rho_{\parallel} j_z. \quad (21.11)$$

Vemos así que en un conductor isótropo el campo de Hall es el único campo eléctrico perpendicular a la vez a la corriente y al campo magnético.

En campos magnéticos débiles la relación entre los vectores \mathbf{b} y \mathbf{H} viene dada (en un cuerpo isótropo) simplemente por la igualdad

$$\mathbf{b} = -R\mathbf{H} \quad (21.12)$$

La constante R (llamada *constante de Hall*) lo mismo puede ser positiva que negativa. En lo que concierne a los términos cuadráticos respecto de \mathbf{H} en la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{j} (que intervienen a través del tensor ρ_{ik}), su forma es evidente por el hecho de que los únicos vectores que se pueden formar a partir de \mathbf{j} y \mathbf{H} (lineales respecto de \mathbf{j} y cuadráticos con relación a \mathbf{H}) son los vectores $\mathbf{H}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{H})$ y $H^2 \mathbf{j}$. Por consiguiente, la forma general de la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{j} en un cuerpo isótropo, teniendo en cuenta los términos cuadráticos respecto de \mathbf{H} , viene dada por la fórmula

$$\mathbf{E} = \rho_0 \mathbf{j} + R\mathbf{H} \times \mathbf{j} + \beta_1 H^2 \mathbf{j} + \beta_2 (\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{H}. \quad (21.13)$$

PROBLEMA

Expresar las componentes del tensor inverso σ_{ik}^{-1} en función de las componentes de s_{ik} y de \mathbf{a} .

Solución. La manera más simple de efectuar los cálculos consiste en elegir el sistema de coordenadas x, y, z en el cual el tensor s_{ik} se reduce a sus ejes principales, hecho lo cual, de la forma de las expresiones obtenidas es fácil deducir su forma general en un sistema de coordenadas arbitrario. El determinante del tensor es:

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \begin{vmatrix} s_{xx} & a_z & -a_y \\ -a_z & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz} \end{vmatrix} \\ &= s_{xx}s_{yy}s_{zz} + s_{xx}a_x^2 + s_{yy}a_y^2 + s_{zz}a_z^2. \end{aligned}$$

Es evidente que en el caso general

$$|\sigma| = |s| + s_{ik}a_i a_k.$$

Formando también los menores de este determinante, se encuentran las componentes del tensor inverso

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}_{xx} &= \rho_{xx} = (s_{yy}s_{zz} + a_x^2)/|\sigma|, \\ \sigma^{-1}_{xy} &= \rho_{xy} + b_z = (a_x a_y - a_z s_{zz})/|\sigma|, \dots\end{aligned}$$

Las expresiones generales que se reducen a éstas para el sistema de coordenadas elegido, son

$$\rho_{ik} = \{s^{-1}_{ik}|s| + a_i a_k\}/|\sigma|, \quad b_i = -s_{ik} a_k / |\sigma|.$$

con lo que queda resuelto el problema planteado.

§ 22. Diferencia de potenciales de contacto

Para separar de un conductor una partícula cargada a través de la superficie del mismo es necesario realizar un determinado trabajo. Se llama *trabajo de extracción* el trabajo que ha de efectuarse sobre una partícula si su separación se realiza de manera termodinámicamente reversible. Esta cantidad es siempre positiva, como se sigue inmediatamente del hecho de que una carga puntual es atraída hacia cualquier cuerpo neutro, en particular hacia todo conductor (véase § 14). En lo que sigue convendrá referir este trabajo a la unidad de carga (positiva); el signo del «potencial de extracción» W definido de esta manera coincide con el signo de la carga de la partícula que se separa.

El trabajo de extracción depende tanto de la naturaleza del conductor (y de su estado termodinámico, de la temperatura, de la densidad) como de la especie de partícula cargada. Por ejemplo, para un mismo metal el trabajo de extracción es diferente al separar una carga en forma de electrón de conducción y en la separación de un ion de su superficie. Es necesario subrayar también que el trabajo de extracción es una magnitud característica de la superficie del conductor, y no de sus propiedades volumétricas. Por ello, dicho trabajo depende también, por ejemplo, del método de tratamiento y del grado de «contaminación» de la superficie. Si el conductor es un monocrystal, el trabajo de extracción es también diferente para sus diferentes caras.

A fin de explicar la naturaleza física de la dependencia del trabajo de extracción respecto de las propiedades de la superficie, estableceremos su relación con la estructura eléctrica de la capa superficial de la materia. Designando por $\rho(x)$ la densidad de carga *no* promediada respecto de un elemento físicamente infinitesimal a lo largo del eje x (perpendicular al plano de la capa), escribamos la ecuación de Poisson en dicho estrato superficial:

$$d^2\phi/dx^2 = -4\pi\rho.$$

Supongamos que el dominio ocupado por el conductor corresponde a $x < 0$. Integrando una vez, obtendremos

$$\frac{d\phi}{dx} = -4\pi \int_{-\infty}^x \rho \, dx,$$

hecho lo cual la integración siguiente la efectuaremos por partes:

$$\phi - \phi(-\infty) = -4\pi x \int_{-\infty}^x \rho \, dx + 4\pi \int_{-\infty}^x x \rho \, dx.$$

Cuando $x \rightarrow \infty$ la integral $\int_{-\infty}^x \rho \, dx$ tiende rápidamente a cero (en virtud del carácter eléctricamente neutro de la superficie de un conductor no cargado). Por consiguiente,

$$\phi(+\infty) - \phi(-\infty) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} x \rho \, dx.$$

La integral que aparece en el segundo miembro de la igualdad representa el momento dipolar de las cargas distribuidas cerca de la superficie del cuerpo. Esta distribución posee el carácter de una «doble capa», en la cual las cargas de signos opuestos están separadas de manera que el momento dipolar del sistema es diferente de cero. La estructura de una doble capa, naturalmente, depende de las propiedades de la superficie (de su dirección cristalográfica, de las impurezas, etc.). Por otra parte, la diferencia de los potenciales de extracción correspondientes a las distintas superficies de un conductor dado viene determinada por la diferencia de sus momentos dipolares.

Si dos conductores distintos se ponen en contacto, entre ellos puede tener lugar un intercambio de partículas cargadas. En este caso, las cargas pasarán del cuerpo con trabajo de extracción menor al cuerpo en que dicho trabajo es mayor, hasta que entre ambos conductores se establezca una diferencia de potenciales que impida el paso de las cargas. Ésta es la llamada *diferencia de potenciales de contacto*.

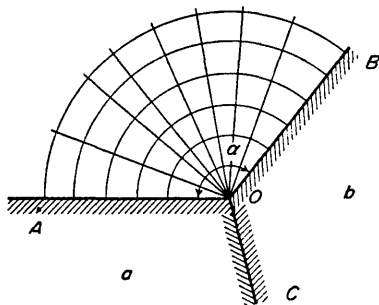


FIG. 15

En la figura 15 se representa un corte transversal de dos conductores en contacto (a y b) cerca de sus superficies libres AO y OB . Los potenciales de estas superficies los designaremos por ϕ_a y ϕ_b , respectivamente. La diferencia de potenciales de contacto es $\phi_{ab} = \phi_b - \phi_a$. La relación cuantitativa entre esta diferencia y los trabajos de extracción se establece mediante la condición de equilibrio termodinámico.

mico. Consideremos el trabajo que hay que realizar sobre una partícula de carga e para separarla del conductor a a través de la superficie AO , llevándola luego a la superficie OB , y finalmente, introduciéndola en el conductor b ; en un estado de equilibrio termodinámico este trabajo debe ser igual a cero*. Los trabajos realizados sobre la partícula en cada una de las tres etapas indicadas del camino son iguales a eW_a , $e(\phi_b - \phi_a)$ y $-eW_b$, respectivamente. Igualando su suma a cero, se encuentra la relación buscada

$$\phi_{ab} = W_b - W_a. \quad (22.1)$$

De esta manera, la diferencia de potenciales de contacto entre superficies libres vecinas de dos conductores adyacentes es igual a la diferencia de sus trabajos de extracción.

La existencia de una diferencia de potenciales de contacto conduce a la aparición de un campo eléctrico en el espacio exterior a los conductores. No es difícil determinar este campo cerca del lugar de contacto. En un pequeño dominio próximo a la línea de contacto (punto O de la fig. 15) es posible considerar como planos las caras que se cortan de los conductores. El potencial del campo fuera de los conductores satisface la ecuación

$$\Delta\phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0,$$

(r, θ son las coordenadas polares con origen en el punto O) y sobre los lados AO y OB debe tomar valores constantes dados. Lo que nos interesa es la solución que contiene la menor potencia de r : ésta representará el término dominante del desarrollo del potencial en potencias de la distancia r , que es pequeña. Esta solución es la $\phi = \text{const} \cdot \theta$. Contando el ángulo θ a partir del lado AO y conviniendo en tomar para su potencial el valor cero, obtendremos

$$\phi = \phi_{ab}\theta/\alpha, \quad (22.2)$$

donde α es el ángulo AOB . Así pues, las líneas equipotenciales (en el plano del dibujo) son semirrayos que divergen a partir del punto O . Las correspondientes líneas de fuerza constituyen una familia de arcos de circunferencia con centro en el punto O . La intensidad del campo es igual a

$$E = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\phi_{ab}}{\alpha} \frac{1}{r}; \quad (22.3)$$

es decir, disminuye en razón inversa a la distancia al punto O .

Conforme ya se indicó, las diferencias de potencial de «contacto» existen también entre diferentes caras de un monocristal metálico. En consecuencia, un campo

* Claro está, en realidad el paso de una partícula de un conductor al otro se puede realizar solamente a través de sus superficies de contacto y no a través del espacio adyacente. Sin embargo, podemos apoyarnos en el hecho de que el trabajo en esta transición no depende del camino seguido.

eléctrico del tipo que acabamos de describir debe presentarse también cerca de las aristas de un cristal*.

Si toda una serie de conductores metálicos (que se encuentran a igual temperatura) se unen formando una sucesión, la diferencia de potenciales entre los conductores extremos es igual (como se sigue fácilmente de la fórmula fundamental (22.1)), simplemente, a la diferencia de sus trabajos de extracción, como en el caso de dos conductores en contacto directo. En particular, si en ambos extremos de la cadena se encuentran metales iguales, la diferencia de potencial entre ellos será igual a cero. Esta circunstancia, por otra parte, es del todo evidente a priori: si entre conductores idénticos existiera una diferencia de potencial, al cerrar la cadena aparecería en ellos una corriente, contradiciendo así el segundo principio de la termodinámica.

§ 23. Elementos galvánicos

La observación que se ha hecho al final del párrafo que precede pierde su fuerza si de la cadena forman parte conductores con portadores de corriente de naturaleza distinta (metales y disoluciones de electrólitos). En relación con la diferencia de los trabajos de extracción de un mismo conductor respecto de diferentes partículas cargadas (electrones e iones), la suma de todas las diferencias de potenciales de contacto en la cadena es ahora diferente de cero, incluso cuando los conductores en uno y otro extremo son iguales. Esta suma se llama *fuerza electromotriz (f.e.m.)* que actúa en la cadena; esta fuerza no es sino la diferencia de potenciales entre dos conductores iguales que se encuentran en los extremos de un circuito abierto. Al cerrar el circuito aparece en él una corriente; en este fenómeno se basa la operación de los llamados *elementos galvánicos*. La fuente de energía que mantiene el paso de la corriente por el circuito es, en este caso, la transformación química que tiene lugar en el elemento.

Al recorrer una línea cerrada cualquiera situada en el interior del circuito cerrado, el potencial del campo debe volver, claro está, a su valor de partida, es decir, su variación total es nula. Consideremos, por ejemplo, un contorno situado sobre la superficie de los conductores. Al pasar de un conductor al otro el potencial experimenta un salto ϕ_{ab} . En cambio, la caída de potencial a lo largo de una línea en cada conductor cuando existe una corriente J (corriente total a través de la sección) es igual a RJ , donde R es la resistencia del conductor. Por ello, la variación total del potencial a lo largo del circuito vale

$$\sum \phi_{ab} - \sum JR.$$

Igualando esta expresión a cero, observando que la corriente J es constante a lo largo de todo el circuito y que la suma $\sum \phi_{ab}$ es la fuerza electromotriz \mathcal{E} , se encuentra

$$J \sum R = \mathcal{E}, \quad (23.1)$$

* En las condiciones reales, todos estos campos de ordinario quedan compensados por el campo de iones de la atmósfera que se «adhieren» a la superficie.

de modo que la corriente que se origina en el circuito con un elemento galvánico es igual a la f.e.m. dividida por la resistencia total de todos los conductores en el circuito (incluida también, claro está, la resistencia interna del propio elemento).

Aunque la f.e.m. de un elemento galvánico puede expresarse también como suma de diferencias de potenciales de contacto, sin embargo es muy importante subrayar que, en realidad, se trata de una magnitud termodinámica, determinada exclusivamente por los estados volumétricos de los conductores y por completo independiente de las propiedades de sus superficies de separación. Esto está claro ya por el simple hecho de que \mathcal{E} no es sino el trabajo (referido a la unidad de carga) que habría de realizar sobre una partícula cargada para hacerle recorrer de manera reversible la totalidad del circuito cerrado.

Para ilustrar esta circunstancia consideremos un elemento galvánico constituido por dos electrodos metálicos (metales A y B) sumergidos en una solución de electrolitos AX y BX (X^- es un anión cualquiera). Sean ζ_A y ζ_B los potenciales químicos de los metales A y B , y ζ_{AX} y ζ_{BX} los potenciales químicos de los electrolitos en la solución*. Llevar la carga elemental e a lo largo del circuito cerrado significa hacer pasar el ion A^+ del electrodo A a la solución, hacer pasar el ion B^+ de la solución al electrodo B , compensándose en este proceso la variación de las cargas de los electrodos por el paso de un electrón del electrodo A al electrodo B a lo largo de la parte exterior del circuito. El resultado de estos procesos se reduce a que el electrodo A pierde un átomo neutro, mientras que el B lo adquiere, y que en la solución de electrolito una molécula BX se substituye por una AX . Dado que el trabajo realizado en un proceso reversible (a temperatura y presión constantes) es igual a la variación del potencial termodinámico del sistema, encontramos la relación

$$e\mathcal{E}_{AB} = (\zeta_B - \zeta_{BX}) - (\zeta_A - \zeta_{AX}), \quad (23.2)$$

que expresa la f.e.m. del elemento en función de las propiedades volumétricas de los electrodos y de la solución de electrolito.

La expresión (23.2) permite deducir también la siguiente conclusión. Si en la solución se encuentran tres electrolitos (AX , BX , CX) y en ella se han sumergido electrodos metálicos A , B , C , la f.e.m. entre cada dos de ellos está ligada por la relación

$$\mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} = \mathcal{E}_{AC}. \quad (23.3)$$

Mediante las relaciones termodinámicas generales es posible establecer la relación entre la f.e.m. de un elemento galvánico y el efecto térmico que acompaña al paso de la corriente por el circuito, paso que en las condiciones reales tiene lugar, naturalmente, de manera irreversible. Sea Q la cantidad de calor liberada (tanto en el propio elemento como en la parte exterior del circuito) al pasar la unidad de carga; Q no es sino el calor termodinámico de la reacción que tiene lugar dentro

* En este párrafo se adopta como definición del potencial químico la ordinaria, es decir, aquella en la que dicho potencial se refiere a una partícula.

del elemento galvánico al pasar la corriente. Según la conocida fórmula de termodinámica*, dicho calor está ligado con el trabajo \mathcal{E} por la igualdad siguiente:

$$Q = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mathcal{E}}{T} \right). \quad (23.4)$$

La definición de la derivada parcial, que aquí aparece, respecto de la temperatura depende de en qué condiciones tiene lugar el proceso; así, si el paso de la corriente se efectúa a presión constante (como ocurre de ordinario), la derivación se efectúa a presión constante.

§ 24. Electrocapilaridad

La existencia de cargas en la frontera entre dos medios conductores influye sobre su tensión superficial; este fenómeno se llama *electrocapilaridad*. De hecho, se trata aquí de dos medios líquidos, de ordinario la frontera entre un metal líquido (mercurio) y una solución de electrolito.

Designaremos por ϕ_1 y ϕ_2 los potenciales de los dos conductores y por e_1 y e_2 las cargas de uno y otro distribuidas por la superficie de contacto. Estas últimas son iguales en valor absoluto y de signos opuestos, formando así una «doble capa» sobre dicha superficie.

Para la diferencia de potencial $g\tilde{\phi}$ del sistema de dos conductores, teniendo en cuenta su superficie de separación, y para valores dados de la presión y la temperatura, tenemos

$$dg\tilde{\phi} = \alpha dS - e_1 d\phi_1 - e_2 d\phi_2. \quad (24.1)$$

El término αdS es el trabajo de variación reversible del área S de la superficie de separación (α es el coeficiente de tensión superficial)**.

En vez del potencial termodinámico $g\tilde{\phi}$ de (24.1) cabe escribir solamente su «parte superficial» $g\tilde{\phi}_s$, ya que la parte volumétrica es en todo caso constante para una presión y temperatura dadas y no nos interesa aquí. Haciendo $e_1 = -e_2 \equiv e$ e introduciendo la diferencia de potenciales $\phi = \phi_1 - \phi_2$, escribiremos (24.1) en la forma

$$dg\tilde{\phi}_s = \alpha dS - e d\phi. \quad (24.2)$$

De aquí se sigue que

$$\left(\frac{\partial g\tilde{\phi}_s}{\partial S} \right)_\phi = \alpha, \quad (24.3)$$

donde α se expresa en función de ϕ . Integrando esta igualdad, se encuentra que $g\tilde{\phi}_s = \alpha S$. Substituyendo este resultado en (24.2), obtendremos $d(\alpha S) = \alpha dS - e d\phi$ o $S d\alpha = -e d\phi$, de donde

$$\sigma = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \right)_{p, T}, \quad (24.4)$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 105.

** Véase vol V, *Física estadística*, § 142.

igualdad en la que $\sigma = e/S$ es la carga por cm^2 de la superficie. La relación (24.4) (obtenida por primera vez por G. Lippmann y J. W. Gibbs) constituye la fórmula fundamental de la teoría de los fenómenos electrocapilares.

En un estado de equilibrio el potencial termodinámico \tilde{g}_s debe ser mínimo para valores dados de los potenciales eléctricos de los conductores. Considerándolo como función de las cargas superficiales e , escribamos las condiciones necesarias de mínimo:

$$\partial \tilde{g}_s / \partial e = 0, \quad \partial^2 \tilde{g}_s / \partial e^2 > 0, \quad (24.5)$$

donde se supone que las derivadas se toman para área S constante. Para calcularlas expresaremos \tilde{g}_s en función del potencial termodinámico $g_s = g_s(e)$:

$$\tilde{g}_s = g_s(e) - e_1 \phi_1 - e_2 \phi_2 = g_s(e) - e \phi. \quad (24.6)$$

La condición de que la derivada primera sea igual a cero da

$$\frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial e} = \frac{\partial g_s}{\partial e} - \phi = 0,$$

y la de que la segunda derivada sea positiva toma la forma

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial^2 g_s}{\partial e^2} = \frac{\partial \phi}{\partial e} = \frac{1}{S} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} > 0,$$

o bien

$$\partial \sigma / \partial \phi > 0. \quad (24.7)$$

Era natural esperar esta condición, puesto que la doble capa en la superficie puede considerarse como un «condensador» de capacidad $\partial e / \partial \phi$.

Derivando la igualdad (24.4) respecto de ϕ y aplicando (24.7), se encuentra que

$$\partial^2 \alpha / \partial \phi^2 < 0. \quad (24.8)$$

Esto significa que el punto en el cual $\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = -\sigma = 0$ es un máximo de la curva que da α en función de ϕ .

§ 25. Fenómenos termoeléctricos

La condición de que no exista corriente en un metal queda reducida a la de equilibrio termodinámico respecto de los electrones de conductibilidad. Esta condición, como es sabido, no sólo exige la constancia de la temperatura (en todo el cuerpo), sino también la constancia de la suma $e\phi + \zeta_0$, donde ζ_0 es el potencial químico de los electrones de conducción en el metal (para $\phi = 0$)*. Si se trata de un

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 25; entendemos aquí por ζ el potencial químico referido, como de ordinario, a una partícula (a un electrón).

metal que no es homogéneo en su composición, ζ_0 cambia de un punto a otro del mismo incluso si la temperatura es constante. Por consiguiente, la constancia del potencial eléctrico ϕ en modo alguno conduce en este caso a que no exista corriente en el metal, a pesar de que el campo $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ es igual a cero. Esta circunstancia hace inconveniente la definición ordinaria de ϕ (como valor medio del potencial real) si queremos incluir en el análisis también los conductores no homogéneos.

Es natural adoptar como nueva definición del potencial la suma $\phi + \zeta_0/e$, que designaremos en lo que sigue simplemente por ϕ^* . En un metal homogéneo este cambio se reduce a añadir al potencial una constante no esencial. De acuerdo con esto, la «intensidad del campo» $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ (que utilizaremos también) coincide con la intensidad media real únicamente en un metal homogéneo, y en el caso general difiere de ella en el gradiente de una cierta función de estado.

Según esta definición, la corriente se anula junto con el campo en el estado de equilibrio termodinámico (con relación a los electrones de conducción) y la relación entre \mathbf{j} y \mathbf{E} vendrá dada por la fórmula $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (o $j_i = \sigma_{ik} E_k$) incluso en un metal de composición no homogénea.

Consideremos ahora un metal calentado de manera no uniforme, en el cual, en cualquier caso, no existe por lo tanto equilibrio termodinámico (electrónico). Entonces el campo \mathbf{E} difiere de cero incluso cuando la corriente es nula. En general, cuando no son nulas ni la densidad de corriente \mathbf{j} ni el gradiente de la temperatura ∇T , la relación entre estas magnitudes y la intensidad del campo se puede escribir en la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma + \alpha \text{ grad } T. \quad (25.1)$$

Aquí σ es la conductibilidad ordinaria y α una magnitud que caracteriza las propiedades eléctricas del metal. Para simplificar suponemos que la materia es isótropa (o que presenta simetría cúbica) y, de acuerdo con esto, escribiremos los coeficientes de proporcionalidad como magnitudes escalares. La dependencia lineal entre \mathbf{E} y ∇T representa solamente, claro está, el primer término de un desarrollo, lo que es una aproximación suficiente si el gradiente de la temperatura es pequeño (condición que de hecho siempre se cumple).

La misma fórmula (25.1), escrita en la forma

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \alpha \text{ grad } T), \quad (25.2)$$

muestra que cuando un metal se calienta de manera no uniforme puede circular una corriente por él incluso para un campo \mathbf{E} nulo.

Junto con la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} consideraremos también la densidad de flujo de energía, que designaremos por \mathbf{q} . Ante todo, de este flujo hay que separar la cantidad $\phi \mathbf{j}$ ligada simplemente con el hecho de que cada partícula car-

* Esta definición puede formularse también de otra manera: el nuevo valor $e\phi$ es la variación de energía libre al añadir (isotérmicamente) al metal un electrón; en otras palabras, $\phi = \partial F / \partial \rho$, donde F es la energía libre del metal, y ρ la carga de los electrones de conducción referidos a la unidad de volumen.

gada (electrón) lleva consigo una energía $e\phi$. La diferencia $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}$, sin embargo, ya no depende del potencial en sí y puede representarse, en el caso general, como función lineal de los gradientes $\nabla\phi = -\mathbf{E}$ y ∇T , de manera análoga a la fórmula (25.2) para la densidad de corriente. Por el momento escribiremos esta fórmula en la forma

$$\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \beta\mathbf{E} - \gamma \text{ grad } T.$$

El principio de simetría de los coeficientes cinéticos permite vincular el coeficiente β con el coeficiente α en la expresión (25.2).

Para ello calculemos la velocidad de variación de la entropía total del conductor. La cantidad de calor liberada por unidad de tiempo y por unidad de volumen del cuerpo es $-\text{div } \mathbf{q}$. Podemos escribir, en consecuencia,

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = - \int \frac{\text{div } \mathbf{q}}{T} dV.$$

Además, aplicando la ecuación $\text{div } \mathbf{j} = 0$, escribamos

$$\frac{\text{div } \mathbf{q}}{T} = \frac{1}{T} \{ \text{div}(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}) + \text{div } \phi\mathbf{j} \} = \frac{1}{T} \text{div}(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}) - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}{T}.$$

Integremos por partes la integral del primer término; el resultado que se obtiene es

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}{T} dV - \int \frac{(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}) \cdot \text{grad } T}{T^2} dV. \quad (25.3)$$

Esta fórmula prueba que si se elige como magnitudes $\partial x_a / \partial t$ (véase § 20) las componentes de los vectores \mathbf{j} y $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}$, las correspondientes magnitudes X_a serán las componentes de los vectores $-\mathbf{E}/T$ y $\nabla T/T^2$. Según esto, en las igualdades

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma T \frac{\mathbf{E}}{T} - \sigma \alpha T^2 \frac{\text{grad } T}{T^2}, \\ \mathbf{q} - \phi\mathbf{j} &= \beta T \frac{\mathbf{E}}{T} - \gamma T^2 \frac{\text{grad } T}{T^2}, \end{aligned}$$

deben ser iguales los coeficientes $\sigma \alpha T^2$ y βT .

Así pues, $\beta = \sigma \alpha T$ y tenemos

$$\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \sigma \alpha T \mathbf{E} - \gamma \text{ grad } T.$$

Finalmente, expresando aquí \mathbf{E} en función de \mathbf{j} y ∇T según (25.1), obtendremos la siguiente igualdad:

$$\mathbf{q} = (\phi + \alpha T)\mathbf{j} - \kappa \text{ grad } T, \quad (25.4)$$

donde se ha hecho $\kappa = \gamma - T\alpha^2\sigma$. La magnitud κ no es sino el coeficiente ordinario

de conductibilidad térmica determinado por el flujo de calor cuando no existe corriente eléctrica.

Hay que señalar que la condición de que sea positiva la derivada $d\mathcal{S}/dt$ no impone ninguna limitación nueva a los coeficientes termoeléctricos. Cuando se substituyen (25.1) y (25.4) en (25.3) se obtiene

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \left(\frac{j^2}{\sigma T} + \frac{\kappa (\text{grad } T)^2}{T^2} \right) dV > 0, \quad (25.5)$$

de donde se sigue únicamente que los coeficientes de conductibilidad térmica y eléctrica deben ser positivos.

En las fórmulas que preceden se ha supuesto implícitamente que el hecho de que la presión (o la densidad) no sea uniforme para un valor constante de la temperatura no puede conducir a que aparezca un campo (o una corriente) en el conductor; basándose en esto, en (25.2) y (25.4) no se ha escrito ningún término proporcional a ∇p . En realidad, la existencia de tales términos estaría en contradicción con la ley de crecimiento de la entropía: en el integrando de la expresión (25.5) aparecerían términos con los productos de signo variable $\mathbf{j} \cdot \nabla p$ y $\nabla T \cdot \nabla p$, de lo que resultaría que la integral no podría ser definida positiva.

Las relaciones (25.1) y (25.4) ponen de manifiesto diferentes efectos termoeléctricos. Consideremos el calor $-\text{div } \mathbf{q}$ liberado por segundo y en la unidad de volumen del conductor. Derivando la expresión (25.4), se encuentra

$$\begin{aligned} Q &= -\text{div } \mathbf{q} \\ &= \text{div}(\kappa \text{ grad } T) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \text{grad } (\alpha T), \end{aligned}$$

o bien, substituyendo aquí (25.1),

$$Q = \text{div}(\kappa \text{ grad } T) + \frac{j^2}{\sigma} - T \mathbf{j} \cdot \text{grad } \alpha. \quad (25.6)$$

El primer término de la suma en el segundo miembro está ligado con la conductibilidad puramente térmica, mientras que el segundo, proporcional al cuadrado de la corriente, se puede llamar calor de Joule. Nos interesa aquí el tercer término, término que da los efectos específicamente termoeléctricos.

Supongamos que el conductor es de composición homogénea. Entonces la variación de la cantidad α se debe solamente al gradiente de la temperatura y se puede escribir $\nabla \alpha = \frac{d\alpha}{dT} \nabla T$; si, como suele ocurrir, la presión es constante

en todo el cuerpo, hay que entender por $d\alpha/dT$ la derivada $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_p$. Por lo tanto, la liberación de calor que nos interesa (que constituye el llamado *efecto Thomson*) es igual a

$$\rho \mathbf{j} \cdot \text{grad } T, \quad \text{donde } \rho = -T d\alpha/dT. \quad (25.7)$$

La magnitud ρ se llama *coeficiente de Thomson*. Obsérvese que este efecto es proporcional a la primera potencia de la corriente, no a su cuadrado como ocurría en el calor de Joule. Por ello, cambia de signo al cambiar el sentido de la corriente. El coeficiente ρ puede ser positivo o negativo. Si $\rho > 0$, el calor de Thomson es positivo (es decir, se libera calor) al circular la corriente en el sentido de las temperaturas crecientes, mientras que si la corriente circula en el sentido opuesto, se absorbe calor; cuando $\rho < 0$, el fenómeno ocurre al revés.

Otro efecto térmico (el llamado *efecto Peltier*) aparece al pasar una corriente por la superficie de contacto (unión) de dos metales distintos. Sobre dicha superficie son continuas la temperatura, el potencial y también las componentes normales de los vectores densidad de corriente y densidad de flujo de energía. Designando con los índices 1 y 2 los valores de las magnitudes relativas a uno y otro metal e igualando los valores de las componentes normales de \mathbf{q} (25.4) a uno y otro lado de la superficie de contacto, obtendremos, teniendo en cuenta la continuidad de ϕ , T , j_x :

$$[-\kappa \partial T / \partial x]_1^2 = -j_x T(\alpha_2 - \alpha_1),$$

supuesto el eje x dirigido en el sentido de la normal a la superficie. Si la parte positiva del eje x corresponde al paso del metal 1 al metal 2, la expresión que aparece en el primer miembro de la igualdad es la cantidad de calor que se toma por conductibilidad térmica en 1 s por 1 cm^2 de superficie de contacto. Esta cantidad de calor se compensa por el calor liberado en el contacto y viene dada por la expresión que aparece en el segundo miembro de la igualdad. Por consiguiente, la cantidad de calor emitida por unidad de superficie de contacto (en 1 s) es igual a

$$j\Pi_{12}, \text{ donde } \Pi_{12} = -T(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (25.8)$$

La magnitud Π_{12} se llama *coeficiente de Peltier*. Al igual que el efecto Thomson este efecto es proporcional a la primera potencia de la corriente y cambia de signo cuando se invierte el sentido de la misma. Obsérvese que el coeficiente de Peltier es aditivo, lo que se expresa por la igualdad $\Pi_{13} = \Pi_{12} + \Pi_{23}$, donde los índices 1, 2, 3 se refieren a tres metales distintos.

La comparación de las fórmulas (25.7) y (25.8) pone de manifiesto que los coeficientes de Thomson y de Peltier están ligados por la igualdad

$$\rho_2 - \rho_1 = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\Pi_{12}}{T} \right). \quad (25.9)$$

Consideremos ahora un circuito abierto con dos uniones, siendo el mismo el metal de los dos conductores extremos (metal 1, fig. 16). Supongamos que las dos superficies de contacto (puntos b y c) se encuentran a diferentes temperaturas T_1 y T_2 y que las temperaturas de los dos extremos del circuito (puntos a y d) son iguales entre sí. Entonces entre estos extremos existe una diferencia de potenciales llamada *fuerza termoelectromotriz*; designémosla por \mathcal{E}_T . Para calcularla hagamos en (25.1)

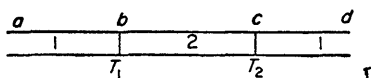


FIG. 16

$\mathbf{j} = 0$ e integremos el campo $\mathbf{E} = \alpha \nabla T$ a lo largo de todo el circuito (eje x):

$$\mathcal{E}_T = \int_a^d \alpha \frac{dT}{dx} dx = \int_a^d \alpha dT.$$

La integración desde a hasta b y desde c hasta d significa integrar respecto de la temperatura desde T_2 a T_1 en el primer metal, e integrar desde b a c equivale a integrar respecto de T entre los límites T_1 y T_2 en el segundo metal. Encontramos, por lo tanto,

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dT. \quad (25.10)$$

Comparando con (25.8), vemos que la fuerza termoelectromotriz está ligada con el coeficiente de Peltier por la relación siguiente:

$$\mathcal{E}_T = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT. \quad (25.11)$$

Las fórmulas (25.9) y (25.11) se llaman *relaciones de Thomson*.

Para terminar este párrafo escribamos las fórmulas que dan la corriente y el flujo de calor en un conductor anisótropo. Estas fórmulas se deducen mediante el principio de simetría de los coeficientes cinéticos de manera exactamente análoga a como se obtuvieron las fórmulas (25.1) y (25.4) y resultan ser:

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma^{-1}_{ik} j_k + \alpha_{ik} \partial T / \partial x_k, \\ q_i - \phi j_i &= T \alpha_{ki} j_k - \kappa_{ik} \partial T / \partial x_k. \end{aligned} \quad (25.12)$$

Aquí σ^{-1}_{ik} es el tensor inverso del tensor conductibilidad σ_{ik} ; los tensores σ_{ik} y κ_{ik} son simétricos. En cambio, el tensor termoelectrónico α_{ik} es en general no simétrico.

PROBLEMA

Hallar las relaciones que ligan los coeficientes de los distintos efectos termogalvanomagnéticos, es decir, de los efectos que aparecen al pasar una corriente cuando existen simultáneamente un campo eléctrico, uno magnético y un gradiente de temperatura.

Solución. El estudio es por completo análogo al que se ha efectuado en el texto para los fenómenos termoelectrónicos. En el presente caso conviene llevarlo a cabo directamente en forma tensorial,

aplicable también a los conductores anisótropos. Escribamos la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} y el flujo de calor \mathbf{q} en la forma

$$\begin{aligned} j_i &= a_{ik} \frac{E_k}{T} + b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right), \\ q_i - \phi j_i &= c_{ik} \frac{E_k}{T} + d_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

donde todos los coeficientes son funciones del campo magnético. Según el principio de simetría de los coeficientes cinéticos tenemos

$$\begin{aligned} a_{ik}(\mathbf{H}) &= a_{ki}(-\mathbf{H}), & d_{ik}(\mathbf{H}) &= d_{ki}(-\mathbf{H}), \\ b_{ik}(\mathbf{H}) &= c_{ki}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2)$$

Expresando mediante (1) \mathbf{E} y $\mathbf{q} - \phi \mathbf{j}$ en función de \mathbf{j} y ∇T , obtendremos

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma^{-1}_{ik} j_k + \alpha_{ik} \partial T / \partial x_k, \\ q_i - \phi j_i &= \beta_{ik} j_k - \kappa_{ik} \partial T / \partial x_k, \end{aligned} \quad (3)$$

donde los tensores σ^{-1} , α , β , κ son determinadas funciones de los tensores a , b , c , d y poseen las siguientes propiedades de simetría, consecuencia de las relaciones (2):

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}_{ik}(\mathbf{H}) &= \sigma^{-1}_{ki}(-\mathbf{H}), \\ \kappa_{ik}(\mathbf{H}) &= \kappa_{ki}(-\mathbf{H}), & \beta_{ik}(\mathbf{H}) &= T \alpha_{ki}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (4)$$

Éstas son precisamente las relaciones buscadas en su forma más general. Constituyen una generalización de las relaciones que hallamos en el § 25, para el caso en que no existe campo magnético, y en el § 21, para aquel en que no hay gradiente de temperatura.

Para un conductor isótropo en un campo magnético débil se obtendrá, con una precisión que alcanza a los términos de primer orden en \mathbf{H} ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma + \alpha \text{ grad } T + R\mathbf{H} \times \mathbf{j} + N\mathbf{H} \times \text{grad } T, \quad (5)$$

$$\mathbf{q} - \phi \mathbf{j} = \alpha T \mathbf{j} - \kappa \text{ grad } T + N\mathbf{H} \times \mathbf{j} + L\mathbf{H} \times \text{grad } T. \quad (6)$$

Aquí, σ , κ son los coeficientes ordinarios de conductibilidad eléctrica y térmica, α es el coeficiente termoelectrónico que aparece en (25.1), R representa el coeficiente de Hall y N , L son coeficientes nuevos. El término $N\mathbf{H} \times \nabla T$ se puede considerar como influencia del campo magnético sobre la fuerza electromotriz (*efecto Nernst*), y el término $L\mathbf{H} \times \nabla T$, como influencia del campo magnético sobre la conductibilidad térmica (*efecto Leduc-Righi*).

Sobre la frontera entre dos medios son continuas las componentes de los vectores \mathbf{j} y \mathbf{q} , y, por consiguiente, también las del vector

$$-\kappa \text{ grad } T + \alpha T \mathbf{j} + N\mathbf{H} \times \mathbf{j} + L\mathbf{H} \times \text{grad } T.$$

El término $N\mathbf{H} \times \mathbf{j}$ representa la influencia del campo magnético sobre el efecto Peltier (*efecto Ettingshausen*)

La cantidad de calor liberada por segundo en la unidad de volumen del conductor es $Q = -\text{div } \mathbf{q}$. En esta igualdad hay que substituir el valor de \mathbf{q} dado por (6), reemplazando luego $-\nabla \phi = \mathbf{E}$ por la expresión que se deduce de (5). Si el conductor es de composición homogénea, las magnitudes α , N , L , ... son funciones solamente de la temperatura, de modo que sus gradientes resultan proporcionales a ∇T . En este cálculo se prescinde de todos los términos de segundo orden respecto de \mathbf{H} y, dentro de esta aproximación, cabe tomar $\text{rot } (\mathbf{j}/\sigma) \cong \text{rot } \mathbf{E} = 0$. Además, observamos que para un campo exterior \mathbf{H} (cuyas fuentes se encuentran fuera del conductor considerado) se tiene $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ *. Finalmente, como siempre que se trata de una corriente continua, es $\text{div } \mathbf{j} = 0$.

* Con esto prescindimos de un efecto muy débil, a saber, de la influencia del campo magnético propio de las corrientes consideradas sobre el calor liberado.

Teniendo en cuenta todo esto, se obtiene como resultado del cálculo:

$$Q = \frac{j^2}{\sigma} + \text{div}(\kappa \text{ grad } T) - T \mathbf{j} \cdot \text{grad } \alpha + \frac{1}{\sigma T} \frac{d}{dT}(\sigma N T^2) \mathbf{j} \times \mathbf{H} \cdot \text{grad } T.$$

El último término representa la variación del efecto Thomson debida a la existencia de un campo magnético.

§ 26. Fenómenos de difusión eléctrica

La existencia de la difusión conduce a que se manifiesten en las soluciones de electrolitos fenómenos específicos que no se observan en los conductores sólidos.

Supondremos, para simplificar, que la temperatura es constante en toda la solución. Con ello limitamos el análisis a los fenómenos de difusión puramente eléctrica, no complicados por efectos termoelectrónicos.

En vez de la presión p y la concentración c de la solución conviene utilizar como variables independientes la presión y el potencial químico ζ . Este último se define aquí como derivada del potencial termodinámico de la unidad de masa de la solución respecto de su concentración c (para valores constantes de p y T), entendiendo por concentración la razón de la masa de electrolito a la masa total del líquido en el elemento de volumen dado*. Recordaremos que la constancia del potencial químico constituye (junto con la constancia de la presión y la temperatura) una de las condiciones de equilibrio termodinámico.

La definición de potencial del campo eléctrico dada en el § 25 debe modificarse un poco en el presente caso, puesto que los elementos portadores de la corriente son ahora, no los electrones de conducción, sino los iones del electrolito disuelto. Más precisamente, una definición adecuada (cf. la nota de la pág. 126) la proporciona la fórmula $\phi = (\partial \Phi / \partial \rho)_c$, donde Φ es el potencial termodinámico, y ρ , la suma de las cargas de los iones que se encuentran en la unidad de volumen de la solución (después de derivar, es necesario, naturalmente, hacer $\rho = 0$, teniendo en cuenta que la solución es eléctricamente neutra). La derivada se calcula para una concentración másica constante, es decir, para una suma dada de las masas de los iones de ambos signos por unidad de volumen.

Cuando existe un gradiente de potencial químico, en la expresión de la densidad de corriente aparece un término más que es proporcional a dicho gradiente:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \beta \text{ grad } \zeta), \quad (26.1)$$

* Los potenciales químicos ordinarios se definen por las igualdades $\zeta_1 = \partial \Phi / \partial n_1$, $\zeta_2 = \partial \Phi / \partial n_2$, donde Φ es el potencial termodinámico de 1 g de solución y n_1 , n_2 son los números de partículas de la sustancia disuelta y del disolvente en esta cantidad de materia. Los números n_1 y n_2 están ligados por la relación $n_1 m_1 + n_2 m_2 = 1$ (m_1 , m_2 son las masas de las partículas de una y otra especie), y la concentración $c = n_1 m_1$. Así, pues, tenemos para el potencial químico introducido aquí:

$$\zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial c} = \frac{\zeta_1}{m_1} - \frac{\zeta_2}{m_2},$$

análogo al término suplementario en (25.2). En lo que sigue comprobaremos que, para un gradiente dado del potencial químico (y de la temperatura), \mathbf{j} no puede depender del gradiente de la presión y que por consiguiente, no existe en la expresión (26.1) un término en ∇p^* .

Junto con la corriente eléctrica es necesario considerar también el transporte de masa de electrólito que tiene lugar simultáneamente. Hay que tener en cuenta, además, que el paso de la corriente por la solución puede ir acompañado de movimientos macroscópicos del líquido. La densidad de flujo de masa de electrólito transportado por este movimiento junto con todo el líquido es igual a $\rho \mathbf{v}$ (\mathbf{v} es la velocidad y ρ la densidad de la solución). Además, el electrólito se transporta también en un proceso de difusión molecular. La densidad de este flujo de difusión la designaremos por \mathbf{i} , de modo que la densidad total de flujo es $\rho \mathbf{v} + \mathbf{i}$. Los procesos irreversibles de difusión determinan un aumento adicional de entropía; la velocidad de variación de la entropía total viene determinada por la fórmula**

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}{T} dV - \int \frac{\mathbf{i} \cdot \text{grad } \zeta}{T} dV. \quad (26.2)$$

Al igual que la densidad de corriente eléctrica, el flujo debido a difusión puede escribirse como combinación lineal de \mathbf{E} y $\nabla \zeta$, lo que es lo mismo, de \mathbf{j} y $\nabla \zeta$. Teniendo en cuenta la simetría de los coeficientes cinéticos, uno de los coeficientes en esta expresión puede vincularse con el coeficiente β en la fórmula (26.1) de manera exactamente análoga a como se hizo en el párrafo que precede para \mathbf{j} y $\mathbf{q} - \phi \mathbf{j}$. El resultado que se obtiene es:

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{(\partial \zeta / \partial c)_{p,T}} \text{grad } \zeta + \beta \mathbf{j}. \quad (26.3)$$

El coeficiente de $\nabla \zeta$ lo expresaremos aquí en función del coeficiente ordinario de difusión***.

La imposibilidad de que en las expresiones (26.1) y (26.3) aparezcan términos proporcionales al gradiente de la presión se sigue de nuevo (como en el párrafo precedente) de la ley de crecimiento de la entropía: tales términos darían lugar a que la derivada de la entropía total (26.2) no fuese una magnitud definida positiva.

Las fórmulas (26.1) y (26.3) resumen todos los fenómenos de difusión; no nos entretendremos aquí en un estudio más detallado.

* Hay que subrayar, sin embargo, que para un gradiente dado de la concentración, \mathbf{j} sí depende del gradiente de la presión:

$$\text{grad } \zeta = (\partial \zeta / \partial c)_{p,T} \text{grad } c + (\partial \zeta / \partial p)_{c,T} \text{grad } p.$$

** Cómo deducir el segundo término de esta fórmula puede verse en el vol. VI, *Hidrodinámica*, § 57.

*** Cuando $\mathbf{j} = 0$ y para una presión constante (y una temperatura asimismo constante), se tiene $\mathbf{j} = -\rho D \nabla c$.

PROBLEMA

Dos placas paralelas planas (de un mismo metal A) se sumergen en una solución de electrólito AX . Hallar la dependencia de la densidad de corriente respecto de la diferencia de potenciales aplicada a las placas.

Solución. Al pasar la corriente se disuelve metal de un electrodo y se deposita sobre el otro. En este proceso, el disolvente (agua) se encuentra en reposo y por la solución pasa un flujo de masa de metal con una densidad $\rho v = jm/e$ (j es la densidad de corriente eléctrica, m y e la masa y la carga de los iones A^+)*. Por otra parte, este flujo viene dado por la expresión $i + \rho v c$, con i dada por (26.3); suponiendo que la presión es constante en todo el líquido**, obtendremos la ecuación

$$\rho D \frac{dc}{dx} = \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c) \right] j \quad (1)$$

(x es la coordenada en la dirección normal a los electrodos). Dado que $j = \text{const}$ en la solución, de aquí se sigue que

$$jl = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D dc}{\beta - m(1-c)/e}, \quad (2)$$

donde c_1, c_2 son las concentraciones en las superficies de las placas y l , la distancia entre ellas.

La manera más simple de determinar la diferencia de potenciales \mathcal{E} entre las placas para una disipación total de energía Q (en 1 s) se basa en tener en cuenta que debe ser igual (referida a 1 cm² de superficie de las placas) a $j\mathcal{E}$. Según (26.1), (26.2) tenemos

$$Q = T \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \left\{ \frac{j^2}{\sigma} + \rho D \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 \right\} dx = j\mathcal{E},$$

y, aplicando (1), se obtiene

$$\mathcal{E} = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D dc}{\sigma(\beta - m(1-c)/e)} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c) \right] dc. \quad (3)$$

Las fórmulas (2) y (3) resuelven (en forma implícita) el problema planteado.

Si la corriente j es pequeña, también será pequeña la diferencia de concentraciones $c_2 - c_1$. Sustituyendo las integrales por los productos de los integrandos por $c_2 - c_1$, resulta para la resistencia específica efectiva de la solución

$$\frac{\mathcal{E}}{lj} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho D} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c) \right]^2.$$

El primer término en (3) da la caída de potencial $\left(\int j \frac{dx}{\sigma} \right)$ debida al paso de la corriente. El segundo término, en cambio, es la fuerza electromotriz determinada por la diferencia de concentraciones en la solución (en un cierto sentido, análoga a la fuerza termoelectromotriz). Esta última expresión es independiente de las condiciones del problema unidimensional concreto de que aquí se trata y constituye una expresión general para la f.e.m. de un «elemento de concentración».

* Recordaremos que la velocidad hidrodinámica v en una solución se define de modo que ρv es el impulso por unidad de volumen del líquido (véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 57). Por ello, el hecho de que, en este caso, se mueve (relativamente a los electrodos) tan sólo el metal disuelto, carece de importancia en el cálculo de ρv .

** Tener en cuenta la variación de presión provocada por el movimiento del líquido conduciría únicamente a pequeñas cantidades de orden superior.

CAPÍTULO IV

CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

§ 27. Campo magnético constante

Un campo magnético constante en los medios materiales se representa por dos ecuaciones de Maxwell que se obtienen promediando las ecuaciones microscópicas

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \quad (27.1)$$

El valor medio del campo magnético se suele llamar *inducción magnética* y se representa por \mathbf{B} :

$$\mathbf{h} = \mathbf{B}. \quad (27.2)$$

De acuerdo con esto, el resultado de promediar la primera de las ecuaciones (27.1) se escribe en la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (27.3)$$

En cuanto a la segunda ecuación, la derivada respecto del tiempo desaparece al promediar, puesto que el campo medio se supone constante, de modo que tenemos

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c) \overline{\rho \mathbf{v}}. \quad (27.4)$$

El valor de la densidad microscópica de corriente, en general, es diferente de cero tanto en los conductores como en los dieléctricos. La diferencia entre estas dos categorías de cuerpos estriba solamente en que en los dieléctricos se tiene siempre

$$\int \overline{\rho \mathbf{v}} \cdot d\mathbf{f} = 0, \quad (27.5)$$

donde la integral se extiende a toda la superficie de una sección transversal cualquiera del cuerpo; en los conductores esta integral, en cambio, puede ser no nula. Supondremos en primer lugar que en el cuerpo (si se trata de un conductor) no existe corriente total, es decir, que vale la relación (27.5).

El hecho de que la integral (27.5) sea igual a cero para una sección cualquiera del cuerpo significa que el vector $\rho \mathbf{v}$ puede escribirse en forma de rotacional de un cierto vector, que se suele designar por $c\mathbf{M}$:

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (27.6)$$

donde la magnitud \mathbf{M} es diferente de cero tan sólo dentro del cuerpo (cf. los razonamientos análogos en el § 6). En efecto, integrando sobre una superficie limitada por un contorno que rodee al cuerpo y situado por completo fuera del mismo, obtendremos

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = c \oint \text{rot } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{f} = c \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

El vector \mathbf{M} se llama *imanación* del cuerpo. Introduciendo este vector en la ecuación (27.4), resulta

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad (27.7)$$

donde el vector \mathbf{H} está ligado con la inducción magnética \mathbf{B} por la relación

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (27.8)$$

que es análoga a la que existe entre el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y el campo eléctrico \mathbf{E} . Aunque el vector \mathbf{H} , por analogía con \mathbf{E} , se suele llamar «intensidad» del *campo magnético*, hay que recordar que, en realidad, el verdadero valor medio de la intensidad es \mathbf{B} y no \mathbf{H} .

Para poner en claro el sentido físico de la magnitud \mathbf{M} , consideremos el momento magnético total determinado por todas las partículas cargadas que se mueven en el interior del cuerpo. Por definición de momento magnético*, éste es igual a la integral

$$\int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV / 2c = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{M} dV.$$

Dado que $\rho \mathbf{v} \equiv 0$ fuera del cuerpo, la integral puede extenderse a cualquier volumen que contenga al cuerpo en su interior. Transformémosla luego como sigue

$$\int \mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{M} dV = - \oint \mathbf{r} \times (\mathbf{M} \times d\mathbf{f}) - \int (\mathbf{M} \times \text{grad}) \times \mathbf{r} dV.$$

La integral sobre la superficie situada fuera del cuerpo es igual a cero. En el segundo término tenemos

$$(\mathbf{M} \times \text{grad}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{M} \text{div } \mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M}.$$

Así pues, en definitiva, resulta

$$\frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \int \mathbf{M} dV. \quad (27.9)$$

Vemos, por consiguiente, que el vector imanación representa el momento magnético de la unidad de volumen del cuerpo**.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 44.

** Únicamente después de establecer esta correspondencia la magnitud \mathbf{M} queda por completo determinada. Las igualdades (27.6) dentro del cuerpo y la $\mathbf{M} = 0$ fuera de él, en cambio, no determinan por sí solas todavía esta magnitud de manera unívoca: en un dominio interior del cuerpo cabría sumar a \mathbf{M} un vector arbitrario de la forma $\text{grad } f$ sin que dejara de cumplirse la igualdad (27.6) (cf. la observación análoga que se hizo al tratar de la polarización eléctrica en la pág. 44).

A las ecuaciones (27.3) y (27.7) hay que añadir una relación que ligue las magnitudes \mathbf{H} y \mathbf{B} entre sí; únicamente después de haberlo hecho es completo el sistema de ecuaciones. Así, en los cuerpos no-ferromagnéticos en campos magnéticos no demasiado intensos, \mathbf{B} y \mathbf{H} están ligados entre sí por una relación lineal. En el caso de cuerpos isótropos, la relación lineal se reduce a la mera proporcionalidad

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (27.10)$$

El coeficiente μ se llama *permeabilidad magnética* (o, simplemente, *permeabilidad*) y el coeficiente de proporcionalidad

$$\chi = (\mu - 1)/4\pi \quad (27.11)$$

en la relación $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, *susceptibilidad magnética*.

En contraste con la constante dieléctrica (permitividad) ϵ , que en todos los cuerpos es mayor que 1, la permeabilidad igual puede ser mayor o menor que la unidad. Cabe sólo afirmar que siempre es $\mu > 0$ (la razón de esta diferencia entre μ y ϵ véase en el § 31; la demostración de la desigualdad $\mu > 0$ se dará en el § 30). Según esto, la susceptibilidad magnética χ puede ser positiva o negativa.

Otra diferencia cuantitativa consiste en que la susceptibilidad magnética de la inmensa mayoría de cuerpos es muy pequeña comparada con su susceptibilidad eléctrica. Esta diferencia se debe a que la magnetización de un material (no-ferromagnético) constituye un efecto relativista de segundo orden respecto de $\frac{v}{c}$ (v representa la velocidad de los electrones en los átomos*).

De las ecuaciones $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ se sigue (cf. § 6) que en la frontera entre dos medios diferentes deben cumplirse las condiciones

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t}. \quad (27.12)$$

Este sistema de ecuaciones y de condiciones de contorno coincide formalmente con el que determina el campo electrostático en los dieléctricos cuando no hay cargas libres y difiere de éste únicamente en la substitución de \mathbf{E} y \mathbf{D} por \mathbf{H} y \mathbf{B} , respectivamente. Teniendo en cuenta la ecuación $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, se puede buscar \mathbf{H} en la forma $\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$ y para el potencial ψ se obtendrán precisamente las mismas ecuaciones que para el potencial electrostático. La solución de toda una serie de problemas estudiados en el Cap. II para el campo electrostático son aplicables inmediatamente al campo magnético constante. En particular, las fórmulas obtenidas en el § 8 para un elipsoide dieléctrico en un campo eléctrico homogéneo son por completo válidas (con los correspondientes cambios en el significado de los símbolos) para un elipsoide magnético que se encuentra en un campo magnético homogéneo.

* Una primera vez la razón v/c aparece, junto con \mathbf{H} , en el hamiltoniano correspondiente a la interacción del cuerpo con el campo magnético, y una segunda vez, a través de los momentos magnéticos elementales atómicos o moleculares.

La componente tangencial de la inducción magnética, en contraste con su componente normal, experimenta un salto en la superficie de separación de dos medios. El valor de esta discontinuidad puede vincularse con la densidad de las corrientes que circulan por la superficie. Para ello integremos los dos miembros de la ec. (27.4) a lo largo de un pequeño segmento Δl que atraviesa la superficie de separación en la dirección de la normal. Hagamos tender luego a cero la longitud Δl ; la integral $\int \overline{\rho \mathbf{v}} dl$, sin embargo, puede tender, con todo, a un valor no nulo. El valor así determinado

$$\mathbf{g} = \int \overline{\rho \mathbf{v}} dl \quad (27.13)$$

puede llamarse *densidad de corriente superficial*; esta densidad determina la carga que pasa por unidad de tiempo a través de la unidad de longitud de una línea trazada sobre la superficie. En un punto dado de ésta, elijamos el eje y en la dirección (orientada) de \mathbf{g} , y el sentido de la normal dirigida del medio 1 al medio 2, como eje x . Entonces la integración de la ecuación (27.4) da

$$\int \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) dx = \frac{4\pi}{c} g_y = \frac{4\pi}{c} g.$$

Puesto que B_x es continua, la derivada $\partial B_x / \partial z$ es finita y, por ello, su integral tiende a cero cuando tiende a cero la longitud del segmento Δl . En cambio, la integral de $\partial B_z / \partial x$ da la diferencia de valores B_z a uno y otro lado de la superficie. Así pues,

$$B_{2z} - B_{1z} = -4\pi g / c.$$

Esta igualdad se puede escribir en forma vectorial:

$$4\pi \mathbf{g} / c = \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 4\pi \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1), \quad (27.14)$$

donde \mathbf{n} es el vector unidad de la normal dirigida hacia el interior del medio 2; en la última transformación se ha tenido en cuenta que la componente tangencial de \mathbf{H} es continua.

§ 28. Simetría magnética de los cristales

Entre las propiedades eléctricas y magnéticas de los cristales existe una profunda diferencia debida a la diversidad de comportamiento de las cargas y de las corrientes con relación al cambio de sentido del tiempo.

Como es sabido, dada la invariancia de las ecuaciones del movimiento respecto del cambio de signo del tiempo, la substitución formal de t por $-t$ aplicada a cualquier estado de equilibrio termodinámico de un cuerpo debe conducir a un estado que es también uno de los posibles estados de equilibrio. En relación con esto se presentan dos posibilidades: los estados que se transforman entre sí al substituir t por $-t$ coinciden o no coinciden.

En este párrafo designaremos por $\rho(x, y, z)$ y $\mathbf{j}(x, y, z)$ la densidad real (microscópica) de carga y la densidad de corriente en cada punto de un cristal, promediada una y otra solamente respecto del tiempo (pero no en volúmenes «físicamente infinitesimales» como se hace en la teoría macroscópica). Son estas funciones precisamente las que determinan la estructura eléctrica y magnética del cristal, respectivamente.

La substitución de t por $-t$ cambia el signo de \mathbf{j} . Si como resultado de esta transformación el estado del cuerpo no cambia, esto significa que $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, es decir, que $\mathbf{j} = 0$. Por lo tanto, se tiene así una causa en virtud de la cual pueden existir cuerpos con una función $\mathbf{j}(x, y, z)$ rigurosamente igual a cero. Junto con la densidad de corriente, en tales cuerpos se anulan los valores medios (temporales) del campo magnético y de los momentos magnéticos en cada punto del cuerpo (claro está, se trata en todo eso de estados de un cuerpo cuando no existe campo magnético exterior). De ellos cabe decir que no poseen ninguna «estructura magnética». De hecho, a esta categoría pertenecen la mayor parte de cuerpos.

La densidad de cargas ρ , por el contrario, no cambia en absoluto al aplicar la transformación $t \rightarrow -t$. No hay, pues, razón alguna en virtud de la cual esta función deba anularse idénticamente. En otras palabras, no existen cristales sin «estructura eléctrica». En esto consiste la diferencia esencial entre las propiedades magnéticas y eléctricas de los cristales que hemos recordado al principio.

Consideremos los cristales en los que la substitución de t por $-t$ cambia el estado de los mismos y en los que, por ello, $\mathbf{j} \neq 0$. Al referirnos a estos cuerpos, diremos que se trata de cuerpos con «estructura magnética».

Observemos ante todo que si bien \mathbf{j} no es igual a cero, no puede haber ninguna corriente total (en el estado de equilibrio del cuerpo), es decir, la integral $\int \mathbf{j} dV$ extendida a una celda elemental debe anularse siempre*. De no ser así esta corriente crearía un campo magnético macroscópico y el cristal poseería energía magnética (por unidad de volumen) que crecería rápidamente al aumentar el tamaño del cuerpo. Teniendo en cuenta la desventaja energética de tal estado, éste no puede, evidentemente, corresponder al equilibrio termodinámico.

Al mismo tiempo, las corrientes \mathbf{j} pueden crear un momento magnético macroscópico no nulo, es decir, la integral $\int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV$ (de nuevo extendida al volumen de una celda elemental) puede ser diferente de cero. De acuerdo con esto, entre los cuerpos en los cuales $\mathbf{j} \neq 0$ cabe distinguir dos tipos: los cuerpos con momento magnético macroscópico no nulo y aquellos otros en los que dicho momento es igual a cero. Los primeros se llaman *ferromagnéticos*, los segundos, *antiferromagnéticos*.

La simetría de la distribución de corrientes \mathbf{j} puede representarse, evidentemente, como simetría de la distribución y de las orientaciones de los momentos magnéticos de los átomos individuales en el cristal. Si $\mathbf{j} = 0$, ello significa que todos estos

* Hay que subrayar que la celda de que aquí se habla es la verdadera celda elemental, cuya definición supone la estructura magnética del cristal, celda que puede no coincidir con la puramente cristalográfica y basada en la noción de simetría de la distribución de las cargas en la red.

momentos cambian su orientación con el tiempo de manera totalmente desordenada, de modo que el valor medio de cada uno de ellos se anula. En un cristal ferromagnético los momentos atómicos están orientados preferentemente en una dirección, originando un momento total distinto de cero en cada celda elemental. Finalmente, en un cuerpo antiferromagnético, los momentos atómicos medios son diferentes de cero, es decir, sí están orientados, pero de tal forma que en cada celda se compensan recíprocamente.

Se plantea ahora la cuestión de cuáles son los tipos posibles (grupos de simetría) de una distribución de corrientes $\mathbf{j}(x, y, z)$. Esta simetría está constituida, ante todo, por los elementos ordinarios —rotaciones, reflexiones y traslaciones— con lo cual entre los posibles grupos de simetría de \mathbf{j} se tienen, en cualquier caso, los 230 grupos espaciales cristalográficos ordinarios. Sin embargo, con éstos no se agota, ni de lejos, la lista de los grupos que buscamos. Como se indicó ya, la substitución de t por $-t$ cambia el signo del vector \mathbf{j} . Debido a esto aparece un nuevo elemento posible de simetría, a saber, la simetría respecto de la transformación que consiste en cambiar los sentidos de todas las corrientes; designemos, como se suele hacer, esta transformación por R . Si la distribución de corrientes posee el elemento de simetría R , esto significa que $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, es decir, que $\mathbf{j} = 0$ y el cuerpo carece de estructura magnética. Una función $\mathbf{j}(x, y, z)$ diferente de cero puede, sin embargo, ser simétrica respecto de diferentes combinaciones de la transformación R con los otros elementos de simetría —rotaciones, reflexiones y traslaciones. Así pues, el problema de determinar los tipos posibles de simetría de una distribución de corrientes (los *grupos espaciales magnéticos*) consiste en construir todos los posibles grupos formados tanto a partir de las transformaciones que se tienen en los grupos espaciales ordinarios, como a partir de aquellas que se obtienen por combinación de las transformaciones del tipo ordinario con la transformación R .

Si se da la simetría de la distribución de corrientes, con ella quedará determinada también la simetría cristalográfica de la distribución de las partículas en el cristal, que coincide con la simetría de la función $\rho(x, y, z)$. Ésta vendrá definida por el grupo espacial que se obtiene a partir del grupo de simetría de \mathbf{j} si se considera formalmente que la transformación R es la identidad (a la cual se reduce cuando se aplica a la función ρ).

El conocimiento del grupo completo de simetría de la función $\mathbf{j}(x, y, z)$, sin embargo, no es necesario si nos interesan únicamente las propiedades macroscópicas del cuerpo. Estas propiedades dependen tan sólo de la dirección en el cristal, y la simetría de traslación de la red cristalina en nada las afecta. Desde el puro punto de vista de la estructura cristalográfica, la «simetría de las direcciones» en un cristal viene dada, como es sabido, por las 32 clases cristalográficas. Éstas son los grupos de simetría formados a partir solamente de las rotaciones y de las reflexiones puras; dichas clases resultan de los grupos espaciales si en éstos se consideran todas las traslaciones como equivalentes a la transformación idéntica y los ejes helicoidales y los planos de deslizamiento se toman como simples ejes y planos de simetría.

En cambio, desde el punto de vista de las propiedades magnéticas, la simetría macroscópica debe clasificarse en grupos formados a partir de rotaciones, reflexiones y sus combinaciones con el elemento R . Estos grupos se pueden llamar *clases cristalográficas magnéticas*, y la relación que los liga con los grupos espaciales magnéticos es la misma que la existente entre las clases cristalográficas ordinarias y los grupos espaciales ordinarios.

Entre dichas clases figuran, ante todo, las 32 clases ordinarias, completadas con el elemento R , y las mismas 32 clases sin dicho elemento. Las primeras, en particular, son los grupos de simetría macroscópica de todos los cuerpos que no presentan estructura magnética, pero estas mismas clases de simetría pueden poseerlas también los cuerpos con estructura magnética. Para que así ocurra es necesario que en el grupo espacial magnético de simetría de este cuerpo el propio elemento R figure no solo, sino únicamente en combinación con traslaciones.

Además, se tienen 58 clases en las cuales el elemento R aparece tan sólo en combinación con rotaciones o reflexiones. Cada una, si se substituye en ella la operación R por la transformación idéntica, se convierte en una de las clases cristalográficas ordinarias*.

Es necesario observar que la aparición de una estructura magnética (ferro o antiferromagnética) está siempre ligada con interacciones relativamente débiles**. Por ello, la estructura cristalográfica de un cuerpo magnético representa sólo una pequeña alteración respecto de la estructura de la fase no-magnética, a partir de la cual la fase magnética suele resultar al disminuir la temperatura. En este respecto las substancias ferromagnéticas, en particular, difieren de los cuerpos ordinarios piroeléctricos, pero son análogas a los ferroeléctricos.

Si se especifica la clase cristalográfica magnética, queda con ello determinado el carácter de todas las propiedades magnéticas de un cuerpo. La más importante de éstas es la existencia o no existencia de un momento magnético macroscópico, es decir, de la imanación espontánea (sin campo exterior). El momento magnético M es una magnitud vectorial que en las rotaciones y en las reflexiones se comporta como un vector axil (producto vectorial de dos vectores polares), y que cambia

* Estas clases son isomorfas respecto de las de los grupos de simetría, descubiertos por A. V. Shubnikov, de las figuras geométricas (poliedros) con caras pintadas de dos colores (según la terminología de Shubnikov, los «grupos de polaridad mezclada»). Al elemento R corresponde la operación de cambiar el color de una cara. (Véase A. V. Shubnikov, *Simetriia i antisimetriia konechnykh figur* (Simetría y antisimetría de las figuras finitas) Izd. AN SSSR, Moscú, 1951). Una deducción directa de estas clases en tanto que grupos de simetría de las propiedades magnéticas de los cuerpos se debe a B. A. Tavger y V. M. Zaitsev (Zh. ETF, 30, 564, 1956).

Se tienen en total 1651 grupos magnéticos espaciales; la manera de obtenerlos (como grupos de Shubnikov) puede verse en N. V. Belov, N. N. Neronova y T. S. Smirnova, *Trudy Instituta Kristallografii* 11, 33, 1955; A. M. Zamorzaev, *Kristallografiia* 2, 15, 1957; *Soviet Physics: Crystallography* 2, 10, 1958.

** De ordinario la interacción de intercambio entre los momentos magnéticos de los átomos conduce a la saturación de los enlaces de valencia y a la formación de estructuras no-magnéticas. La aparición de una estructura magnética resulta solamente de la interacción de intercambio, relativamente débil, de los electrones d y f muy próximos al núcleo en los átomos de los elementos en los grupos de transición del sistema de Mendeleev.

de signo al aplicarle la operación R . Un cristal poseerá la imanación espontánea si en él existe por lo menos una dirección tal que el vector \mathbf{M} que la posee y que tenga las propiedades antes indicadas se conserva invariante en todas las transformaciones de la clase cristalográfica magnética dada.

De nuevo subrayaremos la diferencia respecto de las propiedades eléctricas (esta vez, macroscópicas). El carácter de estas últimas viene completamente determinado por una clase cristalográfica ordinaria. En particular, para que un cuerpo sea piroeléctrico es suficiente que su clase cristalográfica admita la existencia de un vector polar \mathbf{P} (el momento eléctrico). Al mismo tiempo, sería del todo incorrecto llegar a la conclusión de que existe o no un momento magnético macroscópico basándose en el comportamiento del vector axial \mathbf{M} respecto de las transformaciones de la clase cristalográfica (no-magnética) del cuerpo dado.

Para ilustrar esta situación consideremos una red tetragonal formada por átomos idénticos con momentos magnéticos paralelos al eje tetragonal*. Su clase cristalográfica magnética contiene un eje de cuarto orden $C_4^{(z)}$, dos ejes de segundo orden combinados con la operación R ($C_2^{(x)} R$ y $C_2^{(y)} R$), un plano de simetría $\sigma_h^{(z)}$ perpendicular al eje z y dos planos de simetría combinados con R ($\sigma_v^{(x)} R$, $\sigma_v^{(y)} R$). Este grupo admite la existencia de un vector \mathbf{M} dirigido a lo largo del eje tetragonal. En cuanto a la clase cristalográfica de simetría, ésta se obtiene a partir de la anterior si se substituye R por la unidad, es decir, resulta ser la clase D_{4h} . Esta clase no admite la existencia de un vector axial \mathbf{M} (puesto que sus componentes M_x , M_y , M_z cambiarían de signo en la reflexión en los planos $\sigma^{(z)}$, $\sigma^{(x)}$, $\sigma^{(y)}$, respectivamente).

Las propiedades de los cuerpos con momento magnético macroscópico espontáneo no nulo (cuerpos ferromagnéticos) se estudiarán detenidamente en el Cap. V. Para todos los demás cristales, la relación entre \mathbf{B} y \mathbf{H} viene dada (para campos no demasiado intensos) por relaciones lineales

$$B_i = \mu_{ik} H_k, \quad (28.1)$$

que no contienen un término constante independiente. El tensor permeabilidad μ_{ik} es simétrico. Este hecho se sigue de las relaciones termodinámicas que se deducirán en el § 30, exactamente de la misma manera como en el § 13 se demostró la simetría del tensor ϵ_{ik} .

Recordaremos todavía dos fenómenos que, en principio, pueden presentarse. Uno de ellos es el *piezomagnetismo*, que se traduce en la existencia de una relación lineal entre el campo magnético en el cuerpo y la deformación (fenómeno análogo al que se presenta en los materiales piezoeléctricos, véase § 17). El otro es consecuencia de una relación lineal entre los campos magnético y eléctrico en una substancia, relación que conduciría, por ejemplo, a que un campo eléctrico produjera una imanación de la materia proporcional al mismo**. Ambos fenómenos

* Tal como, por ejemplo, la red de la fase ferromagnética del hierro. Desde el punto de vista cristalográfico, constituye una pequeña modificación (a lo largo de uno de los ejes de cuarto orden) de la red cúbica.

** Efectos cuadráticos de este tipo deben existir, en principio, incluso en los cuerpos isótropos, pero carecen de interés dada su insignificancia.

son posibles en determinadas clases de simetría cristalográfica magnética*.

§ 29. Campo magnético de las corrientes continuas

Si por un conductor circula una corriente total diferente de cero, la densidad de corriente media en él puede representarse como suma

$$\rho \mathbf{v} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j}.$$

El primer término, ligado con la imanación del medio, no contribuye a la corriente total, de modo que el transporte de carga neto a través de una sección transversal del cuerpo viene determinado por la integral $\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}$ del segundo término solamente. La magnitud \mathbf{j} se llama *densidad de corriente de conducción*** . Precisamente a ésta se refiere todo lo dicho en el § 20; en particular, la energía disipada por unidad de volumen en la unidad de tiempo es igual a $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$.

La distribución de la corriente \mathbf{j} en el volumen de un conductor se determina por las ecuaciones de que se trató en el § 20, ecuaciones en las cuales no aparece el campo magnético creado por estas mismas corrientes (a condición de que se prescindiera de la influencia del campo sobre las propiedades de conductibilidad del metal en sí). Por ello, el problema de determinar el campo magnético de las corrientes debe resolverse para una distribución dada de estas últimas. Las ecuaciones de este campo difieren de las obtenidas en el § 27 en que el valor cero del segundo miembro de (27.7) se substituye por $\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (29.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c. \quad (29.2)$$

La densidad de corriente de conducción \mathbf{j} , proporcional a la intensidad del campo eléctrico, es una cantidad acotada que en ningún punto toma el valor infinito, en particular tampoco sobre la superficie de separación de dos medios. Precisamente por esto la existencia de un segundo miembro en la ecuación (29.2) no se refleja en la condición de contorno que impone la continuidad de la componente tangencial de \mathbf{H} .

Para resolver las ecuaciones (29.1) y (29.2) conviene introducir el llamado *potencial vector A*, haciendo

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (29.3)$$

* Algunos ejemplos pueden verse en I. E. Dzialoshinskii, ZhETF, **33**, 807 (1957); **37**, 881 (1959).

** En cuanto a la magnitud $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, a veces se le llama *densidad de corriente molecular*. Esta terminología, sin embargo, no corresponde por completo a la imagen puramente física del movimiento de las cargas en un conductor. Así, en un metal contribuyen a la imanación \mathcal{M} no sólo los electrones que se mueven dentro de los átomos, sino también los electrones de conducción.

como resultado de lo cual la ecuación (29.1) queda satisfecha idénticamente. El potencial vector no está todavía determinado unívocamente por la igualdad (29.3). Cabe sumarle un vector arbitrario de la forma $\text{grad } f$ sin que deje de cumplirse (29.3). Debido a esta indeterminación es posible imponer a \mathbf{A} una condición suplementaria, para la que elegiremos la siguiente

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (29.4)$$

La ecuación a que satisface \mathbf{A} se obtiene substituyendo (29.3) en (29.2). Cuando la relación entre \mathbf{B} y \mathbf{H} es lineal, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, se tiene

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = 4\pi\mathbf{j}/c. \quad (29.5)$$

En esta forma la ecuación es válida para cualquier medio, homogéneo o no.

En un medio homogéneo $\mu = \text{const}$ y dado que $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A}$, la ecuación (29.5) toma la forma

$$\Delta\mathbf{A} = -4\pi\mu\mathbf{j}/c. \quad (29.6)$$

Pero si se trata del conjunto de dos o más medios en contacto, cada uno de los cuales posee su permeabilidad μ , la ecuación general (29.5) se reduce a una ecuación de la forma (29.6) dentro de cada uno de los cuerpos homogéneos, mientras que en sus fronteras debe cumplirse la condición de continuidad de la componente tangencial del vector $(1/\mu) \text{rot } \mathbf{A}$. Además, ha de ser continua la componente tangencial del propio vector \mathbf{A} , dado que su discontinuidad significaría que existe sobre la frontera una inducción \mathbf{B} infinita.

Las ecuaciones del campo se simplifican en el caso del problema bidimensional de determinar el campo magnético en un medio ilimitado, supuesto homogéneo en una dirección (que tomaremos como dirección del eje z) y admitiendo que las corrientes que crean dicho campo son paralelas al eje z , de modo que su densidad $j_z = j$ es función solamente de x, y . Haremos la hipótesis plausible (confirmada luego por el resultado) de que el potencial vector del campo es asimismo paralelo al eje z , $A_z = A(x, y)$, (la condición (29.4) queda entonces satisfecha automáticamente) con lo que el campo magnético lo es al plano x, y . Designando por \mathbf{k} el versor correspondiente al eje z , tenemos

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \text{rot } A\mathbf{k} = \text{grad } A \times \mathbf{k}, \\ \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) &= \text{rot} \left(\frac{\text{grad } A}{\mu} \times \mathbf{k} \right) = -\mathbf{k} \text{div} \frac{\text{grad } A}{\mu}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la ecuación (29.5) puede escribirse en la forma

$$\text{div} \frac{\text{grad } A}{\mu} = -\frac{4\pi}{c} j(x, y), \quad (29.7)$$

es decir, obtenemos de hecho una ecuación para la magnitud escalar $A(x, y)$. En el caso de un medio «homogéneo a trozos», (29.7) se reduce a la ecuación

$$\Delta A = -4\pi\mu j(x, y)/c, \quad (29.8)$$

con la condición de contorno de que sean continuas A y $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n}$ sobre cada superficie de separación*.

El campo magnético se determina de manera del todo elemental si la distribución de corrientes es simétrica respecto del eje z : $j_z = j(r)$ (r es la distancia al eje z). Evidentemente, en este caso las líneas de fuerza magnéticas son las circunferencias $r = \text{const}$. El módulo del campo se determina directamente a partir de la fórmula

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}, \quad (29.9)$$

que es la forma integral de la ecuación (29.2). Por lo tanto,

$$H(r) = 2J(r)/cr, \quad (29.10)$$

donde $J(r)$ es la corriente total que atraviesa el círculo $r = \text{const}$.

También es posible reducir la ecuación vectorial (29.5) a una sola ecuación escalar cuando se trata de una distribución de corrientes circulares que presenta simetría axial, es decir, cuando en un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z dicha distribución tiene la forma

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\phi = j(r, z).$$

Para el potencial vector buscaremos una expresión del tipo $A_r = A_z = 0$, $A_\phi = A(r, z)$. En estas condiciones, las componentes de la inducción $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ son

$$B_r = -\partial A / \partial z, \quad B_z = (1/r) \partial(rA) / \partial r, \quad B_\phi = 0,$$

y la componente- ϕ de la ecuación (29.2) da

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} [rA] \right) = -\frac{4\pi}{c} j(r, z). \quad (29.11)$$

Las ecuaciones del campo magnético creado por las corrientes se pueden resolver de manera general en el caso importante en el que es posible prescindir de las

* Hay que observar que el problema bidimensional relativo a un campo magnético constante resulta ser equivalente al problema plano de electrostática que plantea la determinación del campo eléctrico creado por cargas extrañas distribuidas en un medio dieléctrico con densidad $\rho_{ex}(x, y)$. Este último problema exige resolver la ecuación

$$\text{div}(\epsilon \text{ grad } \phi) = -4\pi \rho_{ex},$$

(ϕ es el potencial del campo), que difiere de (29.7) tan sólo en la substitución de $A, j/c, \mu$ por $\phi, \rho_{ex}, 1/\epsilon$, respectivamente. También coinciden las condiciones de contorno para A y para ϕ . Sin embargo, hay una diferencia en la determinación de \mathbf{E} y \mathbf{B} , respectivamente, a partir de ϕ o de A . Los vectores $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ y $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ en cada punto son iguales en módulo, pero perpendiculares entre sí.

propiedades magnéticas del medio, es decir, cuando cabe hacer $\mu \equiv 1$. El potencial vector cumple entonces en todo el espacio la ecuación:

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}/c$$

sin que exista condición de contorno alguna sobre las superficies de separación de los diversos medios (incluida la superficie del conductor por el que circula la corriente). Como es sabido, la solución de esta ecuación que se anula en el infinito es*,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV, \quad (29.12)$$

donde R es la distancia del punto en que se calcula \mathbf{A} (punto de observación) hasta el elemento de volumen dV . Al aplicar la operación rot a esta expresión hay que recordar que la derivación de \mathbf{j}/R bajo el signo de integral debe efectuarse respecto de las coordenadas del punto de observación, coordenadas de las que no depende \mathbf{j} , de modo que

$$\text{rot}(\mathbf{j}/R) = \text{grad}(1/R) \times \mathbf{j} = -\mathbf{R} \times \mathbf{j}/R^3,$$

donde el vector posición \mathbf{R} tiene su origen en dV y su extremo en el punto de observación. De esta manera,

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{R^3} dV. \quad (29.13)$$

Si el conductor por el que circula la corriente es suficientemente delgado (un alambre fino) y si sólo nos interesa el campo en el espacio que lo rodea, cabe prescindir de su grosor. En lo que sigue consideraremos frecuentemente esas llamadas *corrientes lineales*. La integración en el volumen del conductor se substituye en tal caso por una integración a lo largo del mismo. Más precisamente, las fórmulas para las corrientes lineales se obtienen a partir de las fórmulas relativas a las corrientes volumétricas substituyendo en estas últimas

$$\mathbf{j} dV \rightarrow J d\mathbf{l},$$

donde J es la corriente total que circula por el conductor. Así, de las fórmulas (29.12) y (29.13) se deduce

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c} \oint \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad \mathbf{H} = \frac{J}{c} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (29.14)$$

La segunda de estas fórmulas expresa la *ley de Biot y Savart*.

Estas simples fórmulas para el campo magnético de las corrientes lineales no dependen ni tan sólo de la condición de que sea $\mu = 1$. Dado que prescindimos del grosor del conductor, no es necesario imponer condición de contorno alguna sobre su superficie y las propiedades magnéticas del material que lo forma carecen en ab-

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 43.

soluta de importancia (puede incluso tratarse de una sustancia ferromagnética). La solución de la ecuación (29.6) para el campo en el medio que rodea al conductor será, por lo tanto,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu J}{c} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (29.15)$$

cualquiera que sea el valor de la permeabilidad del medio. Así pues, la presencia del medio conduce únicamente a multiplicar por μ la inducción, mientras que en nada varía la intensidad del campo, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$.

El problema de determinar el campo magnético de las corrientes lineales puede resolverse también como problema de la teoría del potencial. Dado que prescindimos del volumen de los conductores, se trata de hecho de determinar el campo en un dominio en el que no existen corrientes (con excepción tan sólo de ciertas líneas singulares, esto es, de las corrientes lineales). Pero cuando no existen corrientes, un campo magnético constante deriva de un potencial escalar que satisface (en un medio homogéneo) la ecuación de Laplace. Entre el potencial de un campo magnético y el potencial de un campo electrostático existe, sin embargo, una diferencia esencial. El potencial de un campo eléctrico es siempre una función uniforme, lo que es consecuencia de que $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ en todo el espacio (en particular, allí donde se encuentran cargas) y, por consiguiente, la variación del potencial a lo largo de un contorno cerrado arbitrario (es decir, la circulación de \mathbf{E} a lo largo de dicho contorno) es igual a cero. En cambio, la circulación del campo magnético a lo largo de un contorno que rodee a una corriente lineal no es nula, sino que es igual a $4\pi J/c$. Por consiguiente, el valor del potencial cambia en esta cantidad cada vez que se rodea una línea de corriente, es decir, el potencial del campo magnético es una función multiforme.

Si un sistema de corrientes se encuentra limitado en una región finita del espacio (y $\mu = 1$ tanto en los conductores como en el medio), lejos de él el potencial vector del campo magnético tiene la forma

$$\mathbf{A} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}/R^3, \quad (29.16)$$

donde

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV/2c \quad (29.17)$$

es el momento magnético total del sistema*.

En el caso de una corriente lineal esta expresión toma la forma

$$\mathcal{M} = J \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l}/2c,$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 44. En la demostración desarrollada allí se utilizó de modo explícito un modelo en que las corrientes son el resultado del movimiento de partículas cargadas individuales. Dicha demostración, naturalmente, tiene carácter general, pero la fórmula (29.16) se puede obtener también por consideraciones puramente macroscópicas (véase el problema 4 de este párrafo).

y puede transformarse en una integral extendida a una superficie limitada por el contorno definido por la corriente. El producto $d\mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ es igual en módulo al área del elemento triangular de superficie construido con los vectores \mathbf{r} y $d\mathbf{l}$. En cuanto al vector integral $\int d\mathbf{f}$, éste no depende de cuál sea precisamente la superficie a la que se extiende (con tal que esté limitada por el contorno dado). Por lo tanto, el momento magnético de una corriente lineal cerrada es igual a

$$\mathcal{M} = J \int d\mathbf{f}/c. \quad (29.18)$$

En particular, para una corriente lineal cerrada plana el momento magnético es igual, simplemente, a JS/c , donde S es el área de la porción de superficie limitada por la corriente.

Para terminar este párrafo, examinemos la cuestión que plantea el flujo de energía en un conductor. La energía disipada en un conductor (en forma de calor de Joule) procede de la energía del campo electromagnético. En el caso estacionario, la «ecuación de continuidad» que expresa la ley de conservación de la energía tiene la forma

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (29.19)$$

donde \mathbf{S} es la densidad de flujo de energía. Ésta viene dada dentro del conductor por la expresión

$$\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi, \quad (29.20)$$

que coincide formalmente con la que da el vector de Poynting para el campo en el vacío. Es fácil comprobarlo de manera directa: el cálculo de $\operatorname{div} \mathbf{S}$ utilizando las ecuaciones $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ y (29.2) conduce a (29.19).

Con independencia de esta demostración, la fórmula (29.20) se sigue de la condición evidente de continuidad de la componente normal de \mathbf{S} sobre la superficie de un cuerpo, si a la vez se tienen en cuenta la continuidad de \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t y el hecho de que la fórmula (29.20) es válida en el vacío, fuera del cuerpo.

PROBLEMAS*

1. Determinar el potencial escalar del campo magnético de una corriente lineal cerrada.

Solución. Transformando la integral de contorno en una integral de superficie extendida a una superficie limitada por aquél, obtendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{J}{c} \oint \frac{d\mathbf{l}}{R} = \frac{J}{c} \int d\mathbf{f} \times \operatorname{grad} \frac{1}{R}, \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{J}{c} \int (d\mathbf{f} \cdot \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \frac{1}{R} \end{aligned}$$

* En los problemas 1-4 se supone $\mu \equiv 1$.

(en las transformaciones hay que tener en cuenta que $\Delta \frac{1}{R} = 0$). Comparando con $\mathbf{B} = -\text{grad } \phi$ se encuentra que el potencial escalar es

$$\phi = \frac{J}{c} \int \mathbf{df} \cdot \text{grad } \frac{1}{R} = -\frac{J}{c} \int \frac{\mathbf{df} \cdot \mathbf{R}}{R^3}.$$

La integral que aquí aparece representa, geoméricamente, el ángulo sólido Ω que subtiende el contorno desde el punto de observación del campo. El carácter multiforme del potencial, que hemos señalado en el texto, se traduce en que cuando el punto de observación describe una trayectoria cerrada que rodea al conductor, el ángulo Ω , que alcanza el valor 2π , cambia de signo y pasa a ser igual a -2π .

2. Determinar el campo magnético de una corriente circular lineal (de radio a).

Solución. · Elijamos como origen de un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z el centro de la circunferencia, contando el ángulo ϕ a partir del plano que pasa por el eje z y por el punto de observación del campo. El potencial vector tiene una sola componente no nula $A_\phi = A(r, z)$ y de acuerdo con la fórmula (29.14) escribiremos

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{J}{c} \oint \frac{\cos \phi \, dl}{R} \\ &= \frac{2J}{c} \int_0^\pi \frac{a \cos \phi \, d\phi}{\sqrt{(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \phi)}} \end{aligned}$$

Introduciendo una nueva variable θ definida por $\phi = \pi + 2\theta$, esta expresión puede llevarse a la forma

$$A_\phi = \frac{4J}{ck} \sqrt{\frac{a}{r}} [(1 - \frac{1}{2}k^2)K - E],$$

donde

$$k^2 = 4ar / [(a+r)^2 + z^2],$$

y K y E son las integrales elípticas completas de primera y segunda especie:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}}, \quad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)} \, d\theta.$$

Para las componentes de la inducción se encuentra:

$$B_\phi = 0,$$

$$B_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = \frac{J}{c} \frac{2z}{r \sqrt{[(a+r)^2 + z^2]}} \left[-K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right],$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = \frac{J}{c} \frac{2}{\sqrt{[(a+r)^2 + z^2]}} \left[K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right].$$

Hemos utilizado aquí las fórmulas

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E-K}{k}$$

cuya validez es fácil comprobar. Sobre el eje ($r = 0$)

$$B_r = 0, \quad B_z = 2\pi a^2 J / c (a^2 + z^2)^{3/2},$$

igualdades que es posible obtener directamente mediante un cálculo elemental.

3. Determinar el campo magnético en una cavidad cilíndrica longitudinal practicada en un conductor cilíndrico (de longitud infinita) a lo largo del cual circula una corriente distribuida uniformemente en toda su sección (fig. 17).

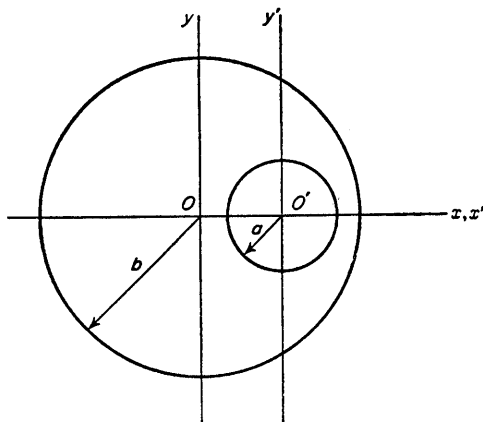


FIG. 17

Solución. Si no existiera la perforación, el campo dentro del cilindro sería igual a

$$H'_x = -2\pi jy/c, \quad H'_y = 2\pi jx/c$$

(la notación correspondiente a las diferentes dimensiones y a los ejes de coordenadas se da en la figura).

Si por el cilindro interior circula una corriente de densidad $-j$, ésta determinaría en el mismo punto de observación un campo

$$H''_x = 2\pi jy'/c, \quad H''_y = -2\pi jx'/c.$$

El campo que se busca en el hueco cilíndrico se obtiene componiendo estos dos campos. Observando que $x-x' = OO' = h$, $y = y'$, se encuentra

$$H_x = 0, \quad H_y = 2\pi jh/c = 2hj/(b^2 - a^2)c,$$

es decir, el campo es homogéneo en la dirección del eje y .

4. Partiendo de la fórmula (29.12), deducir la fórmula (29.16) para el potencial vector de un campo lejos de las corrientes.

Solución. Hagamos $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, donde \mathbf{R}_0 y \mathbf{r} son los vectores posición desde el origen de coordenadas, situado en un punto cualquiera del dominio ocupado por las corrientes, al punto de observación y al elemento de volumen dV , respectivamente. Desarrollando el integrando en potencias de \mathbf{r} teniendo en cuenta que $\int \mathbf{j} dV = 0$, obtendremos

$$A_i \cong (R_k/cR^3) \int x_k j_i dV.$$

(hemos prescindido del subíndice 0 en R). Integrando por partes la identidad

$$\int x_i x_k \operatorname{div} \mathbf{j} dV = 0$$

obtendremos

$$\int (j_i x_k + j_k x_i) dV = 0.$$

Por lo tanto, cabe escribir A_i también en la forma

$$A_i = (R_k/2cR^3) \int (x_k j_i - x_i j_k) dV,$$

que coincide con (29.16).

5. Determinar el campo magnético creado por una corriente lineal en un medio anisótropo por sus propiedades magnéticas (A. S. Viglin).

Solución. En un medio anisótropo que rodea a un conductor tenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_{ik} \partial H_k / \partial x_i = 0, \quad (1)$$

donde μ_{ik} es el tensor permeabilidad del medio. En vez de introducir el potencial vector según la fórmula $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, emplearemos aquí otro vector, \mathbf{C} , definido por la fórmula

$$H_i = e_{ikl} \mu_{km} \partial C_l / \partial x_m, \quad (2)$$

(e_{ikl} es el tensor unidad antisimétrico); la ecuación (1) queda también satisfecha idénticamente por la expresión (2). Al vector \mathbf{C} así definido se puede imponer todavía una condición suplementaria:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \equiv \partial C_i / \partial x_i = 0. \quad (3)$$

Substituyendo (2) en la ecuación $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, se encuentra

$$e_{ikl} \partial H_l / \partial x_k = -\mu_{kp} \partial^2 C_l / \partial x_k \partial x_p = 4\pi j_l / c$$

(en la transformación se ha utilizado la igualdad

$$e_{ikl} e_{lmn} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}$$

y la condición (3)). La ecuación obtenida de este modo para el vector \mathbf{C} coincide en su forma con la ecuación del potencial de un campo eléctrico creado por cargas en un medio anisótropo (problema (2 § 13). Su solución tiene la forma

$$\mathbf{C} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} dV}{\sqrt{(|\mu| \mu^{-1}_{ik} R_i R_k)}},$$

($|\mu|$ es el determinante del tensor μ_{ik} , \mathbf{R} el vector posición desde el punto de observación al elemento dV). Pasando a una corriente lineal, resulta finalmente

$$\mathbf{C} = \frac{J}{c \sqrt{|\mu|}} \oint \frac{d\mathbf{l}}{\sqrt{(\mu^{-1}_{ik} R_i R_k)}}.$$

§ 30. Relaciones termodinámicas en un campo magnético

En su forma final, conforme veremos, las relaciones termodinámicas para una substancia magnética en un campo magnético son muy parecidas a las relaciones análogas para un dieléctrico en un campo eléctrico. La manera de deducirlas, sin embargo, difiere esencialmente de la adoptada en el § 10. Esta diferencia se debe, en último término, a que el campo magnético, en contraste con el eléctrico, no efectúa trabajo sobre las cargas que se mueven en él (dado que la fuerza que actúa sobre una carga es perpendicular a su velocidad). Por ello, para calcular la variación de energía del medio cuando se introduce en él un campo magnético hay que considerar los campos eléctricos inducidos al cambiar el campo magnético y determinar el trabajo realizado por ellos sobre las corrientes (fuentes del campo magnético).

Es necesario, por consiguiente, aplicar la ecuación que determina la relación que existe entre un campo eléctrico y uno magnético variable. Esta ecuación,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (30.1)$$

es resultado directo de promediar la ecuación microscópica (1.3).

Durante el tiempo δt el campo \mathbf{E} realiza sobre las corrientes \mathbf{j} un trabajo igual a

$$\delta t \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV.$$

Esta misma cantidad, tomada con signo cambiado, es el trabajo δR efectuado «sobre el campo» por la fuerza electromotriz externa, que es la fuente que mantiene la circulación de las corrientes. Haciendo $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}$, obtendremos

$$\begin{aligned} \delta R &= -\delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} dV \\ &= \delta t \frac{c}{4\pi} \int \text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV - \delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} dV. \end{aligned}$$

La primera integral, transformada en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada, se anula. En la segunda integral substituyamos en vez de $\text{rot } \mathbf{E}$ la expresión (30.1), e introduciendo el cambio de la inducción magnética $\delta \mathbf{B} = \delta t \partial \mathbf{B} / \partial t$, obtenemos en definitiva

$$\delta R = \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV / 4\pi. \quad (30.2)$$

Por su aspecto, esta fórmula es del todo análoga a la expresión (10.2) para el trabajo en una variación infinitesimal del campo eléctrico. Hay que observar, sin embargo, que la analogía física entre estas dos fórmulas no es en realidad tan profunda, puesto que \mathbf{H} , en contraste con \mathbf{E} , no es el valor medio de la intensidad microscópica del campo.

Después de obtener la fórmula (30.2), todas las relaciones termodinámicas para una substancia magnética en un campo magnético pueden escribirse de manera por completo análoga a como se escribieron en el § 10 para un dieléctrico en un campo eléctrico; basta substituir en ellas los símbolos \mathbf{E} y \mathbf{D} por \mathbf{H} y \mathbf{B} , respectivamente. Con vistas a futuras referencias, escribiremos algunas de estas fórmulas. Para las diferenciales de las energías totales libre e interna se tiene:

$$\delta \mathcal{F} = -\mathcal{S} \delta T + \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV / 4\pi, \quad (30.3)$$

$$\delta \mathcal{U} = T \delta \mathcal{S} + \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV / 4\pi,$$

y para estas mismas magnitudes referidas a la unidad de volumen:

$$\begin{aligned} dF &= -S dT + \zeta d\rho + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} / 4\pi, \\ dU &= T dS + \zeta d\rho + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} / 4\pi. \end{aligned} \quad (30.4)$$

Junto con F , U necesitaremos también los potenciales termodinámicos

$$\tilde{U} = U - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/4\pi, \quad \tilde{F} = F - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/4\pi, \quad (30.5)$$

para los que

$$\begin{aligned} d\tilde{F} &= -SdT + \zeta d\rho - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}/4\pi, \\ d\tilde{U} &= TdS + \zeta d\rho - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}/4\pi. \end{aligned} \quad (30.6)$$

En el caso de la relación lineal $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, se pueden escribir las expresiones de todas estas magnitudes en forma finita:

$$\begin{aligned} U &= U_0(S, \rho) + B^2/8\pi\mu, & F &= F_0(T, \rho) + B^2/8\pi\mu, \\ \tilde{U} &= U_0(S, \rho) - \mu H^2/8\pi, & \tilde{F} &= F_0(T, \rho) - \mu H^2/8\pi. \end{aligned} \quad (30.7)$$

El trabajo δR (o lo que es lo mismo, la variación δF a temperatura constante) cabe expresarlo en otra forma, a saber, en función de la densidad de corriente y del potencial vector del campo magnético. Para esto supondremos $\delta\mathbf{B} = \text{rot } \delta\mathbf{A}$ y escribiremos

$$\begin{aligned} (\delta\mathcal{F})_T &= \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \text{rot } \delta\mathbf{A} dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\mathbf{H} \times \delta\mathbf{A}) dV + \frac{1}{4\pi} \int \delta\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} dV. \end{aligned}$$

De nuevo la primera integral se anula y la segunda da

$$(\delta\mathcal{F})_T = \int \mathbf{j} \cdot \delta\mathbf{A} dV/c. \quad (30.8)$$

Mediante una transformación análoga es posible obtener

$$(\delta\mathcal{F})_T = - \int \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{j} dV/c. \quad (30.9)$$

Conviene observar que en el formalismo matemático de la electrodinámica macroscópica, las corrientes, fuentes del campo magnético, representan un papel análogo al de los potenciales (y no al de las cargas) de las fuentes del campo eléctrico. Esta regla queda claramente de manifiesto al comparar las fórmulas (30.8) y (30.9) con las fórmulas correspondientes en un campo eléctrico:

$$(\delta\mathcal{F})_T = \int \phi \delta\rho dV, \quad (\delta\mathcal{F})_T = - \int \rho \delta\phi dV \quad (30.10)$$

(véase (10.13), (10.14)). Vemos, pues, que las cargas y los potenciales aparecen en estas fórmulas en un orden que es el opuesto en comparación con el de las corrientes y los potenciales en las fórmulas (30.8), (30.9).

Dada la coincidencia formal completa de las relaciones termodinámicas (expresadas en función de la intensidad del campo y de la inducción) para los campos

eléctrico y magnético, las desigualdades termodinámicas obtenidas en el § 18 se aplican directamente también al campo magnético. Vimos, en particular, que de ellas se sigue la desigualdad $\epsilon > 0$. En el caso eléctrico esta desigualdad carecía de interés, dado que es menos restrictiva que la condición $\epsilon > 1$ que se sigue a partir de otros razonamientos. Pero en el caso magnético la desigualdad análoga

$$\mu > 0$$

es muy importante, ya que constituye la única limitación que se impone a los valores posibles de la permeabilidad.

§ 31. Energía libre total de una substancia magnética

En el § 11 se obtuvieron expresiones para la energía libre total \mathcal{F} de un dieléctrico en un campo eléctrico. Una de las propiedades termodinámicas de esta magnitud consiste en que su variación determina el trabajo efectuado por el campo eléctrico sobre el cuerpo cuando se mantienen constantes las fuentes que crean este campo (las cargas). En un campo magnético, el correspondiente papel lo representa, en cambio, la energía libre \mathcal{F} , puesto que si se dan las fuentes del campo (las corrientes), es precisamente su variación la que da el trabajo realizado sobre el cuerpo.

El razonamiento que sigue a continuación es por completo análogo al que se desarrolló en el § 11. La magnitud «total» \mathcal{F} la definimos por

$$\mathcal{F} = \int \left(\tilde{F} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} \right) dV, \quad (31.1)$$

donde \mathfrak{H} es el campo magnético que crearían las fuentes dadas si no hubiera el medio magnetizable. El signo $+$ en el paréntesis (en vez del signo $-$ en (11.1)) se debe a que el valor de \mathcal{F} para el campo magnético en el vacío es $-\int \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} dV$ (véase (30.7)). La integración en (31.1) se extiende a todo el espacio, incluido el volumen ocupado por los conductores por los que circulan las corrientes que crean el campo*.

Calculemos la variación de \mathcal{F} (para una temperatura dada y sin perturbar el equilibrio termodinámico del medio) cuando se varía infinitamente poco el campo.

Dado que $\delta\mathcal{F} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{H}$, tenemos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= -\int (\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{H} - \mathfrak{H} \cdot \delta\mathfrak{H}) dV / 4\pi \\ &= -\int (\mathbf{H} - \mathfrak{H}) \cdot \delta\mathfrak{H} dV / 4\pi - \int \mathbf{B} \cdot (\delta\mathbf{H} - \delta\mathfrak{H}) dV / 4\pi - \int (\mathbf{B} - \mathbf{H}) \cdot \delta\mathfrak{H} dV / 4\pi. \end{aligned} \quad (31.2)$$

* En el § 11 supusimos que la integración en (11.1) se extiende a todo el espacio, excluido el volumen que ocupan los conductores cargados que crean el campo. En dicho caso fue posible proceder así porque dentro de un conductor cargado no existe campo eléctrico. En cambio, sí existe un campo magnético dentro de los conductores por los que circulan corrientes y es imposible prescindir de él en los cálculos de la energía libre total.

Introduciendo el potencial vector \mathfrak{A} del campo \mathfrak{H} , escribiremos en el primer término

$$\begin{aligned}(\mathbf{H}-\mathfrak{H}) \cdot \delta \mathfrak{H} &= (\mathbf{H}-\mathfrak{H}) \cdot \operatorname{rot} \delta \mathfrak{A} \\ &= \operatorname{div} [\delta \mathfrak{A} \cdot (\mathbf{H}-\mathfrak{H})] + \delta \mathfrak{A} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{H}-\mathfrak{H}).\end{aligned}$$

Pero los campos \mathbf{H} y \mathfrak{H} son, por definición, los creados por el mismo sistema de corrientes \mathbf{j} cuya distribución en el volumen de los conductores no depende (véase § 29) del campo creado por ellas mismas, es decir, es independiente de que existan o no sustancias magnéticas en el espacio en torno. Por ello, \mathbf{H} y \mathfrak{H} satisfacen las mismas ecuaciones $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, de forma que $\operatorname{rot} (\mathbf{H}-\mathfrak{H}) = 0$.

En cuanto a la integral de $\operatorname{div} [\delta \mathfrak{A} \cdot (\mathbf{H}-\mathfrak{H})]$, ésta se transforma en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada y se reduce a cero.

De modo análogo es fácil comprobar que es también igual a cero el segundo término de (31.2), de modo que

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{F} &= - \int (\mathbf{B}-\mathbf{H}) \cdot \delta \mathfrak{H} dV / 4\pi \\ &= - \int \mathbf{M} \cdot \delta \mathfrak{H} dV.\end{aligned}\quad (31.3)$$

De esta manera hemos obtenido para $\delta \mathcal{F}$ una expresión exactamente análoga a la expresión (11.3) para $\delta \mathcal{F}$ en el caso de un campo eléctrico. En particular, de un campo magnético exterior homogéneo se tiene para $d\mathcal{F}$ una expresión que es análoga a la (11.5):

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{J} dT - \mathcal{M} \cdot d\mathfrak{H}, \quad (31.4)$$

donde \mathcal{M} es el momento magnético total del cuerpo.

Sin repetir los cálculos que seguirían, escribiremos las fórmulas finales por analogía con las fórmulas del § 11. En el caso de que valga la relación lineal $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, se tiene

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(V, T) = - \int \frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \mathbf{M} dV. \quad (31.5)$$

En particular, en un campo exterior homogéneo

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(V, T) = -\frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \mathcal{M}. \quad (31.6)$$

En el caso general de una dependencia arbitraria de \mathbf{B} respecto de \mathbf{H} , para el cálculo de \mathcal{F} puede utilizarse la fórmula

$$\mathcal{F} = \int \left(\tilde{F} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathfrak{H} \right) dV = \int \left(F - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathfrak{H} \right) dV. \quad (31.7)$$

En el § 11 se dieron también las fórmulas simplificadas correspondientes al caso de susceptibilidad eléctrica pequeña. El caso análogo para un campo magnético es particularmente importante debido a que, conforme se recordó, la susceptibilidad magnética de la mayoría de los cuerpos es pequeña. En estas condiciones se tiene

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2}\chi \int \mathcal{H}^2 dV. \quad (31.8)$$

Para un campo magnético cabe obtener también resultados análogos a los del § 14. Se trata de la variación de las magnitudes termodinámicas de una substancia magnética cuando se modifica infinitamente poco su permeabilidad magnética μ ; las fuentes del campo se suponen constantes. Por todo lo dicho más arriba, está claro que en vez de la variación de \mathcal{F} (como en el § 14) hay que considerar ahora la variación de \mathcal{F} . No repetiremos aquí el razonamiento, que es análogo al que condujo a la fórmula (14.1). El resultado a que se llega es precisamente el mismo:

$$\delta \mathcal{F} = - \int \delta \mu H^2 dV / 8\pi. \quad (31.9)$$

En el § 14, y basándonos en esta fórmula, se dedujo que la susceptibilidad eléctrica de la materia es positiva. En el caso de una substancia magnética, sin embargo, no cabe llegar a tal conclusión, y la susceptibilidad magnética puede ser positiva o negativa. La causa de esta diferencia esencial estriba en que el hamiltoniano del sistema de las cargas en movimiento en un campo magnético contiene junto a términos lineales respecto del campo (como en el caso eléctrico), términos cuadráticos. Por ello, al determinar la variación de la energía libre de un cuerpo en un campo magnético mediante la teoría de perturbaciones según la fórmula (14.2), contribuirán a la misma no sólo los términos de segunda aproximación, sino también los términos de primera. En estas condiciones es imposible llegar a conclusión alguna acerca del signo de la variación; en los cuerpos paramagnéticos es positiva, y en los diamagnéticos, negativa.

En el párrafo 14 se llegó a ciertas conclusiones relativas a la dirección del movimiento de los cuerpos en un campo eléctrico. Conclusiones análogas se siguen también de la fórmula (31.9). Sin embargo, teniendo en cuenta que μ puede ser mayor o menor que 1, la dirección del movimiento de los cuerpos en un campo magnético no es la misma para todos. Así, en un campo cuasihomogéneo los cuerpos paramagnéticos ($\mu > 1$) se desplazan en el sentido en que aumenta la intensidad del campo, mientras que los cuerpos diamagnéticos ($\mu < 1$) se mueven en el sentido en que disminuye H .

§ 32. Energía de un sistema de corrientes

Consideremos un sistema de conductores por los que circulan corrientes. Se supondrá que ni los propios conductores, ni el medio en que se encuentran son ferromagnéticos, de modo que en todo el espacio es $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Según el § 30, la energía

libre total del sistema se expresa en función del campo magnético creado por las corrientes mediante la igualdad

$$\mathcal{F} = \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV / 8\pi. \quad (32.1)$$

Se ha prescindido aquí del valor \mathcal{F}_0 , que es constante (para una temperatura dada de los cuerpos) y nada tiene que ver con las corrientes. La integración en (32.1) se extiende a todo el espacio, tanto al interior como al exterior de los cuerpos.

Esta misma energía se puede expresar también en función de las corrientes mediante la integral

$$\mathcal{F} = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV / 2c \quad (32.2)$$

(cf. el paso de (30.2) a (30.8)). La integración se extiende aquí solamente al volumen de los conductores, puesto que fuera de ellos es $\mathbf{j} = 0$.

En virtud del carácter lineal de las ecuaciones del campo, el campo magnético puede representarse como suma de los campos que crearían cada una de las corrientes por separado si por los demás conductores no circulara corriente: $\mathbf{H} = \sum \mathbf{H}_a$. Entonces la energía libre total (32.1) toma la forma

$$\mathcal{F} = \sum_a \mathcal{F}_{aa} + \sum_{a>b} \mathcal{F}_{ab}, \quad (32.3)$$

donde

$$\mathcal{F}_{aa} = \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_a dV / 8\pi, \quad \mathcal{F}_{ab} = \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_b dV / 4\pi \quad (32.4)$$

(al hacer $\mathcal{F}_{ab} = \mathcal{F}_{ba}$ se ha tenido en cuenta que $\mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_b = \mu \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b = \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{B}_a$, donde μ es la permeabilidad magnética en cada punto del espacio). La magnitud \mathcal{F}_{aa} se puede llamar *energía libre propia* de la corriente en el a -ésimo conductor, y \mathcal{F}_{ab} , la *energía de interacción* de los conductores a y b . No hay que perder de vista, dicho sea de paso, que esta terminología tiene un sentido literal solamente si se prescinde de las propiedades magnéticas tanto de los propios conductores como del medio. En el caso contrario, el campo (y, por consiguiente, también la energía) de cada corriente depende también de la posición y de la permeabilidad de los demás conductores.

Las magnitudes (32.4) se pueden expresar asimismo en función de las corrientes \mathbf{j}_a en cada uno de los conductores, y de acuerdo con la fórmula (32.2) se tiene:

$$\mathcal{F}_{aa} = \int \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{A}_a dV_a / 2c, \quad \mathcal{F}_{ab} = \int \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{A}_b dV_a / c = \int \mathbf{j}_b \cdot \mathbf{A}_a dV_b / c. \quad (32.5)$$

La integral en \mathcal{F}_{aa} se extiende aquí únicamente al volumen del a -ésimo conductor y \mathcal{F}_{ab} se representa por una cualquiera de las dos expresiones, en las que la integración se extiende al volumen del conductor a o b , respectivamente.

Para una ley dada de distribución de la densidad de corriente en el volumen del conductor, el valor de \mathcal{F}_{aa} depende solamente de la intensidad total de la corriente J_a que atraviesa una sección transversal del mismo. En estas condiciones, a J_a serán

proporcionales tanto la densidad \mathbf{j} como el campo creado por la corriente. En consecuencia, la integral \mathcal{F}_{aa} será proporcional a J_a^2 . Se suele escribir en la forma

$$\mathcal{F}_{aa} = L_{aa} J_a^2 / 2c^2, \quad (32.6)$$

donde L_{aa} es el llamado *coeficiente de autoinducción* (o *autoinductancia*) del conductor. De manera análoga, la energía de interacción de dos corrientes es proporcional al producto $J_a J_b$:

$$\mathcal{F}_{ab} = L_{ab} J_a J_b / c^2. \quad (32.7)$$

La magnitud L_{ab} se llama *coeficiente de inducción mutua* (o *inductancia mutua*) de los conductores. Así pues, la energía libre total del sistema de corrientes vale

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c^2} \sum_a L_{aa} J_a^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{a>b} L_{ab} J_a J_b = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} J_a J_b. \quad (32.8)$$

La condición de que esta forma cuadrática sea definida positiva impone toda una serie de limitaciones a los valores de los coeficientes. En particular, todos los $L_{aa} > 0$, y

$$L_{aa} L_{bb} > L_{ab}^2.$$

El cálculo de la energía de las corrientes en el caso general de conductores cualesquiera que ocupan un volumen exige la resolución completa de las ecuaciones del campo y plantea un difícil problema. Éste se simplifica si la permeabilidad de los conductores y del medio se pueden tomar iguales a la unidad. Obsérvese que, en estas condiciones, la energía de las corrientes deja por completo de depender del estado termodinámico (en particular de la temperatura) de los cuerpos y que, por ello, en todas las fórmulas que preceden es posible hablar con igual derecho tanto de energía libre como de energía, simplemente.

Para $\mu = 1$ el potencial vector del campo creado por las corrientes \mathbf{j} viene dado por la fórmula (29.12). Por lo tanto, para la energía propia del conductor obtendremos

$$\mathcal{F}_{aa} = \frac{1}{2c^2} \int \int \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}'}{R} dV dV', \quad (32.9)$$

donde ambas integrales se extienden al volumen del conductor dado y R es la distancia entre dV y dV' . De manera análoga, la energía de interacción de dos conductores se escribe

$$\mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} \int \int \frac{\mathbf{j}_a \cdot \mathbf{j}_b}{R} dV_a dV_b, \quad (32.10)$$

donde dV_a y dV_b son elementos de volumen de cada uno de los conductores.

De manera particularmente simple se calcula la energía de interacción de dos corrientes lineales. El paso de las corrientes volumétricas a las lineales en la fór-

mula (32.10) se lleva a cabo substituyendo $\mathbf{j}_a dV_a$ y $\mathbf{j}_b dV_b$ por $J_a d\mathbf{l}_a$ y $J_b d\mathbf{l}_b$, respectivamente, y encontramos así que el coeficiente de inducción mutua es

$$L_{ab} = \oint \oint d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b / R.$$

En esta aproximación, por consiguiente, L_{ab} depende tan sólo de la forma, de las dimensiones y de la posición relativa de los dos circuitos y es independiente de la distribución de la corriente por la sección de los conductores. Hay que subrayar que para obtener esta simple fórmula en el caso de los conductores lineales no es necesario ni tan sólo suponer que en todo el espacio es $\mu = 1$. En la aproximación en la que prescindimos del grosor de los conductores, las propiedades magnéticas del material que los constituye no influyen en absoluto sobre el campo creado por ellos y, por lo tanto, tampoco sobre su energía mutua. Por otra parte, si la permeabilidad μ del medio que rodea al conductor es diferente de 1, según (29.15) ella multiplica simplemente por μ el potencial vector (y con él también la inducción) del campo magnético. Por el mismo factor queda multiplicado también, en consecuencia, el coeficiente de inducción mutua, de modo que será

$$L_{ab} = \mu \oint \oint d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b / R. \quad (32.11)$$

En lo que concierne al coeficiente de autoinducción de los conductores lineales, su cálculo presenta dificultades considerablemente mayores; esta cuestión se estudiará en el párrafo siguiente.

La energía total de un sistema de corrientes lineales puede escribirse aún de otra manera. Para ello volvamos a la integral (32.2), que para las corrientes lineales toma la forma

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_a, \quad (32.12)$$

donde \mathbf{A} es el potencial vector del campo total en el elemento $d\mathbf{l}_a$ del a -ésimo conductor. El error principal que nos permitimos al pasar de (32.2) a (32.12) consiste en prescindir de la variación del campo (incluido el campo propio de la corriente dada) en la sección transversal del conductor. Cada una de las integrales curvilíneas que aparecen en (32.12) se transforma en una integral de superficie:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_a = \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f}_a = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}_a,$$

es decir, representa el flujo de inducción magnética (o, como suele decirse, el *flujo magnético*) a través del circuito de la a -ésima corriente. Designaremos este flujo por Φ_a . De esta manera,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \Phi_a. \quad (32.13)$$

De modo análogo se expresa en función del flujo magnético la energía libre \mathcal{F} de una corriente lineal J colocada en un campo magnético exterior, es decir, la energía en la que no se incluye la energía propia de las fuentes del campo. Evidentemente,

$$\mathcal{F} = J\Phi/c, \quad (32.14)$$

donde Φ es el flujo del campo exterior a través del circuito de la corriente J . Si dicho campo es homogéneo (y en el medio se tiene $\mu = 1$), será $\Phi = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$. Introduciendo el momento magnético de la corriente según (29.18), obtendremos $\mathcal{F} = \mathcal{M} \cdot \mathbf{H}$.

Conocida la energía del sistema de corrientes en función de sus dimensiones, de su forma y de su posición relativa, es posible determinar las fuerzas que actúan sobre los conductores sin más que derivar respecto de las correspondientes coordenadas. Sin embargo, se plantea al hacerlo la cuestión de cuáles sean las características de las corrientes que hay que suponer constantes en la derivación. Lo más conveniente es efectuar el cálculo en el supuesto de que las corrientes son constantes. Pero en este caso el papel de energía libre lo representa la magnitud \mathcal{F} . Por ello, la fuerza generalizada F_q que actúa «a lo largo de» la coordenada generalizada q es

$$F_q = -(\partial \mathcal{F} / \partial q)_{J,T}.$$

Los subíndices en la derivada significan que al derivar se han supuesto constantes las intensidades de la corriente y la temperatura de los cuerpos. Dado que en la energía libre prescindimos de la parte constante que no depende de las corrientes, \mathcal{F} y \mathcal{F} difieren tan sólo en el signo, de modo que

$$F_q = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\right)_J = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\right)_J = \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} J_a J_b \frac{\partial L_{ab}}{\partial q} \quad (32.15)$$

(prescindimos del índice T en las derivadas, aquí y en lo que sigue, para abreviar).

En particular, las fuerzas que actúan sobre un conductor debidas a su propio campo magnético se determinan mediante la fórmula

$$F_q = \frac{1}{2c^2} J^2 \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (32.16)$$

donde L es la autoinducción del conductor. El carácter de la acción de estas fuerzas resulta evidente en virtud de las consideraciones que siguen. Para un valor dado de la intensidad de la corriente (y de la temperatura), la magnitud \mathcal{F} tiende a un mínimo. Dado que, en el caso presente, es $\mathcal{F} = -LJ^2/2c^2$, esto significa que las fuerzas que actúan sobre el conductor tenderán a aumentar su coeficiente de autoinducción. Pero éste, como magnitud que tiene las dimensiones de una longitud, es proporcional al tamaño del conductor. Así pues, éste aumenta bajo la acción del campo magnético.

Para una corriente en un campo magnético exterior tenemos*:

$$\mathcal{F} = -\mathcal{F} = -\mathcal{M} \cdot \mathbf{H}. \quad (32.17)$$

En todas las fórmulas que preceden relativas a la energía se supone que la relación entre la inducción y la intensidad del campo magnético es lineal. En el caso general de una relación arbitraria, cabe establecer relaciones diferenciales análogas. La variación de la energía libre cuando se cambia infinitamente poco el campo (manteniendo constante la temperatura) es, según (30.8),

$$\delta \mathcal{F} = \iint \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A} \, dV/c$$

o bien, para un sistema de corrientes lineales

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{c} \sum_a J_a \oint \delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_a.$$

Procediendo luego de igual modo que al pasar de (32.12) a (32.13), obtendremos

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{c} \sum_a J_a \delta \Phi_a. \quad (32.18)$$

De manera análoga, a partir de (30.9) se encuentra

$$\delta \mathcal{F} = -\frac{1}{c} \sum_a \Phi_a \delta J_a. \quad (32.19)$$

Cabe decir, por lo tanto, que, para un sistema de corrientes lineales, \mathcal{F} es el potencial termodinámico respecto de los flujos magnéticos, y \mathcal{F} , respecto de las intensidades de las corrientes, estando ligados estos dos potenciales entre sí por la igualdad

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} - \frac{1}{c} \sum_a J_a \Phi_a. \quad (32.20)$$

Así pues, cualesquiera que sean las propiedades magnéticas del material, son válidas las igualdades termodinámicas

$$J_a/c = \partial \mathcal{F} / \partial \Phi_a, \quad \Phi_a/c = -\partial \mathcal{F} / \partial J_a. \quad (32.21)$$

Si se aplican estas fórmulas al caso de una relación lineal, cuando \mathcal{F} viene dado por la fórmula (32.8), se obtendrá

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} J_b. \quad (32.22)$$

* El hecho de que aquí, en comparación con la fórmula (31.6), no aparezca el factor 1/2 se debe a que el momento magnético de la corriente en (32.17) es una cantidad constante, independiente del campo, mientras que el momento magnético en (31.6) se produce sólo debido a la acción del campo.

En consecuencia, las inductancias resultan ser los coeficientes de proporcionalidad entre los flujos magnéticos y las intensidades de las corrientes que determinan el campo magnético. El producto $L_{ab}J_b/c$ es el flujo magnético creado por la corriente J_b ($b \neq a$) a través del circuito de la corriente J_a , y $L_{aa}J_a/c$, el flujo a través del mismo circuito determinado por la propia corriente J_a .

§ 33. Autoinductancia de los conductores lineales

Al calcular el coeficiente de autoinducción de un conductor lineal es imposible prescindir por completo de su grosor, en contraste con lo que hicimos al calcular la inductancia mutua de dos conductores. Si procediéramos del mismo modo, a partir de (32.9) obtendríamos la autoinducción en la forma

$$L = \oint \oint d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}' / R,$$

donde ambas integrales se extienden a un mismo contorno; pero esta integral diverge logarítmicamente cuando $R \rightarrow 0$.

El valor exacto de la autoinductancia de un conductor depende de la distribución de corrientes en él, distribución que puede ser diferente según sea la manera como se excita la corriente, es decir, de cómo se le aplica la fuerza electromotriz. Pero, con un grado bastante elevado de precisión, la autoinducción de un conductor lineal resulta ser independiente de la ley de distribución de la corriente en una sección transversal del mismo*.

Representemos la autoinducción como suma $L = L_e + L_i$, donde L_e y L_i están ligadas con la energía del campo magnético fuera y dentro del conductor, respectivamente. En un conductor lineal, la parte más importante de la autoinducción está constituida por la componente «exterior» L_e , lo que se debe a que la mayor parte de la energía magnética de un circuito lineal cerrado está localizada en el campo fuera del conductor a distancias que son grandes en comparación con su grosor. En efecto, la energía por unidad de longitud de un alambre rectilíneo de longitud infinita viene dada por la integral

$$(\mu_e/8\pi) \int H^2 \cdot 2\pi r dr = (\mu_e/8\pi) \int (2J/cr)^2 \cdot 2\pi r dr = (\mu_e J^2/c^2) \int dr/r$$

(r es la distancia a partir del eje del alambre y μ_e es la permeabilidad del medio exterior). Esta integral diverge logarítmicamente para valores grandes de r . En el caso de un circuito lineal cerrado esta divergencia, claro está, desaparece: la integral «se corta» a distancias que son del orden de magnitud de las dimensiones del circuito. Obtendremos un valor aproximado de la energía multiplicando la integral

* Más exactamente, de las distribuciones en las que la densidad de corriente se mantiene prácticamente constante a distancias comparables con el grosor a del alambre. Pero si la distribución es tal que la densidad de corriente varía apreciablemente a distancias pequeñas en comparación con a (como ocurre, por causas especiales, en el llamado *efecto pelicular* o en los superconductores), varía la autoinductancia del conductor.

que precede por la longitud total l del conductor y tomando como límite superior el valor l , y como límite inferior, el radio a del alambre:

$$(\mu_e J^2 l / c^2) \ln(l/a).$$

De aquí se sigue para la autoinductancia

$$L = 2\mu_e l \ln(l/a). \quad (33.1)$$

Esta expresión posee, como suele decirse, una *precisión logarítmica*; su error relativo es del orden de magnitud de $1/\ln(l/a)$ y la razón l/a se supone suficientemente grande como para que también su logaritmo sea un número grande*.

Un caso particular de conductores lineales es el de los *solenoides*, en los que un alambre se enrolla en hélice con espiras consecutivas muy próximas entre sí. Prescindiendo del grosor del hilo y de las distancias entre cada dos espiras, obtendremos simplemente una superficie conductora cilíndrica por la que circula una corriente

«superficial». La ecuación $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ dentro del alambre se substituye aquí simplemente por la condición de contorno

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 4\pi \mathbf{g} / c, \quad (33.2)$$

donde \mathbf{g} es la densidad de corriente superficial, \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 la intensidad del campo a uno y otro lado de la superficie del solenoide y \mathbf{n} es la normal orientada hacia el medio 2 (cf. la deducción de la fórmula (27.14)).

Si el solenoide es un cilindro infinito, el campo que crea se determina de manera muy simple. Las corrientes superficiales son circulares y su densidad $\mathbf{g} = n\mathbf{J}$, donde J es la corriente que circula por el alambre y n es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide. El campo fuera del cilindro es igual a cero y en su interior se tiene un campo homogéneo dirigido a lo largo del eje del cilindro e igual a

$$H = 4\pi n J / c.$$

En efecto, dicho campo satisface evidentemente las ecuaciones $\text{div } \mathbf{H} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ en todo el espacio exterior a la superficie conductora y también la condición de contorno (33.2) sobre la misma.

De acuerdo con esto, la energía del campo referida a la unidad de longitud del cilindro es

$$\mu_e H^2 \pi b^2 / 8\pi = 2\pi^2 n^2 b^2 \mu_e J^2 / c^2$$

(b es el radio del cilindro, μ_e se refiere al medio dentro del solenoide). Prescindiendo de las deformaciones del campo en los extremos, se puede aplicar esta fórmula

* Lo dicho anteriormente acerca de la independencia de la autoinducción respecto de la distribución de la corriente se refiere, en realidad, no sólo a la expresión aproximada (33.1), sino también a la aproximación siguiente, en la que se tienen en cuenta términos que no contienen un logaritmo grande (lo que equivale a multiplicar el argumento l/a del logaritmo por un cierto coeficiente); véanse los problemas de este párrafo.

también a un solenoide de longitud grande (en comparación con b), pero finita, h . Entonces para la autoinductancia se obtiene

$$L = 4\pi^2 n^2 b^2 h \mu_e = 2\pi \mu_e n b l, \quad (33.3)$$

donde $l = 2\pi b n h$ es la longitud total del alambre en el solenoide. El aumento de la autoinducción de éste comparada con la autoinducción de un hilo no arrollado de igual longitud (cf. (33.3) con (33.1)) es una consecuencia natural de la inducción mutua entre espiras próximas.

PROBLEMAS*

1. Determinar la autoinductancia de un circuito cerrado de alambre cuya sección es circular.

Solución. El campo magnético dentro del hilo se puede suponer igual al que existe dentro de un cilindro rectilíneo infinito:

$$H = 2Jr/ca^2$$

(r es la distancia al eje del alambre y a su radio). De aquí se deduce la parte interior de la autoinducción:

$$L_i = \frac{2c^2}{J^2} \frac{\mu_i}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{2} \mu_i, \quad (1)$$

donde l es la longitud del circuito.

Para el cálculo de L_e , observemos que el campo fuera de un hilo fino no depende de la distribución de la corriente en su sección. En particular, la energía \mathcal{F}_e del campo magnético exterior no cambia si se supone que la corriente circula solamente por la superficie del alambre. Pero entonces dentro de éste será $H = 0$ y cabe calcular la energía \mathcal{F}_e como energía total de acuerdo con la fórmula (32.2).

En virtud de la hipótesis de que las corrientes están distribuidas por la superficie, la integral en esta fórmula se reduce de hecho a una integral a lo largo de una línea que coincide con el eje del hilo, de modo que la parte exterior de la autoinductancia es

$$L_e = \frac{2c^2}{J^2} \frac{J}{2c} \oint [A]_{r=a} \cdot d\mathbf{l},$$

donde el valor de A en el integrando se toma sobre la superficie del conductor. Al pasar a esta fórmula se ha tenido también en cuenta que, en la aproximación considerada, el campo es constante a lo largo del perímetro circular de una sección del alambre.

Después de reducir el problema al cálculo de $[A]_{r=a}$, hagamos otra hipótesis acerca de la distribución de la corriente: supongamos que la corriente total J circula a lo largo del eje del hilo. El valor del campo sobre la superficie del alambre, en la aproximación considerada, no difiere del valor anterior (dicho valor no cambiaría en absoluto en el caso de un conductor rectilíneo de sección circular). Entonces, según la fórmula (29.14), tenemos

$$[A]_{r=a} = \frac{J}{c} \left[\oint \frac{d\mathbf{l}}{R} \right]_{r=a},$$

donde R es la distancia del elemento $d\mathbf{l}$ de eje del conductor a un punto dado de su superficie. Descompongamos la integral en dos partes, en las que $R > \Delta$ y $R < \Delta$, respectivamente, donde Δ es una cierta longitud pequeña comparada con las dimensiones del circuito, pero grande en compara-

* En los problemas 1-6 se supone que la permeabilidad del medio es $\mu_e = 1$.

ción con el radio a del hilo*. En la integral, en el dominio $R > \Delta$ cabe prescindir de a y entender por R simplemente la distancia entre dos puntos del circuito. En cuanto a la integral relativa al dominio $R < \Delta$, se puede considerar que es un vector dirigido según la tangente al circuito en dicho punto. Designando el vector unidad en esta dirección por t , haremos

$$\left[\int_{R < \Delta} \frac{dl}{R} \right]_{r=a} \cong t \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{(a^2 + l^2)}} = 2t \operatorname{arsenh}(\Delta/a) \\ \cong 2t \ln(2\Delta/a).$$

Esta expresión se puede escribir también en forma de integral

$$\int_{\Delta > R > \frac{1}{2}\Delta} \frac{dl}{R},$$

donde R representa de nuevo la distancia entre puntos del circuito. Así pues, sumando con la integral extendida al dominio $R > \Delta$, obtendremos la expresión

$$[A]_{r=a} = \frac{J}{c} \int_{R > \frac{1}{2}\Delta} \frac{dl}{R},$$

en la que, como debía ser, no aparece ya el parámetro arbitrario Δ .

De esta manera se tiene en definitiva

$$L_e = \iint_{R > \frac{1}{2}\Delta} \frac{dl \cdot dl'}{R}. \quad (2)$$

La integración se extiende aquí a todos los pares de puntos del contorno separados por una distancia mayor que $a/2$.

2. Determinar la autoinductancia de un anillo de alambre fino (de radio b) formado por un conductor de sección circular (radio a).

Solución. El integrando que aparece en la fórmula (2) del problema 1 depende únicamente del ángulo central ϕ que subtiende la cuerda R del anillo, siendo $R = 2b \sin(\phi/2)$ y $dl \cdot dl' = dl \cdot dl' \cos \phi$. Por ello, tenemos

$$L_e = 2 \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{\cos \phi \cdot 2\pi b \cdot b \, d\phi}{2b \sin \frac{1}{2}\phi} = 4\pi b [-\ln \operatorname{tg} \frac{1}{4}\phi_0 - 2 \cos \frac{1}{2}\phi_0].$$

El límite inferior de integración se determina a partir de $2b \sin \frac{\phi_0}{2} = \frac{a}{2}$, de donde $\phi_0 \cong a/2b$.

Substituyendo este valor y sumando con $L_i = \pi b \mu_i$, obtendremos, dentro de la precisión requerida,

$$L = 4\pi b [\ln(8b/a) - 2 + \frac{1}{2}\mu_i].$$

En particular, para $\mu_i = 1$

$$L = 4\pi b [\ln(8b/a) - (7/4)].$$

3. Determinar la extensión de un anillo de alambre (con $\mu_i = 1$) bajo la acción del campo magnético de la corriente que circula por él.

Solución. Las tensiones internas que actúan a lo largo del eje del hilo y perpendicularmente al

* Un método análogo se aplicó en el problema 4 del § 2 para el cálculo de la capacidad de un anillo de sección pequeña.

mismo se determinan, de acuerdo con (32.16), por las fórmulas

$$\pi a^2 \sigma_1 = \frac{J^2}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial (2\pi b)}, \quad 2\pi ab \sigma_{\perp} = \frac{J^2}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial a}.$$

Substituyendo L por el valor que resulta del problema anterior, obtendremos

$$\sigma_1 = \frac{J^2}{\pi a^2 c^2} \left[\ln \frac{8b}{a} - \frac{3}{4} \right], \quad \sigma_{\perp} = -\frac{J^2}{a^2 c^2}.$$

De aquí se sigue el alargamiento relativo del anillo*

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - 2\sigma_{\perp}) = \frac{J^2}{\pi a^2 c^2 E} \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{3}{4} + 2\pi\sigma \right)$$

(E es el módulo de Young y σ el coeficiente de Poisson del alambre).

4. Determinar la autoinductancia por unidad de longitud de un sistema constituido por dos hilos rectilíneos paralelos (con $\mu_t = 1$) de sección circular (de radios a y b), que se encuentran a una distancia h entre ejes, cuando por ellos circulan corrientes iguales y opuestas de intensidad J (figura 18).

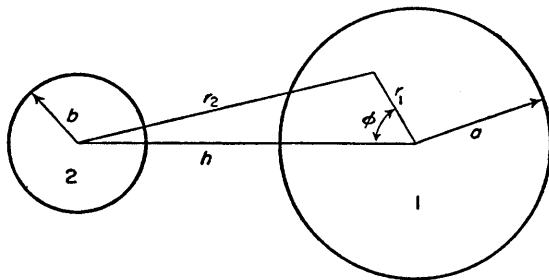


FIG. 18

Solución. El potencial vector del campo magnético de cada una de las corrientes está dirigido paralelamente a los ejes de los hilos y, por lo tanto, los potenciales vectores de ambos campos se suman algebraicamente. Para el campo magnético del alambre 1, con una corriente distribuida homogéneamente $+J$, tenemos (en coordenadas cilíndricas)

$$A_z = \frac{J}{c} \left(C - \frac{r^2}{a^2} \right) \text{ para } r < a,$$

$$A_z = \frac{J}{c} \left(C - 1 - 2 \ln \frac{r}{a} \right) \text{ para } r > a,$$

donde C es una constante arbitraria; sobre la superficie del hilo, A_z es continua. Fórmulas análogas se obtienen para el campo del hilo 2 substituyendo a por b y cambiando el signo de J . La integral de superficie extendida a una sección transversal del alambre 1 en la fórmula (32.2) da

$$\begin{aligned} & \frac{J^2}{2c^2 \pi a^2} \int \left(\left(C - \frac{r_1^2}{a^2} \right) - \left(C - 1 - 2 \ln \frac{r_1}{b} \right) \right) df_1 \\ &= \frac{J^2}{2c^2 \pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{r_1^2}{a^2} + \ln \frac{h^2 + r_1^2 - 2hr_1 \cos \phi}{b^2} \right) r_1 d\phi dr_1 = \frac{J^2}{2c^2} \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{h}{b} \right). \end{aligned}$$

* Véase vol. VII, *Teoría de la elasticidad*, § 5.

A su vez, la integración sobre una sección del hilo 2 conduce a la misma expresión con a en vez de b . Por consiguiente, la autoinductancia del sistema de los dos hilos por unidad de longitud vale

$$L = 1 + 2 \ln(h^2/ab).$$

5. Determinar la autoinductancia de un solenoide toroidal.

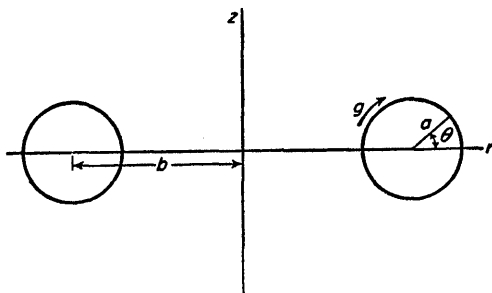


FIG. 19

Solución. Consideremos el solenoide como una superficie conductora toroidal por la que circulan corrientes superficiales de densidad

$$g = NJ/2\pi r,$$

(N es el número total de espiras del conductor, J es la corriente que circula por él; las coordenadas y dimensiones se indican en la figura 19). El campo magnético fuera del solenoide es $H_e = 0$ y dentro de él

$$H_{tr} = H_{tz} = 0, H_{t\phi} = 2\bar{N}J/cr$$

(r, z, ϕ son las coordenadas cilíndricas). En efecto, esta solución satisface las ecuaciones $\text{div } \mathbf{H} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ y la condición de contorno (33.2)*. La energía del campo magnético dentro del solenoide vale

$$\int (H_t^2/8\pi) dV = (N^2 J^2/c^2) \oint x dr/r.$$

La integración se extiende a lo largo del contorno de la sección del toro y se lleva a cabo fácilmente introduciendo el ángulo θ definido por $z = a \sin \theta$, $r = b + a \cos \theta$. El resultado que se obtiene para la autoinductancia es

$$L = 4\pi N^2 [b - \sqrt{(b^2 - a^2)}].$$

6. Determinar la corrección de primer orden respecto de l/h a la expresión (33.3) (con $\mu_e = 1$) para la autoinductancia de un solenoide cilíndrico ligada con la deformación del campo cerca de sus extremos.

Solución. La autoinducción del solenoide se calcula como integral doble extendida a su superficie:

$$L = \frac{1}{J^2} \iint \frac{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2}{R} df_1 df_2,$$

donde \mathbf{g} es la densidad de corriente superficial ($\mathbf{g} = n\mathbf{J}$). En coordenadas cilíndricas,

$$L = 2\pi b^2 n^2 \int_0^h \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi dz_1 dz_2}{\sqrt{[(z_2 - z_1)^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi]}} = 8\pi b^2 n^2 \int_0^h \int_0^\pi \frac{(h - \zeta) \cos \phi d\phi d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi)}}$$

* Ésta es válida también para un solenoide toroidal de sección arbitraria, no necesariamente circular.

(ϕ es el ángulo formado por los planos diametrales que pasan por df_1 y df_2 ; además, $\zeta = z_2 - z_1$). Integrando respecto de ζ , obtendremos para $h \gg b$:

$$L \cong 8\pi b^2 n^2 \int_0^{\pi} \left[h \ln \frac{h}{b \sin \frac{1}{2}\phi} - h + 2b \sin \frac{1}{2}\phi \right] \cos \phi \, d\phi,$$

y finalmente

$$L = 4\pi^2 b^2 n^2 [h - 8b/3\pi].$$

7. Determinar el factor por el que se multiplica la autoinductancia de un circuito lineal plano si se le coloca sobre la superficie frontera plana de un medio semi-infinito cuya permeabilidad magnética es μ_e . Se prescinde de la parte interior de la autoinducción del hilo.

Solución. Es evidente, por razones de simetría, que si no existiera el medio, el campo magnético de la corriente sería simétrico respecto del plano del circuito y que las líneas de fuerza magnéticas atravesarían esta superficie normalmente a la misma; llamémos H_0 a este campo. Las ecuaciones del campo y las condiciones de contorno sobre la superficie del medio semiinfinito quedan satisfechas si hacemos en el semiespacio vacío $H = \frac{2\mu_e}{\mu_e + 1} H_0$, y en el medio, $B = \mu_e H = \frac{2\mu_e}{\mu_e + 1} H_0$.

En efecto, con esto queda asegurada la continuidad de B_n y H_t sobre el plano frontera, y la circulación de H a lo largo de cualquier línea de fuerza será igual a la circulación de H_0 correspondiente al mismo camino. De aquí se concluye fácilmente que, al introducir el medio, la energía total del campo y, por consiguiente, la autoinducción del circuito queda multiplicada por

$$2\mu_e/(\mu_e + 1).$$

§ 34. Fuerzas en un campo magnético

Para determinar las fuerzas que actúan sobre una substancia en un campo magnético apenas tendremos necesidad de efectuar nuevos cálculos dada la completa analogía con el caso eléctrico. Esta analogía se debe, ante todo, a que las expresiones de las magnitudes termodinámicas en un campo magnético difieren de las expresiones correspondientes a un campo eléctrico tan sólo en la substitución de las letras E , D por H , B , respectivamente. Al calcular el tensor de tensiones en el § 15 se aplicó la propiedad de que el campo eléctrico deriva de un potencial, lo que es consecuencia de la ecuación $\text{rot } E = 0$. El campo magnético, en cambio, satisface la ecuación

$$\text{rot } H = 4\pi j/c, \quad (34.1)$$

que se reduce a $\text{rot } H = 0$ únicamente cuando no hay corriente de conducción. Pero cuando se calcula el tensor de tensiones, hay que suponer en cualquier caso $j = 0$. Dado que j depende de las derivadas del campo magnético, tener en cuenta las corrientes en el cálculo de las tensiones significaría introducir en el tensor de tensiones σ_{ik} las pequeñísimas correcciones debidas al carácter no-homogéneo del campo (cf. la nota de la pág. 78).

De esta manera, todas las fórmulas obtenidas en los §§ 15 y 16 para el tensor

de tensiones se aplican inmediatamente a un campo magnético. Así, en un medio líquido y para el que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, tenemos

$$\sigma_{ik} = -p_0(\rho, T)\delta_{ik} - \frac{H^2}{8\pi} \left[\mu - \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] \delta_{ik} + \frac{\mu H_i H_k}{4\pi}. \quad (34.2)$$

Las fuerzas de volumen se calculan a partir de aquí mediante la fórmula $f_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k$. Si el medio es un conductor por el que circula una corriente, el cálculo difiere del que se llevó a cabo en el § 15 en que, en vez de la ecuación $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, tenemos la ecuación (34.1).

Derivando (34.2) y teniendo en cuenta a la vez la igualdad $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } (\mu\mathbf{H}) = 0$, se encuentra

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & -\text{grad } p_0 + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[H^2 \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{8\pi} \text{grad } \mu - \\ & - \frac{\mu}{8\pi} \text{grad } H^2 + \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Pero, según una conocida fórmula del análisis vectorial,

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \text{grad } H^2 - \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H} \\ &= \frac{1}{2} \text{grad } H^2 + 4\pi \mathbf{j} \times \mathbf{H}/c, \end{aligned}$$

y en definitiva resulta

$$\mathbf{f} = -\text{grad } p_0 + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[H^2 \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{8\pi} \text{grad } \mu + \frac{\mu}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}. \quad (34.3)$$

Al comparar con la fórmula análoga (15.12) se observa que se añade aquí un término más (el último). Sin embargo, no sería correcto pensar que la aparición de este término significa la posibilidad física de separar de los demás efectos en \mathbf{f} una fuerza vinculada con la corriente de conducción. Ello es así porque, en virtud de la ecuación (34.1), la corriente \mathbf{j} es inseparable de la no homogeneidad del campo, y las derivadas de éste respecto de las coordenadas intervienen también en los demás términos de (34.3). Para una permeabilidad de la materia apreciablemente distinta de 1, todos los términos de (34.3), en general, son del mismo orden de magnitud.

Pero si, como suele ocurrir, μ es próximo a la unidad, cuando existe una corriente de conducción el último término en (34.3) representa la contribución principal a la fuerza, comparadas con la cual las de los demás términos constituyen tan sólo una pequeña corrección carente de importancia. Entonces, al calcular las fuerzas se puede suponer $\mu = 1$ y tenemos simplemente

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{H}/c \quad (34.4)$$

(el término $-\nabla p_0$ aquí y en lo que sigue no nos interesa y prescindimos de él). Cuando $\mu = 1$, las propiedades de la materia no influyen en modo alguno sobre los fenó-

menos magnéticos y la expresión (34.4) de la fuerza es válida en igual medida para conductores tanto líquidos como sólidos. La fuerza total que actúa en un campo magnético sobre un conductor por el que circula corriente viene dada por la integral

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{j} \times \mathbf{H} dV/c. \quad (34.5)$$

La fórmula (34.4) se puede obtener, claro está, de una manera muy sencilla y directa basándonos en la conocida expresión de la fuerza de Lorentz. La fuerza macroscópica que actúa sobre un cuerpo en reposo en un campo magnético no es sino el valor medio de las fuerzas de Lorentz que el campo microscópico \mathbf{h} ejerce sobre las partículas cargadas que constituyen el cuerpo:

$$\mathbf{f} = \overline{\rho \mathbf{v} \times \mathbf{h}}/c.$$

Pero si $\mu = 1$, el campo \mathbf{h} coincide con el campo promedio \mathbf{H} , y el valor medio de $\rho \mathbf{v}$, con la corriente de conducción total.

Cuando un conductor se mueve, las fuerzas (34.4) realizan sobre él un cierto trabajo mecánico. A primera vista puede parecer que ello está en contradicción con el hecho de que las fuerzas de Lorentz no efectúan trabajo alguno sobre las cargas en movimiento. En realidad, claro está, no existe contradicción ninguna, puesto que en un conductor que se mueve contribuyen al trabajo de las fuerzas de Lorentz no solamente el trabajo mecánico, sino también el trabajo de las fuerzas electromotrices inducidas en el conductor debido a su movimiento. Estos dos trabajos son iguales en valor absoluto y de signo opuesto (véase la nota de la pág. 245).

En la expresión (34.4), \mathbf{H} es el valor real del campo magnético creado por las fuentes externas y por las propias corrientes sobre las que actúa esta fuerza. Sin embargo, al calcular la fuerza total de acuerdo con (34.5), cabe tomar para \mathbf{H} solamente el campo exterior \mathfrak{H} en el que se introduce el conductor por el que circula una corriente. El campo propio creado por el conductor en cuestión no puede contribuir a la fuerza total que actúa sobre él, en virtud de la ley de conservación del impulso.

El cálculo de las fuerzas es particularmente sencillo para un conductor lineal. Las propiedades magnéticas del material que lo constituye carecen totalmente de importancia, y si en el medio se tiene $\mu = 1$, la fuerza total que actúa sobre él viene dada por la integral curvilínea

$$\mathbf{F} = \oint \mathbf{dl} \times \mathfrak{H}/c. \quad (34.6)$$

Esta expresión puede escribirse también como integral extendida a una superficie limitada por el circuito de la corriente. Substituyendo, de acuerdo con el teorema de Stokes, \mathbf{dl} por el operador $\mathbf{df} \times \nabla$, obtendremos

$$\oint \mathbf{dl} \times \mathfrak{H} = \int (\mathbf{df} \times \text{grad}) \times \mathfrak{H}.$$

Escribamos ahora

$$\begin{aligned} (\mathbf{df} \times \text{grad}) \times \mathfrak{H} &= -\mathbf{df} \text{div} \mathfrak{H} + \text{grad} (\mathbf{df} \cdot \mathfrak{H}) \\ &= -\mathbf{df} \text{div} \mathfrak{H} + \mathbf{df} \times \text{rot} \mathfrak{H} + (\mathbf{df} \cdot \text{grad}) \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Pero $\text{div } \mathfrak{H} = 0$, y en el espacio fuera de las corrientes es también $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$. Así pues,

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{df} \cdot \text{grad}) \mathfrak{H} / c. \quad (34.7)$$

En particular, en un campo exterior cuasihomogéneo se puede sacar \mathfrak{H} junto con el operador ∇ fuera del signo de integración. Introduciendo también el momento magnético de la corriente según (29.18), llegamos al resultado del todo natural:

$$\mathbf{F} = (\mathcal{M} \cdot \text{grad}) \mathfrak{H}. \quad (34.8)$$

Dado que en esta expresión \mathcal{M} es una constante, \mathbf{F} puede escribirse también en la forma

$$\mathbf{F} = \text{grad} (\mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}) \quad (34.9)$$

(lo que está de acuerdo con la expresión (32.17) para la energía de una corriente). En cuanto al momento de las fuerzas que actúan sobre la corriente en un campo cuasihomogéneo, es fácil comprobar que es igual a la expresión ordinaria

$$\mathbf{K} = \mathcal{M} \times \mathfrak{H}. \quad (34.10)$$

PROBLEMA

Determinar la fuerza que actúa sobre un hilo rectilíneo por el que circula una corriente J y colocado paralelamente a un cilindro circular de longitud infinita (con permeabilidad μ) de radio a y a la distancia b de su eje.

Solución. Teniendo en cuenta la correspondencia señalada en la página 145 entre los problemas planos electrostático y magnetostático, el campo de la corriente se determina cambiando las notaciones en la solución del problema 3 del § 7. El campo en el espacio en torno del cilindro coincide con el campo que crearían en el vacío la corriente J y las corrientes $+J'$ y $-J'$ que circulan por los puntos A y O' respectivamente (véase fig. 11), siendo

$$J' = (\mu - 1)J / (\mu + 1).$$

El campo en el interior del cilindro coincide con el campo que crearía una corriente

$$J'' = 2J / (\mu + 1)$$

que circulase por el punto O . La fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del conductor es

$$\begin{aligned} F = JB/c &= \frac{2JJ'}{c^2} \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'} \right) \\ &= \frac{2J^2 a^2 (\mu - 1)}{b(b^2 - a^2)(\mu + 1)c^2}. \end{aligned}$$

De manera análoga se encuentra (véase el problema 4 del § 7) que un conductor lineal situado dentro de una cavidad cilíndrica en un medio magnético es atraído hacia la parte más próxima de la superficie de la misma por una fuerza

$$F = 2J^2 b(\mu - 1) / (a^2 - b^2)(\mu + 1)c^2.$$

§ 35. Fenómenos giromagnéticos

La posibilidad de imanar cuerpos no ferromagnéticos sin aplicarles un campo magnético exterior está fuertemente limitada por la condición de invariancia respecto del cambio de signo del tiempo. La polarización eléctrica de muchos cuerpos puede conseguirse, por ejemplo, sin un campo eléctrico exterior mediante deformación (medios piezoeléctricos). En cambio, el «piezomagnetismo», si realmente se produce, sólo puede manifestarse como un fenómeno muy raro (véase el final del § 28) y, en cualquier caso, está excluido en los cuerpos que carecen de estructura magnética.

La imanación sin un campo magnético exterior exige, en general, que el cuerpo se ponga en movimiento. A nada puede conducir una traslación uniforme, por descontado, en virtud del principio de relatividad de Galileo. En cambio, una rotación uniforme provoca una imanación que depende linealmente de la velocidad angular Ω (*efecto Barnett*); esta relación entre los vectores Ω y \mathcal{M} es posible porque ambos cambian de signo al invertir el sentido del tiempo. Pero dado que uno y otro son vectores axiales, dicha dependencia puede darse incluso en un cuerpo isótropo (caso en que se reduce a la mera proporcionalidad entre Ω y \mathcal{M}).

Junto con este efecto debe existir también el efecto inverso: un cuerpo suspendido libremente comienza a girar al ser imanado (*efecto Einstein-de Haas*). Entre ambos efectos se tiene una simple relación termodinámica. Ésta puede obtenerse de la siguiente manera.

Como es sabido*, el potencial termodinámico respecto de la velocidad angular (para una temperatura y un volumen del cuerpo dados) es la energía libre \mathcal{F}' del cuerpo en el sistema de coordenadas que gira con el mismo. En particular, el momento cinético \mathbf{L} del cuerpo es igual a

$$\mathbf{L} = -\partial\mathcal{F}'/\partial\Omega. \quad (35.1)$$

Los fenómenos giromagnéticos se representan introduciendo en la energía libre una expresión adicional que corresponde al primer término de su desarrollo en potencias de Ω y de la imanación \mathcal{M} en cada punto del cuerpo. Este término, en el que aparecen tanto Ω como \mathcal{M} , es lineal respecto de Ω y de \mathcal{M} , es decir, tiene la forma

$$\mathcal{F}'_{\text{giro}} = -\int \lambda_{ik} \Omega_i \mathcal{M}_k dV = -\lambda_{ik} \Omega_i \mathcal{M}_k, \quad (35.2)$$

donde λ_{ik} es un tensor constante, en general no simétrico.

Según (35.1) y (35.2), el momento cinético que adquiere el cuerpo como resultado de su imanación está ligado con su momento magnético total por la relación

$$L_{\text{giro},i} = \lambda_{ik} \mathcal{M}_k.$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 26.

De ordinario, en vez de λ_{ik} se utiliza el tensor inverso, definido por

$$g_{ik} = (2mc/e)\lambda^{-1}_{ik}$$

(e y m son la carga y la masa del electrón); las magnitudes sin dimensiones g_{ik} se llaman *coeficientes giromagnéticos*. Entonces es

$$\mathcal{M}_i = (e/2mc)g_{ik}L_{\text{giro},k}. \quad (35.3)$$

Por otra parte, la expresión (35.2) prueba que, en relación con su influencia sobre las propiedades magnéticas, la rotación del cuerpo equivale a la acción de un campo exterior de intensidad $\mathfrak{H}_i = \lambda_{ki}\Omega_k$, o bien

$$\mathfrak{H}_i = (2mc/e)g^{-1}_{ki}\Omega_k. \quad (35.4)$$

Tenemos así la posibilidad, en principio, de calcular la imanación provocada por una rotación. Así, si la susceptibilidad magnética del cuerpo χ_{ik} es pequeña, el momento magnético que adquiere no depende de su forma y es igual a

$$\mathcal{M}_i = \chi_{ik}\mathfrak{H}_k = (2mc/e)\chi_{ik}g^{-1}_{lk}\Omega_l.$$

Las fórmulas (35.3) y (35.4) corresponden a los efectos Einstein-de Haas y Barnett, respectivamente. Vemos pues que ambos efectos están determinados precisamente por un mismo tensor, el g_{ik} .

CAPÍTULO V

FERROMAGNETISMO

§ 36. Cuerpos ferromagnéticos cerca del punto de Curie

Entre las propiedades magnéticas de las sustancias ferromagnéticas y las propiedades eléctricas de los cuerpos ferroeléctricos existe una íntima analogía. Tanto unos como otros poseen, en volúmenes macroscópicos, una polarización espontánea, magnética o eléctrica. La desaparición de la polarización al cambiar la temperatura tiene lugar, en ambos casos, para un valor de ésta que corresponde a un cambio de fase de segunda especie (se produce en el *punto de Curie*).

Al mismo tiempo, entre los fenómenos ferromagnéticos y los ferroeléctricos hay también diferencias importantes debidas al carácter diferente de las fuerzas microscópicas de interacción que conducen a que se establezca la polarización espontánea. En los ferroeléctricos, la interacción de las moléculas en la red cristalina es esencialmente anisótropa, por lo que el vector polarización espontánea está ligado de manera relativamente rígida con determinadas direcciones en el cristal. En cambio, la aparición de una polarización espontánea en las sustancias ferromagnéticas se debe fundamentalmente a la interacción de intercambio de los átomos, que no depende en general de la dirección del momento magnético total respecto de la red*. Ciertamente que, junto con la interacción de intercambio, existe también una interacción magnética directa entre los momentos magnéticos atómicos. Esta interacción, sin embargo, representa un efecto del orden de v^2/c^2 (v son las velocidades atómicas), dado que los propios momentos magnéticos de los átomos contienen un factor v/c . A este tipo de interacciones pertenece también la interacción de los momentos magnéticos de los átomos con el campo eléctrico de la red cristalina. Todas estas interacciones (que se pueden calificar de *relativistas* por la presencia en ellas del factor $1/c^2$) son débiles comparadas con la interacción de intercambio y, de esta manera,

* La interacción de intercambio constituye, como es sabido, un efecto típicamente cuántico que resulta del tipo de simetría de las funciones de onda del sistema de partículas respecto de sus permutaciones. La simetría de permutación de las funciones de onda, y con ella también la interacción de intercambio, depende solamente del spin total del sistema, pero no de su dirección (véase vol. III, *Mecánica cuántica*, § 86). El papel que representa la interacción de intercambio en las sustancias ferromagnéticas fue señalado por vez primera por Ia. I. Frenkel, Ia. G. Dorfman y W. Heisenberg (1928).

pueden conducir sólo a una relativamente pequeña dependencia de la energía del cristal respecto de la dirección de imanación*.

En consecuencia, la imanación de un cuerpo ferromagnético es una magnitud que se conserva en primera aproximación, es decir, respecto de la interacción fundamental (la de intercambio). Esta circunstancia atribuye un más profundo sentido físico a la teoría termodinámica que se expone a continuación y en la que la imanación \mathbf{M} se considera como una variable independiente cuyo valor real (en función de la temperatura, del campo, etc.) viene determinado por las correspondientes condiciones de equilibrio térmico.

Designemos por Φ_0 el potencial termodinámico por unidad de volumen cuando $\mathbf{H} = 0$, considerado como función de la variable independiente \mathbf{M} (a la vez que de las otras variables termodinámicas). Prescindiremos por el momento de las interacciones relativistas, es decir, consideraremos solamente la interacción fundamental, la de intercambio. Entonces Φ_0 puede ser sólo función del módulo del vector \mathbf{M} , no de su dirección.

Para hallar las magnitudes termodinámicas cuando \mathbf{H} es diferente de cero partiremos de la relación

$$\partial\tilde{\Phi}/\partial\mathbf{H} = -\mathbf{B}/4\pi = -(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M})/4\pi.$$

Integrándola para un valor dado de la variable independiente \mathbf{M} (y teniendo en cuenta que para $\mathbf{H} = 0$ es $\tilde{\Phi} = \Phi = \Phi_0$), obtendremos

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0(M) - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} - H^2/8\pi. \quad (36.1)$$

Para el potencial Φ se sigue de aquí

$$\begin{aligned} \Phi &= \tilde{\Phi} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/4\pi = \Phi_0 + H^2/8\pi \\ &= \Phi_0 + (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})^2/8\pi. \end{aligned} \quad (36.2)$$

Cuando se prescinde de la anisotropía magnética de la sustancia ferromagnética, las direcciones de los vectores \mathbf{M} y \mathbf{H} coinciden, naturalmente; por ello, en las fórmulas (36.1) y (36.2) se puede escribir en vez de los vectores sus módulos.

Cerca del punto de Curie la imanación M es pequeña. Siguiendo la teoría general de los cambios de fase de segunda especie** desarrollemos $\Phi_0(M)$ en serie de potencias de esta pequeña cantidad. El desarrollo de una función isótropa en potencias de la magnitud vectorial M puede contener solamente términos de grado par:

$$\tilde{\Phi} = \Phi_{00} + \frac{1}{2}aM^2 + \frac{1}{4}bM^4 - MH - H^2/8\pi, \quad (36.3)$$

* El orden de magnitud de la razón de las interacciones relativistas a la de intercambio se caracteriza por el cociente

$$U_{\text{aniso}}/N\Theta,$$

donde U_{aniso} es la llamada *energía de anisotropía magnética* por unidad de volumen de la sustancia (véase el párrafo siguiente), N es el número de átomos por cm^3 y Θ la temperatura del punto de Curie. De ordinario, es del orden de 10^{-4} a 10^{-5} .

** Véase vol. V, *Física estadística*, cap. 14.

donde Φ_{00} , a , b son funciones únicamente de la temperatura (y de la presión).

El punto de Curie $T = \Theta$ viene determinado por la anulación del coeficiente a , siendo $a > 0$ para $T > \Theta$ y $a < 0$ para $T < \Theta^*$. Cerca del punto de Curie la función $a(T)$ se puede desarrollar en potencias de la diferencia $T - \Theta$, es decir, cabe escribir

$$a = \alpha(T - \Theta), \quad (36.4)$$

donde α es una magnitud positiva independiente de la temperatura. El coeficiente b es positivo cerca del punto de Curie y puede substituirse por su valor para $T = \Theta$.

Cuando $H = 0$, al mínimo del potencial termodinámico por encima del punto de Curie, donde $a > 0$, corresponde $M = 0$, esto es, no hay polarización espontánea. Por debajo de dicho punto, el valor M viene determinado por la condición

$$\partial\Phi/\partial M = [\alpha(T - \Theta) + bM^2]M = 0.$$

Al mínimo de Θ corresponde la anulación de la expresión entre paréntesis rectos, de donde

$$M = \sqrt{[\alpha(\Theta - T)/b]}. \quad (36.5)$$

Así, pues, al acercarnos al punto de Curie la imanación espontánea disminuye proporcionalmente a $\sqrt{\Theta - T}$.

Como en todo cambio de fase de segunda especie, la transición en el punto de Curie (para $H = 0$) va acompañada de un salto en el valor de la capacidad calorífica. Prescindiendo de potencias superiores de M , tenemos para la entropía:

$$S = -\partial\Phi/\partial T = S_{00} - \frac{1}{2}M^2\partial a/\partial T = S_{00} - \frac{1}{2}\alpha M^2.$$

En la fase no-ferromagnética es $M = 0$ y $S = S_{00}$, y en la fase ferromagnética M se determina por la fórmula (36.5), de modo que

$$S = S_{00} + \alpha^2(T - \Theta)/2b.$$

De aquí resulta para el salto en el valor de la capacidad calorífica $C_p = T \frac{\partial S}{\partial T}$,

$$\Delta C_p = \alpha^2\Theta/2b. \quad (36.6)$$

Supongamos ahora que $H \neq 0$. La condición $\partial\Phi/\partial M = 0$, que determina la imanación, se escribe:

$$\alpha(T - \Theta)M + bM^3 = H. \quad (36.7)$$

Determinemos la susceptibilidad a partir de

$$\chi = (\partial M/\partial H)_{H \rightarrow 0}.$$

* Esta distribución de las fases con relación a la temperatura se presenta en todos los cuerpos ferromagnéticos conocidos, si bien no constituye una necesidad termodinámica.

De (36.7) se deduce

$$\frac{\partial M}{\partial H}[\alpha(T - \Theta) + 3bM^2] = 1.$$

Por encima del punto de Curie es $M = 0$ cuando $H = 0$, de modo que

$$\chi = 1/\alpha(T - \Theta), \quad (36.8)$$

es decir, aparece el paramagnetismo con una susceptibilidad inversamente proporcional a $T - \Theta$ (*ley de Curie-Weiss*).

Por debajo del punto de Curie y cuando $H = 0$, M viene dada por la fórmula (36.5) y obtenemos

$$\chi = 1/2\alpha(\Theta - T). \quad (36.9)$$

Hay que recordar que esta magnitud no representa aquí la susceptibilidad en el sentido ordinario de la palabra (es decir, el coeficiente de proporcionalidad entre M y H), puesto que $M \neq 0$ incluso cuando $H = 0^*$.

De hecho, la susceptibilidad (36.9) puede alcanzar valores del orden de la unidad únicamente en la inmediata vecindad del punto de Curie. Prescindiendo de esta región, que presenta poco interés, podemos suponer que la imanación M sólo cambia muy poco por la acción del campo magnético y puede considerarse, para una temperatura dada, como una cantidad constante, lo que admitiremos en los párrafos que siguen.

También en relación con esto cabe señalar una diferencia más entre las sustancias ferromagnéticas y las ferroeléctricas, en las que $\partial P/\partial E$, en general, no es pequeña ni aun lejos del punto de Curie. La causa de esto reside nuevamente en el hecho de que los momentos magnéticos atómicos son pequeños comparados con los momentos dipolares eléctricos de las moléculas.

§ 37. Energía de anisotropía magnética

Como hemos señalado ya, la anisotropía de las propiedades magnéticas de una sustancia ferromagnética se debe a las interacciones relativistas, comparativamente débiles, entre sus átomos. En la teoría macroscópica esta anisotropía se representa mediante la introducción en el potencial termodinámico de los correspondientes términos, es decir, de la llamada *energía de anisotropía magnética* que depende de la dirección de imanación.

El cálculo de la energía de anisotropía a partir de la teoría microscópica exigiría una aplicación de la teoría cuántica de perturbaciones, en la cual el papel de per-

* Desde el punto de vista cuantitativo, las fórmulas (36.8), (36.9) son válidas en la región en que $\chi \gtrsim 1$ solamente para los cristales del sistema cúbico. Para los cristales uniáxicos, debería también tenerse en cuenta la llamada *energía de anisotropía* (véase § 37), la cual en este caso es proporcional a M^2 y para valores de M muy pequeños es comparable e incluso supera el valor del término $aM^2/2$ en (36.3).

turbación de la energía lo representarían los términos que en el hamiltoniano del cristal corresponden a las interacciones relativistas. Pero la forma general de las expresiones buscadas puede establecerse también sin efectuar estos cálculos, basándonos en simples consideraciones de simetría.

El hamiltoniano de las interacciones relativistas contiene términos de determinados grados respecto de los operadores correspondientes a los vectores spin de los electrones, precisamente de grados primero y segundo (las llamadas interacciones *spin-órbita* y *spin-spin*). Por ello, al aplicar la teoría de perturbaciones, la energía de anisotropía se obtiene automáticamente en forma de desarrollo en potencias de los cosenos directores del vector imanación. Por otra parte, la energía de anisotropía U_{aniso} , al igual que el propio potencial Φ , es invariante respecto del cambio de sentido del tiempo, mientras que la imanación \mathbf{M} cambia con ello de signo. De aquí se sigue que la energía de anisotropía debe ser función par de los cosenos directores del vector \mathbf{M} . Por consiguiente, en la primera aproximación no nula de la teoría de perturbaciones obtendremos una expresión de la forma

$$U_{\text{aniso}} = \frac{1}{2} \beta_{ik} M_i M_k, \quad (37.1)$$

donde β_{ik} es un tensor simétrico de segundo orden sin dimensiones cuyas componentes son funciones de la temperatura. Cerca del punto de Curie, la expresión (37.1) puede considerarse también como primer término del desarrollo de la energía de anisotropía en potencias del vector \mathbf{M} , que en este dominio de temperaturas resulta ser una cantidad pequeña (hay que subrayar, sin embargo, que esta interpretación sería incorrecta para otras temperaturas). De aquí se deduce que cuando $T \rightarrow \Theta$ las magnitudes β_{ik} tienden a valores finitos no nulos.

En los cristales monoáxicos y biáxicos un tensor simétrico de segundo orden tiene dos y tres componentes independientes, respectivamente. Sin embargo, en el presente caso hay que tener aún en cuenta que una combinación cuadrática, precisamente la $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M^2$, es independiente de la dirección del vector \mathbf{M} y, en consecuencia, puede ser excluida de la energía de anisotropía. Por lo tanto, la expresión (37.1) para los cristales uniáxicos y biáxicos contiene en total uno y dos coeficientes, respectivamente.

Así, para los cristales uniáxicos la energía de anisotropía se puede escribir en la forma

$$U_{\text{aniso}} = \frac{1}{2} \beta (M_x^2 + M_y^2) = \frac{1}{2} \beta M^2 \sin^2 \theta, \quad (37.2)$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{M} y el eje z , elegido éste paralelamente al eje principal de simetría del cristal. Si la constante β es positiva, la energía de anisotropía es mínima para una imanación a lo largo del eje z ; este eje será, como suele decirse, la *dirección de imanación fácil*.

Pero si $\beta < 0$, la dirección de imanación fácil se encontrará en el plano xy ; es natural, en este caso, escribir la energía de anisotropía en la forma

$$U_{\text{aniso}} = \frac{1}{2} |\beta| M_z^2, \quad (37.3)$$

equivalente a (37.2), pero en la que, de nuevo, a la dirección de imanación fácil corresponde $U_{\text{aniso}} = 0^*$. La expresión (37.3) es isótropa en el plano xy . En consecuencia, la dirección de imanación fácil viene determinada en este caso por términos de orden superior (véase el problema 1 de este párrafo).

Consideremos la relación existente entre la imanación de un cuerpo ferromagnético uniaxial y el campo magnético en él, suponiendo, para concretar, que $\beta > 0^{**}$. Recordemos que el módulo de \mathbf{M} es, por hipótesis, independiente de \mathbf{H} , de modo que se trata solamente de las rotaciones de este vector. Por razones de simetría, es evidente que el vector \mathbf{M} se encontrará en el plano que pasa por el eje z y es paralelo a la dirección de \mathbf{H} (en tanto que no se tienen en cuenta en la energía de anisotropía términos de orden superior que son anisótropos en el plano xy); elijamos este plano como plano xz . El potencial termodinámico, incluida la energía de anisotropía, es igual a^{***}

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= \Phi_0(M) + \frac{1}{2}\beta M_x^2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} - H^2/8\pi \\ &= \Phi_0(M) + \frac{1}{2}\beta M^2 \sin^2\theta - M(H_x \sin\theta + H_z \cos\theta) - H^2/8\pi.\end{aligned}\quad (37.4)$$

La dependencia de \mathbf{M} respecto de \mathbf{H} se determina por la condición de equilibrio $\partial\tilde{\Phi}/\partial\theta = 0$, de donde

$$\beta M \sin\theta \cos\theta = H_x \cos\theta - H_z \sin\theta. \quad (37.5)$$

Respecto de la incógnita $\xi = \sin\theta$, (37.5) es una ecuación algebraica de cuarto grado

$$(\beta M \xi - H_x)^2(1 - \xi^2) = H_z^2 \xi^2,$$

en la que los coeficientes de las potencias impares de ξ no son nulos. Esta ecuación posee dos o cuatro raíces reales (todas ellas < 1). Dado que estas raíces corresponden a extremos de la función $\tilde{\Phi}(\theta)$, está claro que en el primer caso dicha función posee un solo mínimo y un solo máximo, y en el segundo, dos mínimos y dos máximos. En otras palabras, a un valor dado del campo \mathbf{H} corresponde en el primer caso una dirección de imanación. En el segundo caso, en cambio, para un \mathbf{H} dado son posibles dos direcciones diferentes de \mathbf{M} de las cuales una (que corresponde al menor de los mínimos de $\tilde{\Phi}$) es del todo estable termodinámicamente, y la segunda (que corresponde al mayor de los mínimos de $\tilde{\Phi}$), termodinámicamente metaestable.

* El cobalto hexagonal constituye un ejemplo de sustancia ferromagnética uniaxial. En él, β cambia de signo a una temperatura $\sim 200^\circ\text{C}$, siendo $\beta < 0$ y $\beta > 0$, respectivamente, por encima y por debajo de este punto. A la temperatura ambiente, $\beta = 4,2$.

** Nos referimos precisamente a este caso cuando se trate de cristales uniaxiales.

*** En el estudio que sigue utilizamos para la energía de anisotropía la expresión (37.2). Hay que señalar, sin embargo, que el desarrollo del que (37.2) es precisamente el primer término suele presentar una convergencia más bien mala en los casos reales. Por ello, para una descripción cuantitativa satisfactoria de los fenómenos es necesario tener en cuenta también el término de orden siguiente (de cuarto orden; para un cristal hexagonal, es proporcional a $\sin^4\theta$).

Uno u otro caso se presenta según sean los valores de H_x y H_z . Si se varían estos parámetros de modo continuo, se pasa de un caso al otro cuando uno de los máximos se confunde con uno de los mínimos. La curva $\tilde{\Phi}(\theta)$ presenta entonces un punto de inflexión en vez de un extremo, es decir, junto con $\partial\tilde{\Phi}/\partial\theta$ se anula también la derivada segunda $\partial^2\tilde{\Phi}/\partial\theta^2$. Escribiendo la ecuación (37.5) en la forma

$$\frac{H_x}{\sin\theta} - \frac{H_z}{\cos\theta} = \beta M$$

y derivándola una vez más respecto de θ , obtendremos

$$H_x/\sin^3\theta = -H_z/\cos^3\theta.$$

Eliminando θ entre estas dos ecuaciones, se encuentra

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = (\beta M)^{2/3}. \quad (37.6)$$

En el plano $H_x H_z$ la ecuación (37.6) define una curva cerrada cuya forma se representa en la figura 20. Esta curva divide el plano $H_x H_z$ en dos partes tales que en una de ellas es posible la existencia de estados metaestables, mientras que en la otra no es posible. Sin necesidad de analizar más el asunto, es evidente que el dominio en que son imposibles los estados metaestables es el exterior a la curva, lo que es consecuencia directa de que para $H \rightarrow \infty$ sólo puede ser estable una dirección de \mathbf{M} , a saber, la paralela al campo \mathbf{H} .

La existencia de estados metaestables conduce a la posibilidad de que aparezcan los llamados fenómenos de *histéresis*, que se traducen en un cambio irreversible del estado de un cuerpo ferromagnético al variar el campo magnético exterior. Por ello, la curva representada en la figura 20 es la «frontera absoluta» de la histéresis; para valores del campo que se encuentran fuera de esta curva la histéresis es imposible en cualquier caso*.

Los estados en los que el campo \mathbf{H} es perpendicular al eje de imanación fácil ($H_x = H$, $H_z = 0$) exigen un análisis especial. El potencial termodinámico es

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2}\beta M^2 \sin^2\theta - HM \sin\theta. \quad (37.7)$$

Si $H > \beta M$, la función $\tilde{\Phi}$ presentará solamente un mínimo, precisamente para $\theta = \pi/2$, es decir, la imanación está dirigida en el sentido del campo. Pero si $H < \beta M$, la función $\tilde{\Phi}$ tiene un mínimo en

$$M_x = M \sin\theta = H/\beta, \quad (37.8)$$

* En todo lo expuesto en este párrafo nos limitamos a considerar solamente los estados de equilibrio termodinámico de los ferromagnéticos y, de acuerdo con esto, los procesos reversibles que se producen en ellos. En particular, ignoramos por completo el mecanismo de los fenómenos de histéresis que pueden estar ligados con defectos del cristal, tensiones internas en la muestra, carácter policristalino de la misma y otras causas análogas.

al que corresponden dos posibles posiciones del vector \mathbf{M} (ángulos θ y $\pi - \theta$) simétricas respecto del eje x . Así pues, en este caso se tienen dos estados de equilibrio, ambos con valores iguales de Φ y, en consecuencia, estables en igual grado.

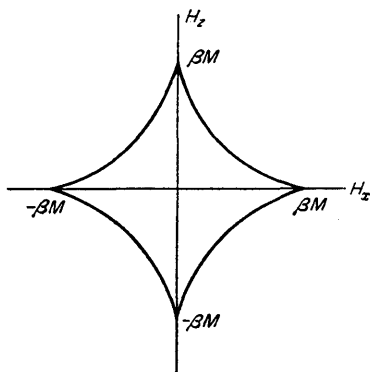


FIG. 20

Esta circunstancia es muy importante, ya que conduce a que puedan existir dos «fases» en contacto en las que la intensidad del campo \mathbf{H} es la misma, mientras que es diferente la imanación \mathbf{M} (y, por lo tanto, también la inducción \mathbf{B}). Como resultado de ello surge una nueva posibilidad de disminución del potencial termodinámico total del cuerpo: su volumen puede descomponerse en una serie de dominios individuales en cada uno de los cuales la imanación presenta una de las dos orientaciones admisibles; estos dominios se llaman *dominios de imanación espontánea* o, simplemente, *dominios*. La determinación práctica de la estructura de equilibrio termodinámico de una sustancia ferromagnética exige considerar el cuerpo en conjunto, teniendo en cuenta su forma y dimensiones concretas; volveremos a tratar de esta cuestión en el § 39.

Consideremos una porción del cuerpo pequeña comparada con su volumen total, pero grande en comparación con las dimensiones de los dominios. El campo H_x se puede considerar constante en toda esta porción, y por $\bar{\mathbf{M}}$ y $\bar{\mathbf{B}}$ designamos los valores de \mathbf{M} y \mathbf{B} promediados en dicho volumen. Junto con H_x es también constante la componente transversal $M_x = H_x/\beta$ de la imanación. En cambio, la componente longitudinal M_z en diferentes dominios difiere en el signo, de modo que su valor medio en ningún caso supera a $|M_z|$. Teniendo también en cuenta que en todo el volumen es $H_z = 0$, para la inducción media se tiene:

$$\bar{B}_x = H_x \left(1 + \frac{4\pi}{\beta} \right), \quad \bar{B}_z < 4\pi \sqrt{\left(M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2} \right)}. \quad (37.9)$$

Mediante estas fórmulas se determina el intervalo de valores de la inducción media que corresponde a la estructura en dominios de una sustancia ferromagnética uniáxica.

Pasemos a los cristales ferromagnéticos del sistema cúbico. Sus propiedades difieren esencialmente de las propiedades de los cristales uniáxicos (y biáxicos). La razón de ello consiste en que la única combinación de segundo grado que es invariante respecto de las transformaciones de simetría cúbica y que es posible formar a partir de las componentes del vector \mathbf{M} es la suma $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$, que no depende de la dirección de \mathbf{M} . Por consiguiente, el primer término no nulo en el desarrollo de la energía de anisotropía de un cristal cúbico no es un término de segundo grado, sino de cuarto. A esto se debe el que los efectos de la anisotropía magnética en los cristales cúbicos sea, en general, más débil que en los cristales uniáxicos y biáxicos.

La simetría cúbica admite dos invariantes de cuarto grado formados a partir de las componentes del vector \mathbf{M} :

$$M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4).$$

Estos invariantes, sin embargo, no son en este caso independientes, puesto que su suma es la magnitud $\frac{1}{2}(M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)^2$, que no depende de la dirección. Por consiguiente, la energía de anisotropía de un cuerpo ferromagnético del sistema cúbico contiene (dentro de la aproximación considerada*) solamente una constante y puede escribirse en la forma

$$U_{\text{aniso}} = \beta(M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2), \quad (37.10)$$

o bien, de manera equivalente,

$$U_{\text{aniso}} = -\frac{1}{2}\beta(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4). \quad (37.11)$$

Cuando $\beta > 0$ ** la energía de anisotropía alcanza valores mínimos iguales para tres orientaciones del vector \mathbf{M} —paralelamente a las tres aristas del cubo (ejes x, y, z ; direcciones cristalográficas $[100], [010], [001]$). Así pues, en este caso el cristal posee tres ejes de imanación fácil equivalentes.

En cambio, si $\beta < 0$ *** la energía de anisotropía es mínima para $M_x^2 = M_y^2 = M_z^2 = \frac{1}{3}M^2$, es decir, cuando el vector \mathbf{M} está dirigido en el sentido de cualquiera de las cuatro diagonales espaciales del cubo (direcciones cristalográficas $[111], [\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$, etc.). Éstas son, pues, las direcciones de imanación fácil en este caso.

Hay que hacer notar que un cristal cúbico ferromagnético, imanado espontáneamente a lo largo de cualquiera de sus ejes de imanación fácil, pierde, estrictamente hablando, la simetría cúbica (debido a lo cual tiene lugar un desplazamiento de los átomos, es decir, una distorsión de la red cristalina). Un cristal imanado en el sentido de una de las aristas del cubo se convierte en ligeramente tetragonal, y en la imanación a lo largo de una diagonal espacial, en romboédrico. Desde este

* En la aproximación siguiente aparecen términos de sexto grado. Al calcular el número de invariantes de dicho grado independientes, deben excluirse tanto la magnitud M^4 , que es independiente de la dirección, como las expresiones que difieren de los invariantes de cuarto orden tan sólo en el factor M^2 . En definitiva, queda en total un único invariante, para el cual cabe elegir $M_x^2 M_y^2 M_z^2$.

** Este caso se presenta, por ejemplo, en el hierro.

*** Por ejemplo, en el níquel.

punto de vista, los cristales del sistema cúbico difieren de los cristales uniáxicos con una dirección de imanación fácil dirigida en el sentido del eje principal de simetría; es evidente que la imanación en esta dirección no cambia la simetría del cristal.

El estudio de la dependencia de \mathbf{M} respecto de \mathbf{H} para un cristal cúbico puede efectuarse, en principio, de manera análoga a como se procedió anteriormente en el caso de un cristal uniáxico. Sin embargo, debido a la gran complejidad de las ecuaciones, obtener fórmulas analíticas explícitas resulta aquí imposible y no nos detendremos más en considerar esta cuestión.

PROBLEMAS

1. Escribir los términos de orden siguiente (después del segundo) en el desarrollo de U_{aniso} para un cristal uniáxico, términos que conducen a anisotropía en el plano xy .

Solución. El problema se reduce a determinar las combinaciones del menor grado par independientes formadas a partir de las componentes del vector \mathbf{M} e invariantes respecto de las transformaciones de simetría del cristal dado y que no contienen M_x y M_y en la forma de suma $M_x^2 + M_y^2$. En la simetría tetragonal se tiene una de estas combinaciones, para la cual puede elegirse

$$M_x^2 M_y^2$$

(la combinación $\frac{1}{2}(M_x^4 + M_y^4)$, junto con la que precede, da la suma $\frac{1}{2}(M_x^2 + M_y^2)^2$ y, por ello, no es independiente).

En la simetría hexagonal la anisotropía en el plano xy aparece solamente en los términos de sexto grado; como combinación invariante de este orden independiente cabe elegir

$$\frac{1}{6i}[(M_x + iM_y)^6 - (M_x - iM_y)^6] = 2M_x M_y \left(M_x^4 - \frac{10}{3} M_x^2 M_y^2 + M_y^4 \right).$$

La simetría romboédrica admite también este término de sexto orden y a la vez una combinación independiente de cuarto orden, por ejemplo

$$\frac{1}{2} M_z [(M_x + iM_y)^3 + (M_x - iM_y)^3] = M_z M_x (M_x^2 - 3M_y^2).$$

Sin embargo, determinar la dirección de imanación fácil en el plano xy exige (debido a que M_z es pequeña) tener en cuenta al mismo tiempo los términos de cuarto y de sexto orden.

2. Un cristal ferromagnético uniáxico tiene la forma de un elipsoide de revolución (con el eje de imanación fácil coincidente con el de rotación) y se encuentra en un campo magnético exterior. Determinar el intervalo de valores de \mathfrak{H} para los que el cuerpo presentará una estructura en dominios.

Solución. De acuerdo con las propiedades generales de los cuerpos en forma de elipsoide que se encuentran en un campo magnético exterior (§ 8), los valores medios de la inducción $\bar{\mathbf{B}}$ y del campo $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ relativos a la estructura en dominios están ligados con \mathfrak{H} por la relación

$$n\bar{B}_z + (1-n)H_z = \mathfrak{H}_z, \quad \frac{1}{2}(1-n)\bar{B}_x + \frac{1}{2}(1+n)H_x = \mathfrak{H}_x,$$

donde n es el coeficiente de desimanación a lo largo del eje principal del elipsoide (z). Haciendo $H_z = 0$ y utilizando la fórmula (37.9), obtendremos

$$H_x = \frac{\mathfrak{H}_x}{1 + 2\pi(1-n)/\beta}, \quad \bar{B}_z = \frac{\mathfrak{H}_z}{n} < 4\pi \sqrt{\left(M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2}\right)}.$$

Eliminando H_x , se encuentra la desigualdad buscada

$$\frac{\mathfrak{H}_z^2}{(4\pi n)^2} + \frac{\mathfrak{H}_x^2}{[\beta + 2\pi(1-n)]^2} < M^2$$

que determina el intervalo de existencia de una estructura en dominios.

3. Para un cuerpo policristalino en un campo magnético intenso ($H \gg 4\pi M$), determinar la imanación promediada respecto de los cristallitos supuesto que éstos poseen simetría uniaxial.

Solución. En un cristallito, sean θ y ψ los ángulos formados por su dirección de imanación fácil y los vectores \mathbf{M} y \mathbf{H} , respectivamente. Es desde luego evidente que, en un campo intenso, la dirección de \mathbf{M} será próxima a la de \mathbf{H} , es decir el ángulo $\vartheta = \theta - \psi$ es pequeño. Haciendo en (37.4) $\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = MH \cos(\theta - \psi)$ e igualando a cero la derivada $\partial \Phi / \partial \theta$, se obtiene

$$\vartheta \cong \sin \vartheta = -(\beta M / H) \sin \theta \cos \theta.$$

La imanación media está dirigida, evidentemente, a lo largo de \mathbf{H} y su módulo vale:

$$\bar{M} = M \overline{\cos \vartheta} = M(1 - \frac{1}{2}\overline{\vartheta^2}) = M\left(1 - \frac{\beta^2 M^2}{2H^2} \overline{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}\right)$$

donde el trazo significa que se ha promediado respecto de los cristallitos. Suponiendo que todas las direcciones de los ejes de imanación fácil de éstos son igualmente probables, obtendremos

$$\bar{M} = M\left(1 - \frac{\beta^2 M^2}{15H^2}\right).$$

Así pues, la imanación media tiende a la saturación de acuerdo con la ley $\bar{M} - M \sim 1/H^2$.

4. El mismo problema para cristallitos de simetría cúbica.

Solución. Las condiciones de que sea mínima la expresión

$$-\frac{1}{2}\beta(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4) - (H_x M_x + H_y M_y + H_z M_z),$$

con la condición suplementaria $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \text{const}$, conducen a

$$2\beta M_x^3 + H_x = \lambda M_x, 2\beta M_y^3 + H_y = \lambda M_y, 2\beta M_z^3 + H_z = \lambda M_z,$$

donde λ es el factor indeterminado de Lagrange. Para valores de H grandes se sigue de aquí

$$M_x \cong \frac{1}{\lambda} H_x + \frac{1}{\lambda^4} 2\beta H_x^3 + \dots, \text{ etc.},$$

y sumando los cuadrados de estas igualdades encontramos $M^2 \cong H^2 / \lambda^2$, es decir, $\lambda \cong H / M$. El ángulo ϑ formado por \mathbf{M} y \mathbf{H} se deduce de

$$\begin{aligned} \vartheta^2 \cong \sin^2 \vartheta &= \frac{(\mathbf{M} \times \mathbf{H})^2}{M^2 H^2} \\ &= \frac{4\beta^2 M^6}{H^{10}} \sum H_x^2 H_y^2 (H_x^2 - H_y^2)^2, \end{aligned}$$

donde la suma se extiende a las permutaciones cíclicas de los subíndices x, y, z . Promediar esta expresión respecto de las orientaciones de los cristallitos, equivale a promediar con relación a las direcciones del vector \mathbf{H} . Este último promedio se efectúa integrando respecto de los ángulos que determinan la dirección de \mathbf{H} , obteniéndose el resultado*:

$$\bar{M} = M(1 - \frac{1}{2}\overline{\vartheta^2}) = M\left(1 - \frac{8\beta^2 M^6}{105H^2}\right).$$

* Para un cristal cúbico existe también un intervalo de valores del campo en el que MH es grande comparado con la energía de anisotropía, pero pequeño en comparación con $4\pi M^2$. La fórmula obtenida aquí no es entonces aplicable, puesto que al deducirla no se tuvieron en cuenta los campos que aparecen en el cuerpo como resultado de la diversa orientación de las imanaciones en los diferentes cristallitos. Un estudio más preciso conduce también en este caso a la ley $1/H^2$, pero con otro coeficiente. No examinaremos esta cuestión más detenidamente, puesto que estos resultados discrepan, por razones no claras actualmente, de los datos experimentales.

§ 38. Magnetostricción de los cuerpos ferromagnéticos

El cambio de la imanación de un ferromagnético en un campo magnético conduce a su deformación (*magnetostricción*). Este fenómeno puede deberse tanto a las interacciones de intercambio en el cuerpo, como a las relativistas. Dado que la energía de intercambio depende sólo del valor absoluto de la imanación, únicamente variará si cambia la cantidad M en el campo magnético. Aunque este último cambio, en general, es relativamente muy pequeño, la propia energía de intercambio, por otra parte, es grande comparada con la energía de anisotropía. Por ello, los efectos de magnetostricción debidos a ambos tipos de interacción pueden resultar comparables.

Esta situación se presenta en los cristales uniáxicos. Deformaciones apreciables, resultado de una variación en la dirección de \mathbf{M} , tienen lugar en campos $H \sim \beta M$; en cambio, la variación de la cantidad M llega a ser considerable para campos $H \sim 4\pi M$. Esos dos intervalos prácticamente coinciden y, en consecuencia, al estudiar la magnetostricción de los cuerpos ferromagnéticos uniáxicos es necesario, en general, tener en cuenta ambos efectos a la vez. No nos entretendremos aquí en obtener las correspondientes fórmulas, que son bastante complejas.

En los cristales cúbicos la situación es otra debido a que la energía de anisotropía es relativamente pequeña (en tanto que cantidad de cuarto orden). La magnetostricción, que se debe en esencia en este caso al cambio en la dirección de \mathbf{M} , se presenta ya en campos hasta cierto punto débiles en los que cabe prescindir por completo de la variación del valor absoluto de M . Consideremos estos efectos.

El cambio de la energía de interacción relativista en un cuerpo deformado se representa introduciendo en el potencial termodinámico Φ términos magnetoelásticos adicionales que dependen de las componentes del tensor de tensiones elásticas σ_{ik} y de la dirección del vector \mathbf{M} (N. S. Akulov, 1928). Los primeros términos de este tipo no nulos son lineales respecto de σ_{ik} y cuadráticos en los cosenos directores del vector \mathbf{M} (esto último, de nuevo, en virtud de la simetría respecto del cambio de sentido del tiempo). En el caso general tenemos, por consiguiente, para la energía magnetoelástica una expresión de la forma

$$U_{m-el} = -\lambda_{iklm}\sigma_{ik}M_lM_m, \quad (38.1)$$

donde λ_{iklm} es un tensor de cuarto orden, simétrico respecto de los pares de subíndices i, k y l, m (pero no respecto de la permutación del par i, k con el par l, m). Cerca del punto de Curie, donde el desarrollo en potencias de los cosenos directores del vector \mathbf{M} equivale a un desarrollo en potencias de sus componentes, las magnitudes λ_{iklm} tienden a comportarse como constantes.

Al contar el número de componentes independientes del tensor λ_{iklm} no hay que perder de vista que los términos en (38.1) que contienen las componentes de \mathbf{M} en la combinación $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ son independientes de la dirección de \mathbf{M} y, en consecuencia, pueden ser excluidos de la energía magnetoelástica*. Teniendo

* La relativa arbitrariedad que resulta como consecuencia de esto en la elección de λ_{iklm} , traduce simplemente el carácter convencional que cobra el elegir la dirección de \mathbf{M} respecto de la cual (cuando no existen fuerzas mecánicas externas aplicadas) consideramos que el cristal no está deformado.

esto en cuenta se llega a la conclusión de que, en un cristal cúbico, la energía magnetoelástica contiene dos coeficientes independientes; resulta conveniente escribirla en la forma

$$U_{m-el} = -\lambda_1(\sigma_{xx}M_x^2 + \sigma_{yy}M_y^2 + \sigma_{zz}M_z^2) - 2\lambda_2(\sigma_{xy}M_xM_y + \sigma_{xz}M_xM_z + \sigma_{yz}M_yM_z). \quad (38.2)$$

El tensor de deformación se obtiene derivando $\tilde{\Phi}$ respecto de las correspondientes componentes σ_{ik} :

$$u_{ik} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\sigma_{ik},$$

donde en $\tilde{\Phi}$ hay que incluir también (con signo opuesto; véase la nota de la pág. 90) la energía elástica ordinaria. En un cristal cúbico esta última contiene tres coeficientes elásticos independientes y es de la forma

$$U_{el} = \frac{1}{2}k_1(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + k_2(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + k_3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2). \quad (38.3)$$

Para el tensor de deformación se obtiene*

$$\begin{aligned} u_{xx} &= k_1\sigma_{xx} + k_2(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \lambda_1M_x^2, \\ u_{xy} &= k_3\sigma_{xy} + \lambda_2M_xM_y \end{aligned} \quad (38.4)$$

(y análogamente para las demás componentes).

Estas fórmulas ponen de manifiesto todos los efectos de magnetostricción (en el intervalo de intensidades del campo considerado). En particular, si no existen tensiones internas, las fórmulas

$$u_{xx} = \lambda_1M_x^2, \quad u_{xy} = \lambda_2M_xM_y, \text{ etc.}$$

determinan el cambio de la deformación cuando varía la dirección de imanación. Recordemos que el valor de la deformación es, en cierto sentido, resultado de un convenio debido a la arbitrariedad en la elección de aquella dirección de \mathbf{M} para la cual se admite que no existe deformación.

Consideremos ahora la magnetostricción en campos tan intensos ($H \gg 4\pi M$) que la energía de anisotropía carece de importancia y desaparece ya la estructura en dominios, de modo que la dirección de \mathbf{M} se puede considerar que coincide con la de \mathbf{H} .

Debido a que se prescinde de la energía de anisotropía, la simetría concreta del cristal ya no cuenta, con lo cual las fórmulas que siguen a continuación son aplicables en igual medida a cualquier sustancia ferromagnética.

Supongamos que un cuerpo se encuentra en un campo magnético exterior homogéneo \mathfrak{H} . Su potencial termodinámico total \mathfrak{G} ** viene dado por la fórmula

$$\mathfrak{G} = -\mathcal{M} \cdot \mathfrak{H} = -MV\mathfrak{H}, \quad (38.5)$$

* Al derivar $\tilde{\Phi}$ hay que tener en cuenta la observación hecha en la pág. 92.

** Para \mathfrak{G} se adopta aquí la definición de que ya se habló en el § 12. Es imposible aplicarla únicamente cuando existe una importante deformación no homogénea del cuerpo.

donde $\mathcal{M} = MV$ es el momento magnético total del cuerpo imanado homogéneamente en la dirección del campo; hemos prescindido aquí del término \mathcal{G}_0 que no depende de éste. El tensor de deformación, promediado en el volumen del cuerpo, es

$$\bar{u}_{ik} = -(1/V) \partial \mathcal{G} / \partial \sigma_{ik},$$

de donde

$$\bar{u}_{ik} = \frac{\mathcal{H}}{V} \frac{\partial(MV)}{\partial \sigma_{ik}}. \quad (38.6)$$

Por consiguiente, la deformación queda determinada por la dependencia de la imanación respecto de las tensiones internas.

Para una simetría cúbica del cristal, cualquier tensor de segundo orden simétrico que caracterice sus propiedades se reduce a un escalar multiplicado por δ_{ik} . Esto vale también para el tensor $\partial(VM)/\partial \sigma_{ik}$, de modo que la deformación debida a magnetostricción queda limitada en este caso a una dilatación o contracción uniformes.

Si tan sólo nos interesa la variación δV del volumen total del cuerpo, ésta se puede obtener simplemente derivando \mathcal{G} respecto de la presión:

$$\delta V = \partial \mathcal{G} / \partial p = -\mathcal{H} \partial(MV) / \partial p, \quad (38.7)$$

donde por p hay que entender una presión uniforme aplicada a la superficie del mismo.

PROBLEMA

Determinar el cambio de volumen por magnetostricción de un elipsoide ferromagnético en un campo exterior $\mathcal{H} \sim 4\pi M$ paralelo a uno de sus ejes; se supone que la substancia ferromagnética pertenece al sistema cúbico*.

Solución. Prescindiendo de la energía de anisotropía, la región en que existe una estructura en dominios se determina por la desigualdad $\bar{B} < 4\pi M$ cuando $H = 0$ (el trazo significa el promedio en el volumen del cuerpo; cf. § 37). En un elipsoide $n\bar{B} + (1-n)\bar{H} = \mathcal{H}$, y haciendo $H = 0$ se encuentra que la estructura en dominios se presenta cuando

$$\mathcal{H} < 4\pi nM.$$

Dado que $n\bar{B} = 4\pi n\bar{M} = \mathcal{H}$, la imanación media vale

$$\bar{M} = \mathcal{H}/4\pi n.$$

De aquí se sigue para el potencial termodinámico

$$\mathcal{G} = -V \int_0^{\mathcal{H}} \bar{M} d\mathcal{H} = -\mathcal{H}^2 V / 8\pi n. \quad (1)$$

Si $\mathcal{H} > 4\pi nM$, el elipsoide se imana por completo en la dirección del campo: $\bar{M} = M$. Entonces

$$\mathcal{G} = -M\mathcal{H}V + 2\pi M^2 V n \quad (2)$$

* En un ferromagnético uniaxial y para $\mathcal{H} \sim 4\pi M$ habría que tener en cuenta la energía de anisotropía, lo que no es necesario hacer en el caso de un cristal cúbico.

(cuando $\mathfrak{H} = 4\pi Mn$ las expresiones (1) y (2) coinciden).

La variación de volumen buscada se obtiene derivando \mathfrak{g} respecto de la presión:

$$\delta V = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n} \frac{\partial V}{\partial p} \text{ para } \mathfrak{H} < 4\pi nM,$$

$$\delta V = -\mathfrak{H} \frac{\partial(MV)}{\partial p} + 2\pi n \frac{\partial(M^2V)}{\partial p} \text{ para } \mathfrak{H} > 4\pi nM.$$

Cuando $\mathfrak{H} \gg 4\pi nM$, volvemos a la fórmula (38.7) obtenida en el texto.

§ 39. Estructura en dominios de los ferromagnéticos

Conforme se ha indicado ya en el § 37, existe un amplio conjunto de estados en los que una substancia ferromagnética debe poseer la llamada *estructura en dominios*, es decir, ha de descomponerse en toda una serie de regiones en las que la imanación tiene direcciones distintas*. Esto vale, en particular, para un cuerpo ferromagnético que no se encuentra en un campo magnético exterior.

Algunas conclusiones acerca de la forma de las superficies de separación entre dominios pueden deducirse directamente de las condiciones de contorno para el campo magnético. Dado que el campo \mathbf{H} es el mismo en dominios contiguos, la condición de continuidad de la componente normal B_n de la inducción se reduce a la condición de que sea continua M_n . En los cristales uniaxiales, la imanación posee signos opuestos de M_z en dominios diferentes, mientras son iguales M_x y M_y . En estas condiciones, la continuidad de M_n significa que la superficie de separación debe ser paralela al eje z , es decir, al eje de imanación fácil.

Consideremos, en primer lugar, las propiedades de las superficies frontera, prescindiendo de su dependencia respecto de la forma concreta de los dominios. Estas fronteras son, en realidad, capas de transición relativamente delgadas en las que la dirección de la imanación varía de modo continuo al pasar de la dirección en uno de los dominios a la correspondiente en el otro. La «anchura» de esta capa y la marcha de la variación de \mathbf{M} en ella vienen determinadas por las condiciones de equilibrio termodinámico. Hay que tener en cuenta la energía adicional debida a la no-homogeneidad de la imanación. La contribución mayor a esta «energía de no-homogeneidad» la da la interacción de intercambio. Desde el punto de vista macroscópico esta energía puede expresarse en función de las derivadas de \mathbf{M} respecto de las coordenadas. Cabe proceder así, de manera general, si el gradiente de la dirección de \mathbf{M} es relativamente pequeño; esta condición significa que un cambio notable en la dirección de los momentos magnéticos se produce solamente a distancias que son grandes comparadas con las distancias interatómicas. Es evidente que esta condición se cumple en el presente caso, puesto que una diferencia considerable entre las direcciones de los momentos magnéticos de átomos vecinos

* El primero en introducir el concepto de dominios fue *P. Weiss* (1907). La teoría termodinámica de los dominios la establecieron *L. D. Landau* y *E. M. Lifshitz* (1935).

conduciría a un aumento muy grande de la energía de intercambio y, por consiguiente, sería desventajoso termodinámicamente.

Designemos la densidad de «energía de no homogeneidad» por $U_{\text{no-ho}}$. Los términos mayores en su desarrollo en potencias de las derivadas de diferentes órdenes de las componentes de \mathbf{M} son términos cuadráticos respecto de las derivadas primeras (no pueden haber términos lineales en virtud de la simetría respecto del cambio de sentido del tiempo). Además, debido a que su origen son las interacciones de intercambio, $U_{\text{no-ho}}$ no puede depender de la dirección absoluta de \mathbf{M} en un punto dado del cristal. La expresión más general que satisface estas condiciones es

$$U_{\text{no-ho}} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M_i}{\partial x_i} \frac{\partial M_k}{\partial x_k}, \quad (39.1)$$

donde α_{ik} es un tensor simétrico. Esta forma cuadrática (respecto de las derivadas) debe ser, además, definida positiva. En un cristal uniáxico el tensor α_{ik} posee dos componentes independientes y la energía de no-homogeneidad tiene la forma

$$U_{\text{no-ho}} = \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \alpha_2 \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2, \quad (39.2)$$

donde α_1 y α_2 son positivos. En un cristal cúbico se tiene, además, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Respecto de la expresión (39.1) hay que hacer la siguiente observación. Un sentido termodinámico real lo posee no la propia magnitud $U_{\text{no-ho}}$, sino su integral extendida al volumen del cuerpo. Por esto no es necesario incluir en $U_{\text{no-ho}}$ los términos que contienen los productos de las componentes de \mathbf{M} por sus derivadas segundas respecto de las coordenadas, a pesar de que tales términos son también formalmente del mismo orden de magnitud que (39.1). La razón de ello estriba en que, al integrar en el volumen considerado, se transforman en productos de derivadas primeras, es decir, quedan incluidos en la misma expresión (39.1)*.

Consideremos, por ejemplo, la frontera de separación entre dominios en un cristal uniáxico, suponiendo que el vector \mathbf{M} es paralelo (o antiparalelo) al eje de imagnación fácil (eje z); así ocurre, en particular, cuando no existe campo magnético exterior.

La estructura de la capa de transición viene determinada por la condición de que sea mínima su energía libre total**. De un lado, la energía de intercambio tiende a aumentar el grosor de la capa (es decir, a que la dirección de \mathbf{M} en ella varíe de manera más lenta). En sentido opuesto, en cambio, actúa la energía de anisotropía, puesto que cualquier desviación de \mathbf{M} respecto de la dirección de imagnación fácil la aumenta.

* La simetría del cristal puede admitir la existencia de términos que contienen productos de las derivadas $\partial M_i / \partial x_i$ por las propias componentes M_i . Sin embargo, tales términos, al integrar en el volumen del cuerpo, darían lugar a expresiones que dependen solamente de las propiedades de su superficie.

** Aquí es más correcto hablar de energía libre total, y no de potencial termodinámico total, teniendo en cuenta la posibilidad de una deformación notablemente no homogénea en la capa.

Elijamos el eje x de modo que sea perpendicular al plano de la capa; la dirección de \mathbf{M} depende solamente de esta coordenada. La rotación del vector \mathbf{M} a través de la capa debe producirse en el plano yz , es decir, en todos los puntos $M_x = 0$. Esto se ve fácilmente en virtud del simple razonamiento que sigue. Las energías de no-homogeneidad y de anisotropía no dependen en modo alguno de cuál sea el plano en que tiene lugar la rotación de la imanación. Pero si existiera una componente M_x diferente de cero, ello conduciría inevitablemente a la aparición de un campo magnético, lo que, claro está, sería desventajoso desde el punto de vista termodinámico, pues supondría una energía magnética suplementaria debida a aquél. En efecto, en el volumen ocupado por los dominios es $M_x = 0$, y si en la capa de transición fuese $M_x \neq 0$, también sería diferente de cero la $\text{div } \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x}$; pero dado que $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{H} + 4\pi \text{div } \mathbf{M} = 0$, junto con $\text{div } \mathbf{M} \neq 0$ debiera ser también $\text{div } \mathbf{H} \neq 0$, es decir, se tendría $\mathbf{H} \neq 0$.

Sea θ el ángulo formado por \mathbf{M} y el eje z . Entonces las componentes de \mathbf{M} serán:

$$M_x = 0, \quad M_y = M \sin \theta, \quad M_z = M \cos \theta.$$

La suma de las energías de no-homogeneidad y de anisotropía viene dada por la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{2}\alpha_1(M_y'^2 + M_z'^2) + \frac{1}{2}\beta M_y^2] dx = \frac{1}{2}M^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 \theta'^2 + \beta \sin^2 \theta) dx \quad (39.3)$$

(el símbolo $'$) representa la derivación respecto de x). Los demás términos en la energía libre son independientes de la estructura de la capa y, por consiguiente, cabe prescindir de ellos aquí. Para determinar la función $\theta(x)$ que hace mínima esta integral, escribamos la ecuación de Euler correspondiente

$$\alpha_1 \theta'' - \beta \sin \theta \cos \theta = 0,$$

de la cual

$$\theta'^2 - (\beta/\alpha_1) \sin^2 \theta = \text{const}$$

es una integral primera.

Suponiendo que el grosor de la capa de transición es pequeño comparado con la anchura de los propios dominios, podemos escribir las condiciones de contorno para esta ecuación en la forma:

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \text{ para } x = -\infty, & \theta &= \pi \text{ para } x = +\infty, \\ \theta' &= 0 \text{ para } x = \pm \infty & & (\text{para } \theta = 0 \text{ o } \pi). \end{aligned} \quad (39.4)$$

Éstas expresan el hecho de que los dominios contiguos están imanados en sentidos opuestos. Se tiene entonces $\text{const} = 0$, e integrando la ecuación

$$\theta'^2 = (\beta/\alpha_1) \sin^2 \theta,$$

se obtiene

$$\cos \theta = - \operatorname{tgh} [x\sqrt{(\beta/\alpha_1)}], \quad (39.5)$$

con lo que queda determinado cómo varía la dirección de imanación en la capa de transición. Su «anchura» es $\delta \sim \sqrt{\alpha_1/\beta}$.

Substituyendo (39.5) en (39.3), obtendremos

$$\beta M^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 [x\sqrt{(\beta/\alpha_1)}]},$$

o bien, efectuando la integración,

$$2M^2\sqrt{(\alpha_1\beta)}. \quad (39.6)$$

Si se considera la frontera de separación entre dominios como una superficie geométrica, la magnitud (39.6) es la «tensión superficial» que hay que atribuirle para tener en cuenta la energía necesaria en la formación de dicha frontera.

La forma y el tamaño de los dominios en equilibrio termodinámico se determinan por la condición de que sea mínimo el potencial termodinámico total. Tanto una como otro dependen considerablemente de la forma y de las dimensiones concretas del cuerpo. En el caso más simple de una sustancia ferromagnética cuya forma es la de una placa planoparalela, los dominios pueden adoptar, en principio, la forma de capas paralelas o de «filamentos» que atraviesan el cuerpo desde una de sus caras hasta la otra. Para concretar, en lo que sigue nos referiremos a capas*.

La aparición de cada nueva frontera entre dominios conduce a un aumento de la energía total de «tensión superficial». Este factor, por consiguiente, tiende a disminuir el número de dominios, es decir, a aumentar su grosor.

En sentido opuesto actúa la energía adicional que se produce cerca de la superficie exterior del cuerpo con la que están en contacto los dominios. En el cuerpo, el campo magnético $\mathbf{H} = 0$; igual a cero es también la energía de anisotropía, puesto que el vector \mathbf{M} se encuentra en las direcciones de imanación fácil. Pero cerca de la superficie cambia la situación.

En el caso límite en que el coeficiente β de la energía de anisotropía es grande, las capas deberán aparecer hacia la superficie del cuerpo sin que varíen las direcciones de \mathbf{M} (fig. 21 a; en la figura se supone, para concretar, que la superficie del cuerpo es perpendicular a la dirección de imanación fácil). Pero entonces cerca de la superficie existe un campo magnético que penetra en el espacio en torno y hacia el interior del cuerpo, hasta una distancia que es del orden de magnitud del grosor de las capas a .

Por el contrario, en el caso opuesto de valores de β pequeños, resulta más ventajosa una distribución de la imanación en la que se excluye la aparición de un campo magnético y \mathbf{M} se desvía de la dirección de imanación fácil. Cuando $\mathbf{H} = 0$ debe ser $\operatorname{div} \mathbf{B} = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} = 0$ y sobre todas las fronteras de los dominios, al igual que en la superficie libre del cuerpo, la componente M_n debe ser continua.

* La estructura estratificada de los dominios se presenta, al parecer, en la mayoría de los casos.

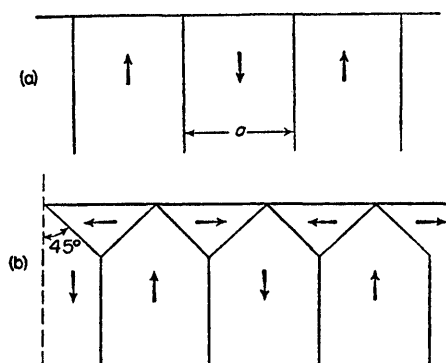


FIG. 21

Esto se consigue mediante la formación de «dominios de cierre» cuya sección es triangular (fig. 21 b) y en los cuales la imanación resulta paralela a la superficie del cuerpo. El volumen total de estas regiones, y con él también la energía de anisotropía en ellas, es proporcional al grosor de las capas a .

Así pues, en todos los casos la salida de los dominios a la superficie conduce a la aparición de una energía suplementaria tanto mayor cuanto mayor es la anchura de los dominios. Por ello, este efecto actúa en el sentido de «adelgazar» los dominios.

La anchura real de los dominios viene determinada por el juego de estas dos tendencias opuestas. Supongamos, por ejemplo, que los dominios (en una placa) tienen la forma de capas planoparalelas de grosor constante. El número de dominios es proporcional a $1/a$ y la energía de tensión superficial sobre la superficie de separación entre ellos es proporcional a su área total, es decir, $\sim L/a$, donde L es la longitud del cuerpo en la dirección de los dominios (es decir, el grosor de la placa). La «energía de salida» de los dominios a la superficie de la placa, en cambio, es proporcional a a . La suma de estas dos energías, como función de a , es mínima para un cierto valor de a proporcional a \sqrt{L} .

Por lo tanto, el grosor de los dominios crece al aumentar las dimensiones del cuerpo. Pero la ley cuantitativa $a \sim L^{1/2}$ de este crecimiento, ligada con la hipótesis de que sea constante el grosor de los dominios, no puede ser correcta, evidentemente, para valores arbitrarios de L . La razón de ello estriba en que el grosor de los dominios al salir a la superficie del cuerpo no puede superar un cierto valor límite a_k que depende de las propiedades de la propia substancia ferromagnética, pero no de la forma y del tamaño del cuerpo como un todo. Aquel valor viene determinado por el momento en que, a medida que aumenta a , pasa a ser termodinámicamente favorable el «desdoblamiento» del dominio cerca de la superficie del cuerpo a una profundidad $\sim a$. Dicho momento se presenta inevitablemente, puesto que la «energía de salida» de un dominio crece como a^2 y la energía suplementaria de tensión superficial, que aparece al descomponerse el dominio, tan sólo como a .

Llegamos así a la conclusión de que a medida que aumentan las dimensiones del cuerpo, y con ellas también el grosor de los dominios, debe tener lugar una «ramificación» progresiva de los dominios al acercarse a la superficie del cuerpo (E. M. Lifshitz, 1944). No nos entretendremos en seguir estudiando aquí las posibilidades que se presentan entonces y que no han sido explicadas todavía*.

En cambio, a medida que disminuyen las dimensiones del cuerpo, la formación de dominios llega a ser en último término por completo desventajosa termodinámicamente, con lo cual las partículas ferromagnéticas suficientemente pequeñas constituyen formaciones de «un solo dominio» homogéneamente imanadas. El criterio que da sus dimensiones L se obtiene comparando la energía magnética de una partícula imanada homogéneamente con la «energía de no-homogeneidad» que aparecería si se diera una falta considerable de homogeneidad en la distribución de la imanación en su volumen. La primera es del orden de magnitud de M^2V , y la segunda del de $\alpha M^2V/L^2$. Por ello, la condición de que exista un solo dominio es

$$L^2 \ll \alpha. \quad (39.7)$$

El potencial termodinámico de una partícula imanada homogéneamente en ausencia de un campo magnético exterior se halla haciendo en la fórmula

$$\mathcal{G}_0 = \int \left[\tilde{\Phi} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \mathbf{M} \right] dV$$

(cf. (31.7)) $\mathfrak{H} = 0$ y substituyendo en vez de $\tilde{\Phi}$ la suma de la expresión (36.1) y de la energía de anisotropía U_{aniso} :

$$\mathcal{G}_0 = VU_{\text{aniso}} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \int \mathbf{H} dV \quad (39.8)$$

(hemos prescindido de la constante \mathcal{G}_0 que carece de importancia). Dado el carácter lineal de la relación entre \mathbf{M} y \mathbf{H} , el segundo término es una expresión cuadrática en las componentes de \mathbf{M} :

$$\mathcal{G}_0 = VU_{\text{aniso}} + \frac{1}{2} V a_{ik} M_i M_k, \quad (39.9)$$

donde el tensor simétrico a_{ik} depende solamente de la forma de la partícula. Así, si la forma de ésta es la de un elipsoide, \mathbf{H} es constante en todo su volumen y está ligado con \mathbf{M} (cuando $\mathfrak{H} = 0$) por la relación

$$H_i + n_{ik}(B_k - H_k) = H_i + 4\pi n_{ik} M_k = 0$$

(cf. (8.10)). Por consiguiente, en este caso las magnitudes a_{ik} se expresan en función de las componentes del tensor de los coeficientes de desimanación de acuerdo con

$$a_{ik} = 4\pi n_{ik}.$$

* Véase S. V. Vonsovskii, Ia. S. Shour, *Ferromagnetizm* (Ferromagnetismo) Moscou, 1948; C. Kittel, *Reviews of Modern Physics*, 21, 541, 1949; E. M. Lifshitz, *ZhETF*, 15, 97, 1945.

La dirección de imanación de una partícula en un campo magnético exterior \mathfrak{H} se determina por la condición de que sea mínimo \mathfrak{G} , al que hay que añadir ahora el término $-V\mathfrak{H}\cdot\mathbf{M}$. Para un cristal cúbico basta escribir

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2}Va_{ik}M_iM_k - V\mathfrak{H}\cdot\mathbf{M}, \quad (39.10)$$

sin tener en cuenta la energía de anisotropía. En los cuerpos ferromagnéticos uniaxiales (o biaxiales) esta última, en cambio, es una cantidad del mismo orden que los restantes términos. Escribiéndola en la forma (37.1), tenemos:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2}V(a_{ik} + \beta_{ik})M_iM_k - V\mathfrak{H}\cdot\mathbf{M}. \quad (39.11)$$

El problema así planteado coincide, desde el punto de vista matemático, con el estudiado en el § 37 acerca de la dependencia del valor local de \mathbf{M} respecto del campo local \mathbf{H} , problema del que difiere tan sólo en la substitución de \mathbf{H} por \mathfrak{H} y de β_{ik} por a_{ik} o bien por $a_{ik} + \beta_{ik}$.

PROBLEMAS

1. Determinar el coeficiente de «tensión superficial» en la frontera entre dominios para un cristal del sistema cúbico. La superficie de separación forma un ángulo χ con el plano (100) (plano yz), y los dominios están imanados a lo largo del eje [001] de imanación fácil (eje z).

Solución. Junto con los ejes cristalográficos x, y, z , introduzcamos un sistema de coordenadas x', y', z' tal que los ejes z y z' coincidan y los planos $y'z'$ e yz formen un ángulo igual a χ . La necesidad de evitar la aparición de un campo magnético notable tiende a mantener (como en un cristal uniaxial) el vector \mathbf{M} en el plano $y'z'$ en la capa de transición. Sin embargo, la existencia de la anisotropía magnética en el plano $x'y'$ aparta un poco a \mathbf{M} del plano $y'z'$. Con todo, teniendo en cuenta que la energía de anisotropía en un cristal cúbico es pequeña, la componente $M_{x'}$ será a su vez pequeña y cabe prescindir de ella conservando una aproximación suficiente. Entonces

$$M_{x'} = 0, M_{y'} = M \sin \theta, M_{z'} = M \cos \theta,$$

(θ es el ángulo formado por \mathbf{M} y el eje z) o bien, en el sistema x, y, z ,

$$M_x = M \sin \theta \sin \chi, M_y = M \sin \theta \cos \chi, M_z = M \cos \theta.$$

Para la suma de las energías de no-homogeneidad y anisotropía en la capa de transición obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \alpha M^2 \left(\frac{d\theta}{dx'} \right)^2 + \beta M^4 (\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^4 \theta \sin^2 2\chi) \right\} dx'. \quad (1)$$

Determinando el mínimo de esta integral con las mismas condiciones de contorno (39.4), se obtendrá

$$\sinh x' \sqrt{(2\beta M^2/\alpha)} = - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin 2\chi}. \quad (2)$$

Substituyendo en (1) y efectuando la integración, resulta para la tensión superficial buscada el valor

$$M^3 \sqrt{(2\alpha\beta)} \left\{ 1 + \frac{\sin^2 2\chi}{2\sqrt{(4 - \sin^2 2\chi)}} \operatorname{arcosh} \frac{2}{|\sin 2\chi|} \right\}. \quad (3)$$

La fórmula (3) es aplicable cualquiera que sea el valor del ángulo χ . Pero la ecuación (2) relativa

a la estructura de la capa de transición deja de ser aplicable cuando $\chi \cong 0$ o $\frac{\pi}{2}$. En este caso, una anchura no nula de la capa de transición se obtiene solamente cuando en ella se tiene en cuenta la magnetostricción.

2. Determinar la energía del campo magnético cerca de la superficie de un cuerpo ferromagnético en el cual los dominios planoparalelos perpendiculares a la misma salen sin que cambie la dirección de su imanación (fig. 21 a).

Solución. El problema de determinar el campo magnético cerca de una superficie de tales características es equivalente al problema electrostático de determinar el campo creado por un plano dividido en bandas cargadas positiva y negativamente con una densidad superficial $\sigma = \pm M$.

Tomemos como plano $z = 0$ la superficie de dicho cuerpo y elijamos el eje x en una dirección perpendicular al plano de los dominios. La «densidad superficial de carga» $\sigma(x)$ es una función periódica de período $2a$ (a es la anchura de un dominio) igual en uno de los períodos a

$$\sigma = -M \text{ para } -a < x < 0, \sigma = +M \text{ para } 0 < x < a.$$

Su desarrollo en serie de Fourier es

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{a}, \quad c_n = 4M/(2n+1)\pi.$$

El potencial del campo satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

tomemos para él una expresión de la forma

$$\phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{a} e^{\mp(2n+1)\pi z/a}$$

(los dos signos en el exponente corresponden a los semiespacios $z > 0$ y $z < 0$). Los coeficientes b_n se determinan por la condición de contorno

$$-[\partial \phi / \partial z]_{z=0+} + [\partial \phi / \partial z]_{z=0-} = 4\pi \sigma,$$

de donde

$$b_n = 2ac_n/(2n+1).$$

La energía del campo se puede calcular como integral $\frac{1}{2} \int \sigma \phi \, df$ extendida a la «superficie cargada». Refiriendo la energía a 1 cm² de superficie, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\sigma \phi]_{z=0} \, dx &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n \\ &= \frac{8aM^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}. \end{aligned}$$

La suma que aquí aparece es igual a 1,052, por lo que dicha energía es

$$0,852 \, aM^2.$$

§ 40. Punto de Curie antiferromagnético

La transición de un cuerpo del estado antiferromagnético al estado paramagnético se produce de ordinario, como también en los cuerpos ferromagnéticos, en un cambio de fase de segunda especie. Dado que no existe magnetización espontánea ni en el estado antiferromagnético ni en el paramagnético, la variación de las propiedades magnéticas macroscópicas de la materia al pasar por el punto de Curie antiferromagnético afecta solamente a su susceptibilidad magnética. De acuerdo con las propiedades generales de los cambios de estado de segunda especie, las propias componentes del tensor μ_{ik} son continuas en el punto de transición, mientras que sus derivadas primeras respecto de la temperatura experimentan un salto.

Un estudio cuantitativo de las transiciones antiferromagnéticas debe efectuarse acudiendo a la teoría general de los cambios de fase de segunda especie. Los parámetros respecto de los cuales hay que desarrollar el potencial termodinámico cerca del punto de transición son, en este caso (según sea la simetría magnética concreta de la red), ciertas combinaciones lineales de los momentos magnéticos medios $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots$ en los diferentes nudos de la celda elemental. Al acercarnos al punto de transición, todos estos parámetros tienden, como siempre, a cero proporcionalmente a $\sqrt{\Theta - T}$.

El potencial termodinámico de una sustancia antiferromagnética puede contener términos de diferente origen vinculados a las interacciones de los momentos magnéticos, tanto las de intercambio como las «relativistas» (cf. el principio del § 36). Los primeros contienen aquellas combinaciones de los momentos $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots$ que sólo dependen de su orientación relativa, pero no de la orientación general respecto de la red cristalográfica. En cambio, los segundos dependen de la dirección cristalográfica de los momentos, es decir, conducen a una anisotropía magnética del cristal.

Como en el caso de los cuerpos ferromagnéticos, la fuerte interacción de intercambio es el factor fundamental que establece una distribución ordenada de los momentos magnéticos en una sustancia antiferromagnética. Las interacciones relativistas, por su parte, conducen a una anisotropía cristalográfica de sus propiedades magnéticas.

Existen determinados tipos de simetría magnética que permiten la existencia del ferromagnetismo pero en los que, a la vez, el carácter de la interacción de intercambio es tal que no conduce por sí sola al ferromagnetismo. En estos casos la magnetización espontánea se produce únicamente como resultado de las interacciones relativistas y es, en consecuencia, muy pequeña. Un cuerpo de estas características es un cuerpo antiferromagnético en el que, sin embargo, la distribución de momentos magnéticos difiere ligeramente de la correspondiente a un antiferromagnético, de tal manera que en determinada dirección los momentos magnéticos no se compensan totalmente (I. E. Dzialoshinskiĭ, 1957)*. La razón del valor del «mo-

* Véase ZhETF, 32, 1547, 1957.

mento ferromagnético» al valor que tendría en el caso de una ordenación ferromagnética pura es del orden de magnitud de la razón de la densidad de energía relativista a la de intercambio ($\sim 10^{-3}$ - 10^{-5}).

En campos magnéticos suficientemente intensos, la estructura antiferromagnética de un cristal no puede ser termodinámicamente estable; en este caso, la orientación paralela de todos los momentos a lo largo del campo es ventajosa desde el punto de vista energético. Este cambio de orientación está ligado de ordinario con una variación (disminución) de la celda elemental de estructura magnética de la red y, como en cualquier cambio de las propiedades de simetría, puede ocurrir solamente en un determinado punto de cambio de fase; en la mayor parte de casos, este punto será un punto de transición de segunda especie. El «campo crítico» H_{cr} que destruye el antiferromagnetismo es una función de la temperatura que se anula para $T = \Theta$, donde Θ es el punto de transición en ausencia del campo. Así pues, en el diagrama TH el dominio de existencia de la fase antiferromagnética está limitado por una determinada curva.

CAPÍTULO VI

SUPERCONDUCTIBILIDAD

§ 41. Propiedades magnéticas de los superconductores

Muchos metales a temperaturas próximas al cero absoluto pasan a un estado especial cuya propiedad más notable (descubierta por Kamerlingh Onnes en 1911) es la llamada *superconductibilidad*, que consiste en la desaparición total de resistencia eléctrica a una corriente continua. La aparición de la superconductibilidad se produce a una temperatura determinada para cada metal, a saber, en el llamado *punto de transición a la superconductibilidad*.

La ausencia de resistencia eléctrica, sin embargo, no es en realidad una propiedad fundamental de un superconductor. Los cambios más profundos al pasar al estado superconductor se producen en las propiedades magnéticas del metal; las variaciones en las propiedades eléctricas son, conforme veremos, consecuencias inevitables de estos cambios.

Las propiedades magnéticas de un metal superconductor se pueden describir de la siguiente manera. Un campo magnético nunca penetra en el interior de un superconductor; dado que la intensidad promedio del campo magnético en el medio es, por definición, la inducción magnética \mathbf{B} , se puede decir también que en el interior de un superconductor se tiene siempre

$$\mathbf{B} = 0 \quad (41.1)$$

(W. Meissner y R. Ochsenfeld, 1933). Esta propiedad se presenta con independencia de en qué condiciones tuvo lugar, de hecho, la transición al estado superconductor. Así, si el enfriamiento de la muestra se produce en un campo magnético, en el momento de la transición las líneas de fuerza magnéticas «son expulsadas» del cuerpo*.

Hay que subrayar, sin embargo, que la igualdad $\mathbf{B} = 0$ no corresponde a una fina capa superficial del cuerpo. Muestra la experiencia que el campo magnético

* Debemos señalar que solamente los superconductores «puros», es decir, los elementos metálicos y los compuestos químicos que los contienen en ciertas proporciones, presentan estas propiedades. Estudiaremos únicamente sustancias de este tipo. En las aleaciones superconductoras, el efecto Meissner no es completo y el campo magnético puede penetrar en el superconductor, aunque no hay todavía ninguna resistencia eléctrica.

La demostración que sigue según la cual la anulación de \mathbf{B} implica que la resistencia sea cero debe tomarse como prueba de que esta ecuación es una condición suficiente, pero no necesaria, para que se anule la resistencia.

penetra en el superconductor hasta una determinada profundidad, que es grande comparada con las distancias interatómicas (frecuentemente del orden de 10^{-5} cm) y depende del metal de que se trate y de la temperatura. Por esta misma razón, la igualdad $\mathbf{B} = 0$ no se cumple en láminas metálicas delgadas o en las partículas coloidales, cuyo espesor o dimensiones es del orden de magnitud de la «profundidad de penetración».

En lo que sigue consideraremos solamente superconductores de dimensiones suficientemente grandes como para que se pueda prescindir del hecho de que el campo magnético penetra en una delgada capa superficial.

Conforme sabemos, sobre la frontera común a dos medios cualesquiera la componente normal de la inducción debe ser continua (esta condición es consecuencia de la ecuación $\text{div } \mathbf{B} = 0$, que siempre se cumple. Dado que dentro del superconductor se tiene $\mathbf{B} = 0$, sobre su superficie la componente normal del campo exterior debe ser también igual a cero, es decir, el campo fuera de un superconductor es siempre tangente a su superficie; las líneas de fuerza magnéticas se ciñen al superconductor.

Teniendo en cuenta esta circunstancia es fácil hallar las fuerzas que actúan sobre un superconductor que se encuentra en un campo magnético. De manera análoga a como procedimos en el § 5 para un conductor ordinario en un campo eléctrico, calcularemos la fuerza (referida a 1 cm^2 de superficie) mediante la expresión $\sigma_{ik}n_k$, donde

$$\sigma_{ik} = (H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}) / 4\pi$$

es el tensor de Maxwell de tensiones para el campo magnético en el vacío. Dado que, en el presente caso, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_e = 0$ (\mathbf{H}_e es el campo fuera del cuerpo en su superficie), obtendremos

$$\mathbf{F}_s = -H_e^2 \mathbf{n} / 8\pi, \quad (41.2)$$

es decir, sobre la superficie del cuerpo actúa una presión cuyo valor es igual a la densidad de energía del campo.

Según la ecuación (27.4)

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi \overline{\rho} \mathbf{v} / c, \quad (41.3)$$

y de la igualdad $\mathbf{B} = 0$ se sigue que dentro del superconductor la densidad media de corriente es también igual a cero en cualquier punto. En otras palabras, en un superconductor es imposible que existan corrientes macroscópicas volumétricas. En relación con esto haremos notar que en un superconductor carece de sentido separar de $\overline{\rho} \mathbf{v}$ la corriente de conducción como se hace en el caso de los conductores ordinarios. Por esta misma razón carece de sentido físico el introducir en la teoría considerada la imanación \mathbf{M} , y con ella también el vector \mathbf{H} .

Así pues, cualquier corriente eléctrica que circule en un superconductor es una corriente superficial. La densidad superficial de corriente \mathbf{g} se determina, según (27.14), por la discontinuidad de la componente tangencial de la inducción en la

superficie del cuerpo. Dado que dentro de un superconductor es $\mathbf{B} = 0$, mientras que fuera de él \mathbf{B} y \mathbf{H} coinciden, se tendrá

$$\mathbf{g} = c\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e / 4\pi. \quad (41.4)$$

Por si sola, la existencia de corrientes superficiales no constituye una peculiaridad característica de los superconductores únicamente. Tales corrientes aparecen también en un cuerpo imanado cualquiera, donde su densidad es

$$\mathbf{g} = c\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_e - \mathbf{B}) / 4\pi.$$

Dado que sobre la superficie de un cuerpo normal (no superconductor) son continuas las componentes tangenciales del vector $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$, tenemos $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e = \frac{1}{\mu}(\mathbf{n} \times \mathbf{B})$, de modo que la expresión para \mathbf{g} puede escribirse en la forma

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \frac{1-\mu}{\mu}. \quad (41.5)$$

La diferencia principal entre los cuerpos superconductores y los ordinarios se pone de manifiesto, sin embargo, al considerar la corriente total que atraviesa una sección transversal del cuerpo. En un cuerpo no superconductor las corrientes superficiales se compensan siempre entre sí, de modo que la corriente total es nula. Esta compensación queda asegurada por la condición (41.5) que liga la densidad de corriente \mathbf{g} con la inducción magnética dentro del cuerpo y, mediante ella, las corrientes \mathbf{g} en diferentes puntos de la superficie. En los superconductores la condición (41.5) pierde su sentido. En efecto, el paso de un cuerpo ordinario con una permeabilidad magnética μ a un superconductor significa, formalmente, que hay que hacer a la vez $B \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow 0$. Pero en estas condiciones, el segundo miembro de la igualdad (41.5) pasa a ser indeterminado, con lo cual no existe en esencia ninguna condición que limite los valores posibles de la corriente.

Llegamos así al importante resultado de que las corrientes que fluyen por la superficie de un superconductor pueden dar lugar a una corriente total no nula que circule por la misma. Naturalmente, esto es sólo posible en cuerpos múltiplemente conexos (por ejemplo, en un anillo) o bien en un superconductor simplemente conexo que es parte de un circuito cerrado con la fuente de fuerza electromotriz necesaria para mantener la corriente en las partes no superconductoras del circuito.

Es muy importante que la circulación estacionaria de una corriente total por un superconductor resulta ser posible sin que exista campo eléctrico. Esto significa que no va acompañada de disipación de energía, para compensar la cual sería necesario el trabajo de un campo exterior. Esta propiedad de un superconductor puede describirse también diciendo que no existe en él resistencia eléctrica, que resulta ser, por consiguiente, una consecuencia necesaria de sus propiedades magnéticas.

§ 42. Corrientes en superconductores

Consideremos con mayor detenimiento algunas propiedades de los superconductores dependientes de su forma.

Si el superconductor es un cuerpo simplemente conexo, cuando no existe un campo magnético exterior es absolutamente imposible que existan en él corrientes superficiales estacionarias.

Es fácil convencerse de que así es por las siguientes consideraciones. Las corrientes superficiales crearían en el espacio que rodea al cuerpo un campo magnético constante nulo en el infinito. Como cualquier campo magnético constante en el vacío, este campo derivaría de un potencial y, además, en virtud de las condiciones de contorno la derivada normal $\partial\phi/\partial n$ del potencial debería anularse sobre la superficie del superconductor. Pero por la teoría del potencial se sabe que si $\partial\phi/\partial n = 0$ sobre la superficie de un cuerpo simplemente conexo y en el infinito, se tendrá $\phi = 0$ en todo el espacio (fuera del cuerpo). En consecuencia, un campo magnético de estas características no puede existir, y con él tampoco las corrientes superficiales.

En cambio, un campo magnético exterior induce corrientes sobre la superficie de un superconductor simplemente conexo, lo que se puede interpretar como aparición de un determinado momento magnético en el cuerpo como un todo. Es fácil calcular esta «imánación» para un superconductor en forma de elipsoide*.

Sea \mathfrak{H} un campo exterior paralelo a uno de los ejes principales del elipsoide. Para el campo magnético dentro de un elipsoide no superconductor se cumple la igualdad

$$(1-n)\mathbf{H} + n\mathbf{B} = \mathfrak{H}$$

donde n es el coeficiente de desimánación a lo largo del eje dado (véase (8.7)). En un superconductor la «intensidad» \mathbf{H} carece de sentido físico, conforme ya se indicó, y junto con ella pierde también su significación ordinaria la imánación

$$\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi.$$

Con todo, en el presente caso conviene introducir \mathbf{H} y \mathbf{M} de manera puramente formal como magnitudes auxiliares que sirven para calcular el momento magnético total $\mathcal{M} = MV$ (V es el volumen del elipsoide), que conserva su significado físico literal. Haciendo para el elipsoide superconductor $\mathbf{B} = 0$, se encuentra

$$\mathbf{H} = \mathfrak{H}/(1-n), \quad (42.1)$$

y, por consiguiente,

$$\mathcal{M} = -V\mathbf{H}/4\pi = -V\mathfrak{H}/4\pi(1-n). \quad (42.2)$$

En particular, para un largo cilindro en un campo longitudinal es $n = 0$, de modo

* En todo este párrafo se supone que el campo magnético no supera aquellos valores para los que se produce la desaparición del estado superconductor (véase, § 43).

que $\mathbf{H} = \mathfrak{H}$ y $\mathcal{M} = -V\mathfrak{H}/4\pi$ (*). Estos valores de \mathcal{M} son los mismos que se tendrían si el cuerpo poseyera una susceptibilidad diamagnética de volumen $-1/4\pi$.

El campo magnético \mathbf{H}_e fuera del elipsoide sobre la superficie del mismo es tangente a ésta en todos sus puntos, y en consecuencia, su valor se determina directamente por la condición de continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{H} . Dentro del elipsoide se tiene $\mathbf{H} = \mathfrak{H}/(1-n)$; proyectando este vector sobre el plano tangente, obtenemos

$$(1-n)H_e = \mathfrak{H} \sin \theta, \quad (42.3)$$

donde θ es el ángulo formado por el campo exterior \mathfrak{H} y la normal a la superficie del elipsoide en el punto dado. El mayor valor lo toma H_e sobre el ecuador del elipsoide, en el cual es igual a $\mathfrak{H}/(1-n)$.

Insistiremos una vez más en que entre las corrientes que determinan la «imanciación» de un superconductor y las que crean una corriente total en él no hay ninguna diferencia esencial: su naturaleza física es la misma. Esta importante circunstancia permite, en particular, determinar inmediatamente los coeficientes giromagnéticos de un superconductor cualquiera. En efecto, la densidad de impulso de las partículas (los electrones) que crean las corrientes «imanadoras», difiere de la densidad de estas corrientes tan sólo en el factor m/e (e y m son la carga y la masa del electrón). Con vistas a determinar los coeficientes giromagnéticos (véase (35.3)) de aquí se sigue sin más que en un superconductor se tiene siempre

$$g_{ik} = \delta_{ik}.$$

Pasemos a los superconductores múltiplemente conexos. Sus propiedades difieren de las propiedades de los cuerpos simplemente conexos, sobre todo porque para ellos no vale la conclusión a que llegamos acerca de la imposibilidad de un flujo estacionario de corrientes superficiales cuando no existe un campo magnético exterior. Además, las corrientes superficiales no tienen ahora por qué compensarse mutuamente y pueden conducir a un flujo estacionario en el cuerpo de una corriente total de «superconducción» incluso cuando no existen fuerzas electromotrices aplicadas desde el exterior.

Consideremos un cuerpo doblemente conexo (un anillo) sin que exista campo magnético exterior y veamos cómo su estado queda por completo determinado dando la corriente total que fluye por él, J . También el problema de determinar el campo creado por el anillo puede resolverse como problema de teoría del potencial, salvo que el potencial ϕ será ahora una función multivalente que cambia en $4\pi J/c$ al recorrer un camino cerrado cualquiera que atraviese la abertura del anillo (cf. § 29). Para plantear el problema de manera matemáticamente correcta, hay que efectuar un «corte» en el espacio por una superficie cualquiera que cierre la abertura del

* Estas relaciones para un cilindro son consecuencia inmediata de la condición de continuidad de \mathbf{H} y, por ello, valen para un cilindro cuya sección transversal tenga una forma cualquiera (no necesariamente circular).

anillo. El problema consiste entonces en resolver la ecuación de Laplace con la condición de contorno $\partial\phi/\partial n = 0$ sobre la superficie del anillo, $\phi = 0$ en el infinito y $\phi_2 - \phi_1 = 4\pi J/c$ sobre la superficie del corte, donde ϕ_1 y ϕ_2 son los valores del potencial en una y otra cara de la misma. Este problema, como se sabe por teoría del potencial, posee una solución única (independiente de la forma de la superficie de corte elegida). Ahora bien, la distribución del campo cerca de la superficie del anillo permite determinar a su vez unívocamente la distribución de las corrientes superficiales en él.

Junto con la distribución de las corrientes pasa a ser una cantidad bien determinada el coeficiente de autoinducción del anillo superconductor. Desde este punto de vista, se tiene una diferencia esencial respecto de los conductores ordinarios, en los que la distribución de corrientes, y con ella también el valor exacto de la autoinductancia, depende del procedimiento utilizado para excitar la corriente (§ 33) *.

En el § 32 se introdujo el concepto de flujo magnético Φ a través de un circuito conductor lineal y se demostró que $\Phi = LJ/c$, donde L es la autoinducción del conductor. En el caso de un anillo superconductor, en cambio, el concepto de flujo magnético tiene también sentido cualquiera que sea el grosor del anillo, es decir, éste no tiene por qué ser pequeño. En efecto, en virtud del carácter tangencial del campo magnético su flujo a través de una parte cualquiera de superficie del propio anillo es igual a cero; en consecuencia, el valor del flujo magnético a través de una superficie que cierra la abertura del anillo superconductor no depende de la elección de esta superficie.

Además, sigue valiendo también la fórmula

$$\Phi = LJ/c \quad (42.4)$$

con la autoinductancia L determinada, como antes, por la energía total del campo magnético de la corriente. La energía total del campo magnético del superconductor viene dada por la integral $\int \frac{H^2}{8\pi} dV$ extendida a todo el interior del cuerpo. Efectuando, como se ha indicado más arriba, un «corte» del espacio por una cierta superficie C , introduciremos el potencial del campo y se escribirá

$$\begin{aligned} \int H^2 dV/8\pi &= - \int \mathbf{H} \cdot \text{grad } \phi dV/8\pi \\ &= \int \phi \text{div } \mathbf{H} dV/8\pi - \oint H_n \phi df/8\pi. \end{aligned}$$

* La autoinductancia de un fino anillo superconductor (de radio b), cuya sección es un círculo de radio a , coincide con la parte exterior de la autoinducción de un anillo no superconductor y viene dada por la fórmula

$$L = 4\pi b [\ln(8b/a) - 2]$$

(véase el problema 2, § 33).

V. A. Fok dio la solución exacta del problema de una corriente superconductora circular (*Phys. Zs. d. Sowjetunion* 1, 215, 1932).

La primera integral es igual a cero, ya que $\text{div } \mathbf{H} = 0$. En cuanto a la segunda integral, ésta se extiende a una superficie infinitamente lejana, a la superficie del anillo y a ambas caras de la superficie del corte; sobre las dos primeras el integrando se anula, con lo que queda

$$\begin{aligned}\int H^2 dV/8\pi &= \oint_C H_n(\phi_2 - \phi_1) df/8\pi \\ &= (J/2c) \oint_C H_n df = J\Phi/2c,\end{aligned}$$

donde Φ es el flujo magnético a través de la superficie C . Comparando esta expresión con $LJ^2/2c^2$ (por definición de autoinductancia), obtendremos la igualdad buscada (42.4).

Si el anillo se encuentra en un campo magnético exterior, el flujo magnético total Φ es suma del flujo propio LJ/c y del flujo Φ_e del campo exterior. Una propiedad muy importante de un anillo superconductor consiste en que, para una variación arbitraria del campo exterior y de la corriente, el flujo magnético total a través del anillo se mantiene constante:

$$LJ/c + \Phi_e = \text{constante} \equiv \Phi_0. \quad (42.5)$$

Esto se sigue inmediatamente de la forma integral de la ecuación de Maxwell en el espacio exterior al cuerpo:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = - \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Si se efectúa la integración sobre la superficie C que cierra la abertura del anillo, el contorno de integración en el segundo miembro de la igualdad será una línea que pasa por la superficie del mismo. Pero sobre la superficie de un superconductor la componente tangencial \mathbf{E} es igual a cero (ya que dentro de un superconductor $\mathbf{E} = 0$, y \mathbf{E}_t es continua sobre la superficie). Por ello, el primer miembro de la igualdad se anula y encontramos que $d\Phi/dt = 0$.

La ecuación (42.5) determina la variación de la corriente en el anillo correspondiente a una variación del campo exterior. Así, si el anillo se llevara al estado superconductor en un campo exterior de flujo Φ_0 , y luego este campo se desconectara, en el anillo se induciría una corriente estacionaria igual a $J = c\Phi_0/L$.

El flujo magnético en un anillo superconductor no solamente es constante cuando se varía el campo exterior, sino también para una variación cualquiera de la forma del anillo o por su desplazamiento en el espacio*. Esta situación puede describirse diciendo que las líneas de fuerza no pueden nunca atravesar la superficie de un

* La demostración de lo que aquí se afirma se sigue inmediatamente de la relación entre la fuerza electromotriz de inducción y las variaciones del flujo magnético a través del circuito cuando éste se desplaza (§ 49).

superconductor y, por ello, no pueden «escapar» de la abertura del anillo.

Los resultados expuestos se generalizan inmediatamente al caso de los cuerpos superconductores con un grado de conexión arbitrario, en particular a un conjunto cualquiera de anillos. El estado de un sistema cuyo orden de conexión sea n y en ausencia de un campo exterior está por completo determinado dando los $n-1$ valores de las corrientes totales J_a . En cuanto a la relación (42.5), su generalización es el sistema de ecuaciones

$$\sum_b L_{ab} J_b + \Phi_{e,a} = \Phi_{0,a}. \quad (42.6)$$

Estas ecuaciones valen no solamente para una variación cualquiera de un campo exterior, sino también para cambios en la forma o en la posición relativa de los cuerpos.

PROBLEMA

Determinar el momento magnético de un disco superconductor en un campo magnético perpendicular al plano del mismo*.

Solución. El problema de un superconductor en un campo magnético constante coincide formalmente con el problema de electrostática correspondiente a un dieléctrico con permitividad $\epsilon = 0$. Considerando el disco como límite de un elipsoide de rotación cuando $c \rightarrow 0$ (cf. el problema 4 del § 4) y aplicando la fórmula (8.9) con el correspondiente cambio de notación (el campo \mathfrak{H} dirigido a lo largo del eje z), obtendremos

$$\mathcal{M} = -2a^3 \mathfrak{H} / 3\pi.$$

§ 43. El campo crítico

Un superconductor cilíndrico que se encuentra en un campo magnético longitudinal posee una energía magnética adicional

$$-\frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \mathcal{M} = \mathfrak{H}^2 V / 8\pi.$$

Por el contrario, en el estado normal (no superconductor) la energía total del cilindro prácticamente no variaría al conectar el campo exterior (prescindimos, aquí y en lo que sigue, del dia- o paramagnetismo de los metales no superconductores, es decir, suponemos que se tiene $\mu = 1$). Ya simplemente por esto está claro que, en campos magnéticos suficientemente intensos, el estado superconductor de un metal ha de resultar termodinámicamente menos ventajoso que el estado normal y, en consecuencia, debe tener lugar, como suele decirse, la destrucción de la superconductibilidad.

El valor de la intensidad del campo magnético longitudinal para el que desapa-

* Este problema se estudia aquí sobre todo con vistas a las aplicaciones a otro caso (véase probl. 2, § 75). Para un disco superconductor sólo cabe hablar, de hecho, de campos magnéticos muy débiles, ya que en estas condiciones se produce fácilmente la desaparición de la superconductibilidad (véase § 43).

rece la superconductibilidad en un cuerpo cilíndrico depende del metal de que se trate y también de su temperatura (y de su presión). Este valor se llama *campo crítico* (H_{cr}) y resulta ser una de las características más importantes de un superconductor*.

La destrucción de la superconductibilidad en un cilindro cuando el campo alcanza el valor crítico tiene lugar en todo el volumen, lo que se debe a la homogeneidad del campo en toda la superficie de dicho cuerpo. En cambio, en cuerpos de otra forma la desaparición de la superconductibilidad resulta ser un proceso más complicado, en el cual el volumen ocupado por la materia en estado normal crece gradualmente en todo un intervalo de valores de \mathfrak{H} (de ello hablaremos más detenidamente en el párrafo que sigue).

Así pues, a cualquier temperatura (por debajo del punto de transición) un metal puede existir tanto en el estado superconductor (s) como en el estado normal (n). Designemos por $\mathcal{F}_{s0}(V, T)$ y $\mathcal{F}_n(V, T)$ las energías libres totales del cuerpo superconductor y normal cuando no hay campo magnético exterior; estas magnitudes, características del material de que se trate, dependen, naturalmente, tan sólo del volumen, pero no de la forma del cuerpo. La energía libre en el estado n no cambia en absoluto al aplicar un campo exterior (por esto precisamente no hemos añadido el subíndice 0 a \mathcal{F}_n). En el estado s , en cambio, un campo magnético altera esencialmente la energía libre. Para un cilindro superconductor y valores dados de T y V , la energía libre en un campo exterior longitudinal \mathfrak{H} es igual a

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s0}(V, T) + \mathfrak{H}^2 V / 8\pi. \quad (43.1)$$

De aquí se pueden deducir todas las demás magnitudes termodinámicas. Derivando (43.1) respecto del volumen, encontramos la presión que actúa sobre el cuerpo

$$p = p_0(V, T) - \mathfrak{H}^2 / 8\pi, \quad (43.2)$$

donde $p_0(V, T)$ es la presión (para valores dados de V y T) en ausencia de campo. La igualdad (43.2) determina la dependencia que existe entre p , V y T , es decir, representa la ecuación de estado de un cilindro superconductor que se encuentra en un campo magnético exterior. Vemos que el volumen $V(p, T)$ cuando existe dicho campo es el mismo que encontraríamos si no hubiese campo magnético, pero se aplicase una presión $p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}$. Este resultado concuerda, naturalmente, con la

fórmula (41.2) para la fuerza que actúa sobre la superficie de un superconductor en un campo magnético.

* La transición brusca del estado superconductor al normal tiene lugar solamente en superconductores «puros» (véase la nota en la pág. 199), que son los únicos que consideramos. En las aleaciones, en cambio, la desaparición de la superconductibilidad y la penetración del campo magnético en la muestra se produce de manera gradual en todo un intervalo de intensidades del campo relativamente amplio, de modo que el campo crítico, en el sentido que se le atribuye en el texto, no existe en ellos.

El potencial termodinámico* de un cilindro superconductor es igual a

$$g_p = \mathcal{F}_s + pV = \mathcal{F}_{s0}(V, T) + p_0V,$$

donde el volumen V debe expresarse en función de p y T según (43.2). Por ello cabe escribir $g_p(p, T)$ en la forma siguiente:

$$g_p(p, T) = g_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \quad (43.3)$$

donde $g_{s0}(p, T)$ es el potencial termodinámico cuando no existe campo. Derivando esta igualdad respecto de T y de p obtendremos relaciones análogas para la entropía y el volumen:

$$\mathcal{S}_s(p, T) = \mathcal{S}_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \quad (43.4)$$

$$V_s(p, T) = V_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right). \quad (43.5)$$

Podemos ahora escribir la condición que determina el campo crítico. El paso del cilindro del estado s al n se producirá cuando (para valores dados de p y T) g_n llegue a ser menor que g_p . Ahora bien, en el momento de la transición debe tenerse $g_p = g_n$, es decir,

$$g_{s0}\left(p + \frac{H_{cr}^2}{8\pi}, T\right) = g_n(p, T). \quad (43.6)$$

Esta igualdad es una relación termodinámica exacta**. De ordinario, la variación del potencial termodinámico en un campo magnético representa una pequeña corrección a $g_{s0}(p, T)$. Entonces el segundo miembro de la ecuación (43.6) puede desarrollarse en serie y los primeros términos del desarrollo dan:

$$g_{s0}(p, T) + \frac{H_{cr}^2}{8\pi} V_{s0}(p, T) = g_n(p, T), \quad (43.7)$$

donde

$$V_{s0}(p, T) = \partial g_{s0}(p, T) / \partial p$$

es el volumen del cilindro superconductor en ausencia de campo. De esta manera, en esta aproximación cabe decir que el potencial termodinámico de la materia (referido a la unidad de volumen) en el estado normal es $H_{cr}^2/8\pi$ veces mayor que en el superconductor.

Designemos por $T_{cr} = T_{cr}(p)$ la temperatura de transición cuando no hay campo magnético. Muestra la experiencia que la transición en este punto es un cambio

* La definición de g_p es aquí la misma que en el § 12.

** Efectuamos aquí los cálculos con una precisión mayor que la que se suele exigir, con vistas a poner de manifiesto de manera más clara la relación mutua entre las diferentes magnitudes termodinámicas.

de fase de segunda especie. Por consiguiente, la anulación de $H_{cr}(T)$ en $T = T_{cr}$, en particular, debe producirse de manera continua. Por la teoría general de los cambios de fase de segunda especie se sabe* que la variación del potencial termodinámico cerca del punto de transición es proporcional al cuadrado de la diferencia de temperaturas $T - T_{cr}$. De (43.7) cabe concluir, por lo tanto, que cerca de T_{cr} el campo crítico varía linealmente con la temperatura

$$H_{cr} = \text{const} \times (T_{cr} - T). \quad (43.8)$$

Derivemos los dos miembros de la igualdad (43.6) respecto de la temperatura a lo largo de la curva que expresa H_{cr} en función de T (para una presión dada). Teniendo en cuenta al hacerlo las fórmulas (43.4), (43.5), se obtendrá

$$\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s = -V_s \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{cr}^2}{8\pi} \right), \quad (43.9)$$

donde todas las magnitudes $\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_s, V_s$ se refieren al momento de la transición entre ambos estados del cuerpo (es decir, al campo $H = H_{cr}$). Multiplicando esta diferencia por T , obtendremos el calor de transición

$$Q = T(\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s) = -\frac{V_s H_{cr} T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T} \right)_p. \quad (43.10)$$

Cuando ésta se produce en el punto $T = T_{cr}$ (es decir, en ausencia de campo magnético), esta magnitud se anula junto con H_{cr} de acuerdo con el hecho de que se tiene aquí un cambio de fase de segunda especie. En cambio, una transición que tiene lugar cuando $T < T_{cr}$ (en un campo magnético) va acompañada de absorción o emisión de calor, es decir, constituye un cambio de fase de primera especie. Muestra la experiencia que H_{cr} crece con monotonía al disminuir la temperatura en todo el intervalo de T_{cr} a 0. En consecuencia, la derivada dH_{cr}/dT es siempre negativa y por (43.10) se ve que $Q > 0$, es decir, el calor se absorbe en la transición (isotérmica) del estado superconductor al normal.

Según el teorema de Nernst, la entropía de un cuerpo cualquiera debe anularse para $T \rightarrow 0$. Por lo tanto, de (43.9) se sigue que cuando $T = 0$ debe ser $\partial H_{cr}/\partial T = 0$, esto es, que la curva $H_{cr} = H_{cr}(T)$ corta al eje H formando ángulo recto.

Derivemos la diferencia $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s$ (43.9) una vez más respecto de la temperatura, utilizando de nuevo al hacerlo las igualdades (43.4), (43.5). Teniendo también en cuenta que $\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$, resulta en definitiva

$$\frac{\partial \mathcal{S}_n}{\partial T} - \frac{\partial \mathcal{S}_s}{\partial T} = -V_s \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{H_{cr}^2}{8\pi} \right) - 2 \frac{\partial V_s}{\partial T} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{cr}^2}{8\pi} \right) - \frac{\partial V_s}{\partial p} \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{cr}^2}{8\pi} \right) \right]^2. \quad (43.11)$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 138.

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por T , obtendremos la diferencia de capacidades caloríficas (a presión constante) de las dos fases. Los términos que contienen el coeficiente de dilatación térmica y el coeficiente de compresibilidad de la substancia son de ordinario muy pequeños comparados con los restantes términos; prescindiendo de ellos, queda

$$\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_n = \frac{V_s T}{4\pi} H_{cr} \frac{\partial^2 H_{cr}}{\partial T^2} + \frac{V_s T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T} \right)^2. \quad (43.12)$$

Esta fórmula puede obtenerse también derivando directamente la relación aproximada (43.7). En esta aproximación la diferencia entre V_s y V_{s0} carece de importancia; también es posible considerar iguales entre sí \mathcal{C}_s y \mathcal{C}_{s0} .

Cuando $T = T_{cr}$, el primer término en (43.12) se anula y obtenemos la siguiente fórmula que liga el salto de la capacidad calorífica en el cambio de fase de segunda especie, cuando no existe un campo magnético exterior, con la dependencia de H_{cr} respecto de la temperatura:

$$\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_n = \frac{V_s T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T} \right)^2 \quad (43.13)$$

(A. J. Rutgers, 1933). Se sigue de aquí, en particular, que en este caso $\mathcal{C}_s > \mathcal{C}_n$. Si se disminuye la temperatura (es decir, cuando el campo magnético destruye la superconductibilidad), la diferencia $\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_n$ cambia de signo debido a que la diferencia $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s$, que se anula en $T = 0$ y en $T = T_{cr}$, debe pasar por un máximo en este intervalo.

De manera análoga es posible considerar los efectos vinculados con la variación de volumen en la transición. Para ello derivemos la ecuación (43.6) respecto de la presión a lo largo de la curva que da la correspondencia de H_{cr} respecto de p (para una temperatura dada); esto conduce a:

$$V_n = V_s \frac{\partial}{\partial p} \left(p + \frac{H_{cr}^2}{8\pi} \right)$$

o bien

$$V_n - V_s = \frac{V_s H_{cr}}{4\pi} \frac{\partial H_{cr}}{\partial p}, \quad (43.14)$$

con lo que también se determina la variación del volumen en el momento de la transición*. En el punto $T = T_{cr}$ esta diferencia, al igual que la diferencia de entropías, se anula. En cambio, la transición a temperaturas $T < T_{cr}$ va acompañada de variación del volumen, variación que puede tener uno u otro signo según sea el de la derivada $(\partial H_{cr} / \partial p)_T$. Para $T = T_{cr}$ no hay variación de volumen, pero se tiene

* Esta diferencia hay que distinguirla, por descontado, de la variación de volumen (magnetostricción) de un superconductor cuando el campo varía de cero a H_{cr} . Dicha variación puede obtenerse a partir de (43.5):

$$V_s(p, T) - V_{s0}(p, T) \cong (H_{cr}^2 / 8\pi) (\partial V_s / \partial p)_T.$$

un salto del coeficiente de compresibilidad que es fácil determinar derivando la igualdad (43.14).

Obsérvese que si en (43.14) se substituye

$$\left(\frac{\partial H_{\text{cr}}}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial H_{\text{cr}}}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{H_{\text{cr}}}$$

(igualdad que se obtiene derivando la ecuación $H_{\text{cr}}(p, T) = \text{const}$), se obtendrá la «ecuación de Clapeyron-Clausius»:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{H_{\text{cr}}} = \frac{Q}{T(V_n - V_s)}, \quad (43.15)$$

donde la derivada $(\partial p / \partial T)_{H_{\text{cr}}}$ determina la variación de la presión necesaria para que el campo exterior aplicado se conserve precisamente crítico al variar la temperatura.

El concepto de campo crítico H_{cr} tiene un sentido físico considerablemente más amplio del que se refleja en su definición basada en el comportamiento de un cilindro superconductor. La igualdad $H = H_{\text{cr}}$ es una condición de equilibrio que debe cumplirse en cada punto de la superficie de separación entre las fases normal (n) y superconductora (s) de la materia en un mismo cuerpo. Esto resulta ya evidente en virtud de las simples consideraciones que siguen. Si un cilindro se encuentra en un campo magnético longitudinal, igual precisamente a H_{cr} , tanto las condiciones de contorno para el campo magnético, como las condiciones de estabilidad termodinámica se cumplen en igual medida para todos los estados en los que una parte cilíndrica interior arbitraria del volumen de la muestra se encuentra en el estado superconductor, y el resto de la muestra, en el estado normal. Con esto, entre ambas el campo es $H = H_{\text{cr}}$. Por lo tanto, la superficie de separación sobre la que $H = H_{\text{cr}}$ se encuentra en «equilibrio indiferente» en relación al lugar en que se halla. Ésta es precisamente una propiedad que caracteriza el equilibrio de fases.

En un campo magnético variable la frontera entre las fases superconductora y normal se desplaza. La cinética de este desplazamiento constituye un proceso bastante complejo cuyo estudio exige la resolución simultánea de las ecuaciones electrodinámicas y de la ecuación de transmisión de calor, teniendo en cuenta el que se libera en el cambio de fase. Sin detenernos aquí en este análisis*, nos limitaremos a indicar la condición de contorno que debe cumplirse sobre la frontera en movimiento entre las fases s y n .

Para deducirla consideremos un sistema de coordenadas K' que se mueve con la velocidad \mathbf{v} de desplazamiento de la frontera entre fases. Según una conocida fórmula de transformación de los campos, el campo eléctrico \mathbf{E}' en el sistema K' se expresa en función de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en el sistema en reposo K mediante la igualdad

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} / c$$

* Un análisis completo de esta cuestión lo efectuó I. M. Lifshitz (ZhETF 20, 834, 1950; DAN SSSR 90, 363, 1953).

(véase (49.1)). Dado que en el sistema K' la superficie de separación se encuentra en reposo, sobre ella es válida la condición ordinaria de continuidad de la componente tangencial de \mathbf{E}' , es decir, de la magnitud

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}' = \mathbf{n} \times \mathbf{E} - v\mathbf{B}/c$$

(\mathbf{n} es el vector unidad normal a la superficie y dirigido en el sentido de la velocidad v). En la fase superconductora se tiene $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, y en la normal, $B = H_{cr}$ (sobre la frontera). Encontramos, por consiguiente, que en la superficie de separación en movimiento aparece un campo eléctrico tangencial que es perpendicular al magnético y cuyo módulo vale

$$E = vH_{cr}/c. \quad (43.16)$$

§ 44. El estado intermedio

Si un cuerpo superconductor de forma cualquiera se encuentra en un campo magnético exterior, la intensidad \mathfrak{H} del cual se aumenta progresivamente, se alcanza al final un momento en que en cualquier punto de la superficie del cuerpo el módulo del campo alcanza el valor crítico H_{cr} , a la vez que el propio \mathfrak{H} es todavía menor que H_{cr} . Así, sobre la superficie de un elipsoide (en un campo \mathfrak{H} dirigido a lo largo de uno de sus ejes) el campo presenta un valor máximo sobre el ecuador (véase (42.3)); alcanza allí el valor H_{cr} para $\mathfrak{H} = H_{cr}(1-n)$.

Si se sigue aumentando \mathfrak{H} , el cuerpo no puede ya encontrarse todo él en el estado superconductor. Por otra parte, tampoco puede pasar por completo al estado normal, puesto que en tal caso el campo sería igual a \mathfrak{H} en todo el volumen. Por ello, debe tener lugar una destrucción parcial de la superconductibilidad.

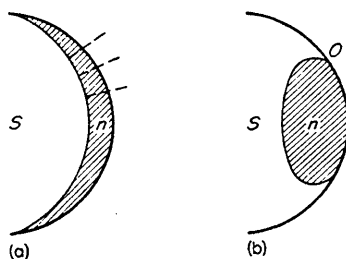


FIG. 22

A primera vista cabría imaginar que esta desaparición se produce como sigue. A medida que aumenta \mathfrak{H} , la superconductibilidad se destruye en una parte que crece gradualmente del volumen del cuerpo, a la vez que disminuye la parte que se conserva superconductora; el cuerpo en conjunto pasa al estado normal cuando $\mathfrak{H} = H_{cr}$. Sin embargo, es fácil ver que tales estados del cuerpo son termodinámicamente inestables. Recordaremos para ello que sobre la superficie de separación

entre las fases superconductora y normal el campo magnético es tangente a la superficie (e igual a H_{cr} en módulo). En otras palabras, las líneas de fuerza del campo se encuentran sobre dicha superficie. Si la frontera presenta su convexidad hacia la fase normal, las superficies equipotenciales del campo, perpendiculares a sus líneas de fuerza, divergirán hacia el interior del dominio normal (conforme se indica en la fig. 22 a, por las líneas de puntos). Pero en el sentido en que divergen las superficies equipotenciales, el módulo del campo disminuye, de modo que en la región rayada se tendría $H < H_{cr}$, lo que contradice la hipótesis de que existía aquí el estado normal. Pero si la frontera de la fase superconductora es cóncava, las líneas de fuerza que la ocupan presentarán un retroceso al alcanzar la superficie libre del dominio superconductor (punto O en la fig. 22 b), a la que también es tangente el campo. Ahora bien, en un punto de retroceso de una línea de fuerza el campo se hace infinito, lo que de nuevo se encuentra en contradicción con las condiciones de contorno sobre la superficie de un superconductor.

Las consideraciones expuestas constituyen, esencialmente, otro aspecto de la misma situación que lleva a la aparición de la estructura en dominios en las sustancias ferromagnéticas y ferroeléctricas. También aquí las condiciones de estabilidad termodinámica conducen a que, después de que el campo magnético alcanza el valor H_{cr} , aunque sólo sea en un punto de la superficie del cuerpo, éste se subdivide en un gran número de capas delgadas, alternativamente normales y superconductoras (L. Landau, 1937). Este estado peculiar de un superconductor se califica de *intermedio*. A medida que aumenta \mathfrak{H} , el volumen total de las capas normales crece, hasta que para $\mathfrak{H} = H_{cr}$ el cuerpo pasa por completo al estado normal.

Hay que subrayar que, en el caso general de un cuerpo de forma arbitraria, no todo su volumen se encuentra necesariamente en el estado intermedio. En él pueden coexistir también dominios en el estado puramente superconductor y en el puramente normal, pero únicamente en contacto con el dominio del estado intermedio, no en contacto directo entre sí. En relación con esto, un caso muy simple es el que hemos recordado antes de un cuerpo en forma de elipsoide. En un campo paralelo a su eje el estado intermedio se presenta en el intervalo

$$H_{cr}(1-n) < \mathfrak{H} < H_{cr}, \quad (44.1)$$

encontrándose en este estado todo el volumen del elipsoide*.

La forma y dimensiones de las capas s y n que se hallan en el estado intermedio vienen determinadas por las condiciones de equilibrio termodinámico del cuerpo en conjunto, de modo análogo a como se determina la forma de los dominios en las sustancias ferromagnéticas (§ 39). Como allí, el grosor que alcanzan las capas es

* Así, para una esfera, $n = \frac{1}{3}$ y el dominio del estado intermedio se extiende en el intervalo $\frac{2}{3} H_{cr} < \mathfrak{H} < H_{cr}$. Para un cilindro en un campo transversal, $n = \frac{1}{2}$, y el intervalo del estado intermedio es $\frac{1}{2} H_{cr} < \mathfrak{H} < H_{cr}$. En cambio, en un campo longitudinal no existe estado intermedio para un cilindro, $n = 0$, y el estado superconductor desaparece por completo para $\mathfrak{H} = H_{cr}$. Finalmente, para una placa planoparalela en un campo transversal es $n = 1$ y la placa se encuentra en el estado intermedio para cualquier campo tal que $\mathfrak{H} < H_{cr}$.

el resultado de dos tendencias opuestas. La «tensión superficial» sobre las fronteras de las fases n y s tiende a disminuir el número de capas, esto es, a aumentar su grosor. En sentido opuesto actúa la «energía de salida» de las capas en la superficie libre del cuerpo. El grosor de las capas crece al aumentar las dimensiones del cuerpo y, en consecuencia (por las mismas razones que en el caso de los dominios ferromagnéticos) tiene que tener lugar al final su ramificación cerca de la superficie del cuerpo*.

El estado intermedio es susceptible también de una descripción como promedio, si lo que interesa son porciones del cuerpo grandes comparadas con el grosor de las capas (R. E. Peierls y F. London, 1936). En esta descripción se admite que dentro del cuerpo existe un campo magnético cuya inducción es \vec{B} y que toma valores comprendidos entre cero (en el estado puramente superconductor) y H_{cr} (en el estado puramente normal). Atribuyendo a la materia en el estado intermedio una inducción diferente de cero, debemos atribuirle también un determinado valor de la «intensidad» magnética \vec{H} . Para determinar la relación entre estos dos valores hay que tener en cuenta la verdadera estructura del estado intermedio.

El campo magnético en una capa normal es igual a H_{cr} sobre la frontera con un superconductor y, en virtud de la hipótesis de que las capas son delgadas, se puede considerar que el campo tiene este valor también en todo el volumen de la capa. En cambio, en las capas superconductoras es $\vec{B} = 0$. Por ello, promediando el campo magnético en un volumen grande en comparación con el grosor de las capas, se encuentra para el valor medio de la inducción $\vec{B} = x_n H_{cr}$, donde x_n es la parte del volumen que se encuentra en el estado normal. Determinemos ahora el potencial termodinámico de la unidad de volumen tomando como origen el valor correspondiente al estado superconductor puro. Cuando no existe campo magnético, la unidad de volumen de la fase normal posee un potencial termodinámico en exceso $H_{cr}^2/8\pi$ **. Cuando existe campo magnético, a este valor se añade todavía la energía magnética, de modo que obtenemos en total $H_{cr}^2/4\pi$. El potencial termodinámico medio de la unidad de volumen en el estado intermedio es igual, por consiguiente, a

$$\Phi = x_n H_{cr}^2/4\pi = H_{cr} \vec{B}/4\pi. \quad (44.2)$$

De acuerdo con la regla general, la dependencia entre \vec{B} y \vec{H} se obtiene a partir de la relación termodinámica

$$\vec{H} = 4\pi \partial \Phi / \partial \vec{B}.$$

* Para el cálculo del grosor de las capas no ramificadas, véase el problema 2 de este párrafo. El cálculo de un modelo con capas múltiples ramificadas puede verse en *L. Landau, ZhETF 13, 377, 1943.*

La cuestión de la relación mutua entre ambos modelos se estudia en el artículo de *E. M. Lifshitz y Ju. V. Sharvin, DAN SSSR 79, 783, 1951.*

En determinadas condiciones (campos exteriores próximos a cero o a H_{cr}) puede resultar termodinámicamente más ventajosa no la estructura estratificada, sino la «filamentosa». Véase *E. R. Andrew, Proc. Roy. Soc. A194, 98, 1948.*

** Prescindimos aquí de todos los efectos de estricción. En estas condiciones se podría hablar, en vez de variación de potencial termodinámico, de la variación de la energía libre, que coincide con la primera.

En el presente caso encontramos que el vector \vec{H} es paralelo al \vec{B} y que su módulo vale

$$\vec{H} = H_{cr}. \quad (44.3)$$

es decir, tiene un valor constante independiente del módulo de la inducción.

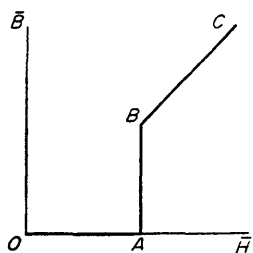


FIG. 23

Si se representa gráficamente la dependencia de \vec{B} respecto de \vec{H} (fig. 23), al estado superconductor corresponderá el segmento OA del eje de abscisas, y al normal, la recta BC ($\vec{B} = \vec{H}$). En cuanto al segmento vertical AB ($\vec{H} = H_{cr}$), éste corresponde al estado intermedio.

Sea \mathbf{n} el vector unitario asociado a las líneas de fuerza del campo magnético promedio. Haciendo $\vec{H} = H_{cr}\mathbf{n}$ y substituyendo en la ecuación $\text{rot } \vec{H} = 0$ (que es válida cuando no existe corriente volumétrica), se encuentra que $\text{rot } \mathbf{n} = 0$. Por otra parte, dado que $\mathbf{n}^2 = 1$, se tendrá

$$\text{grad } \mathbf{n}^2 = 2(\mathbf{n} \cdot \text{grad})\mathbf{n} + 2\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} = 0,$$

de donde se sigue que también $(\mathbf{n} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{n} = 0$. Pero esto significa que la dirección del vector \mathbf{n} es constante. Así pues, las líneas de fuerza del campo promedio son rectas.

Apliquemos los resultados obtenidos a un elipsoide que se encuentra en el estado intermedio. Para un campo homogéneo en el interior del elipsoide, vale la relación

$$(1-n)\vec{H} + n\vec{B} = \vec{\mathfrak{H}}$$

que es correcta cualquiera que sea la dependencia de \vec{B} respecto de \vec{H} . Haciendo aquí $H = H_{cr}$ se obtendrá

$$\vec{B} = \frac{\vec{\mathfrak{H}}}{n} - \frac{1-n}{n}H_{cr}. \quad (44.4)$$

Por consiguiente, la inducción media en el elipsoide cambia con la intensidad del campo exterior según una ley lineal, desde cero para $\vec{\mathfrak{H}} = (1-n)H_{cr}$ hasta H_{cr} para $\vec{\mathfrak{H}} = H_{cr}$.

Escribamos también la expresión del potencial termodinámico total \mathfrak{g} de un elipsoide en el estado intermedio. Para esto partiremos de la fórmula general

$$\mathfrak{g} = \int \left[\Phi - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{H}) \cdot \vec{\mathfrak{H}}}{8\pi} \right] dV$$

(cf. (31.7)), también válida para cualquier dependencia de \mathbf{B} con relación a \mathbf{H} . Substituyendo aquí los valores Φ , H , B dados por (44.2)—(44.4), resulta

$$\tilde{g}_t = \frac{V}{8\pi} \left[H_{cr}^2 - \frac{1}{n} (H_{cr} - \mathfrak{H})^2 \right] \quad (44.5)$$

(V es el volumen del elipsoide); este valor se cuenta a partir del potencial termodinámico de un elipsoide puramente superconductor en ausencia de campo magnético. Para un elipsoide superconductor en un campo exterior \mathfrak{H} tenemos, en cambio,

$$\tilde{g}_s = -\frac{1}{2} \mathcal{M} \cdot \mathfrak{H} = V \mathfrak{H}^2 / 8\pi(1-n),$$

(según (31.6) y (42.2)). Esas dos expresiones se igualan, como debía ser, cuando $\mathfrak{H} = H_{cr}(1-n)$.

Para terminar subrayaremos que la bondad del modelo «promediado» expuesto aquí para el estado intermedio no es de hecho muy satisfactoria, debido al valor relativamente grande del grosor de las capas. Por esta misma razón, este modelo no reproduce algunos fenómenos vinculados con las propiedades peculiares de la estructura en capas. Entre ellos se incluye el hecho de que la transición del estado superconductor al intermedio cuando aumenta el campo exterior tiene lugar, en realidad, no precisamente cuando $\mathfrak{H} = (1-n)H_{cr}$, sino algo después. El origen de este «retardo» es el siguiente. La transición al estado intermedio se produce cuando este estado pasa a ser termodinámicamente estable, es decir, cuando se tiene $\tilde{g}_t < \tilde{g}_s$. Pero la estructura en capas, junto con la energía puramente «volumétrica» (44.5) que se le atribuye en el modelo de promedio, posee también asociada la energía adicional que determina la existencia de fronteras entre capas y la ligada con las variaciones de su forma cerca de la superficie del cuerpo. Esta circunstancia conduce también a un cierto desplazamiento del punto de transición hacia campos más intensos*.

PROBLEMAS

1. Determinar la capacidad calorífica de un elipsoide en el estado intermedio.

Solución. La entropía, y, por lo tanto, la capacidad calorífica, se encuentra derivando el potencial termodinámico (44.5) respecto de la temperatura. Prescindiendo de los términos que contienen el coeficiente de dilatación térmica del cuerpo, obtendremos

$$\mathcal{C}_t - \mathcal{C}_s = \frac{VT}{4\pi n} [(1-n)(H_{cr}'^2 + H_{cr}H_{cr}'') - \mathfrak{H}H_{cr}']$$

(el apóstrofo significa derivación respecto de T); \mathcal{C}_s es la capacidad calorífica del cuerpo en el estado superconductor (prescindimos aquí de su pequeña dependencia respecto de \mathfrak{H}). Vemos así que al variar \mathfrak{H} (manteniendo constante la temperatura), en el punto $\mathfrak{H} = (1-n)H_{cr}$ la capacidad calóri-

* Acerca de esto, véase la literatura indicada en la pág. 214.

fica experimenta un salto desde \mathcal{E}_s a

$$\mathcal{E}_s + \frac{VT(1-n)}{4\pi n} H_{cr}^2,$$

variando luego linealmente con \mathfrak{H} hasta el valor

$$\mathcal{E}_s - \frac{VT}{4\pi} (H_{cr}^2 + H_{cr} H_{cr}') + \frac{VT}{4\pi n} H_{cr}^2 = \mathcal{E}_n + \frac{VT}{4\pi n} H_{cr}^2$$

(para $\mathfrak{H} = H_{cr}$), desde el cual cae hasta el valor \mathcal{E}_n .

2. Determinar la forma y dimensiones de las capas n y s para una placa planoparalela en el estado intermedio en un campo magnético exterior \mathfrak{H} perpendicular a la misma; las capas se suponen no ramificadas (*L. Landau*, 1937).

Solución. Los dominios de las fases n y s son capas dispuestas a lo largo del campo y su carácter plano-paralelo se conserva salvo cerca de la superficie de la placa.

Las líneas de fuerza del campo magnético (líneas de trazos en la fig. 24) atraviesan solamente las capas n , mientras las fronteras de las capas s son también líneas de fuerza (en virtud de la condición $B_n = 0$ que se cumple sobre ellas). Teniendo también en cuenta que sobre la frontera de las fases n y s ha de tenerse $H = H_{cr}$, escribamos las siguientes condiciones sobre las fronteras de una capa s :

$$\begin{aligned} \text{sobre el segmento } BC: H_x &= 0, \\ \text{sobre } BA \text{ y } CD: H_x^2 + H_y^2 &= H_{cr}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

(los ejes de coordenadas se han elegido conforme se indica en la figura 24). Lejos de la placa el campo \mathbf{H} debe coincidir con el campo exterior \mathfrak{H} , es decir,

$$\text{para } x \rightarrow -\infty \quad H_x = \mathfrak{H}, \quad H_y = 0. \quad (2)$$

Introduzcamos los potenciales escalar y vector del campo de acuerdo con las fórmulas

$$H_x = -\partial\phi/\partial x = \partial A/\partial y, \quad H_y = -\partial\phi/\partial y = -\partial A/\partial x,$$

y el potencial complejo $w = \phi - iA$ (cf. § 3, sec. 3).

A lo largo de cada línea de fuerza se tiene $A = \text{const.}$ Hagamos $A = 0$ sobre la línea de fuerza que alcanza el punto O y que luego se bifurca en las líneas OCD y OBA formando la frontera de una de las capas s . La diferencia de los valores A sobre las fronteras de dos capas s consecutivas es igual al flujo del campo magnético a lo largo del segmento $a = a_s + a_n$, es decir, es igual a $\mathfrak{H}a$. Por consiguiente, los valores de A sobre las fronteras de todas las capas s serán múltiplos enteros de $\mathfrak{H}a$. Introduciendo también la «intensidad compleja»

$$\eta = H_x - iH_y = -dw/dz, \quad z = x + iy,$$

escribiremos las condiciones (1) en la forma

$$\begin{aligned} \text{sobre } BC: \quad \text{Re } \eta &= 0, \\ \text{sobre } BA \text{ y } CD: \quad |\eta| &= H_{cr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Introduzcamos una nueva variable

$$\zeta = \exp(-2\pi w/\mathfrak{H}a) - 1 \quad (4)$$

y consideremos η como función de ζ . Sobre todas las líneas de fuerza en la frontera (junto con sus prolongaciones fuera de la placa) la magnitud ζ es real: $\zeta = \exp(-2\pi\phi/\mathfrak{H}a) - 1$.

Dado que ϕ está determinado salvo una constante, se puede elegir arbitrariamente el valor de ϕ en un punto. Hagamos $\phi = 0$ en el punto O . Entonces también en este punto será $\zeta = 0$. Sobre la línea de fuerza fronteriza considerada, lejos de la placa es $\zeta = -1$ (puesto que para $x \rightarrow -\infty$ tenemos $\phi \rightarrow -\mathfrak{H}x \rightarrow +\infty$). Llamaremos ζ_0 el valor de ζ en el punto B (o C), donde la línea de

fuerza penetra en la placa. Sobre las ramas CD y BA , ξ varía de ξ_0 a ∞ . Entonces las condiciones (1) y (3) se pueden escribir en la forma

$$\text{para } \xi = -1 \quad \eta = \mathfrak{H}, \quad (5)$$

$$\text{para } 0 < \xi < \xi_0 \quad \operatorname{Re} \eta = 0, \quad (6)$$

$$\text{para } \xi_0 < \xi \quad |\eta| = H_{\text{cr}}.$$

Además, la función $\eta(\xi)$ debe ser finita para todo ξ .

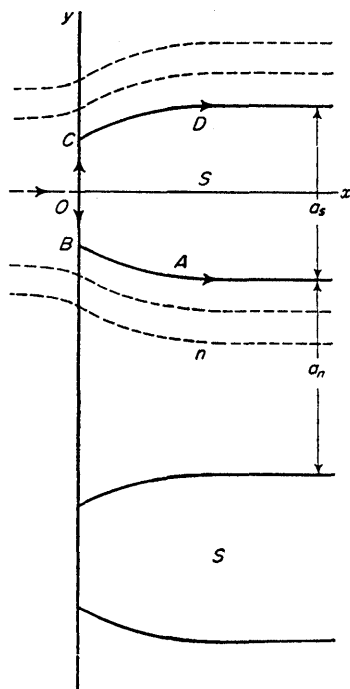


FIG. 24

La función

$$\eta = H_{\text{cr}} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\xi_0}{\xi}\right)} - \sqrt{\left(-\frac{\xi_0}{\xi}\right)} \right]. \quad (7)$$

cumple las condiciones (6). Para valores reales negativos de ξ ambas raíces son reales y se toman con los signos con que aquí aparecen. Cuando $0 < \xi < \xi_0$, las dos raíces son imaginarias, tomándose las raíces

$$\eta = \mp i H_{\text{cr}} \left[\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} - \sqrt{\left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1\right)} \right],$$

con los signos $-$ o $+$ sobre los segmentos OC y OB , respectivamente. Para $\xi > \xi_0$ hay que escribir

$$\eta = H_{\text{cr}} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\xi_0}{\xi}\right)} \mp i \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \right],$$

con los signos — y + sobre CD y BA , respectivamente. El valor ζ_0 se determina a partir de la condición (5) y es igual a

$$\zeta_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h} - h \right)^2, \quad (8)$$

donde se ha introducido la notación $h = \xi/H_{cr}$.

La forma de la capa, es decir, la ecuación de la línea de fuerzas frontera, se obtiene integrando la igualdad $dz = -dw/\eta$ para ζ real:

$$z = - \int \frac{dw}{\eta} = \frac{ah}{2\pi} \int \frac{d\zeta}{\eta(\zeta+1)}.$$

Substituyendo aquí $\eta(\zeta)$, separando las partes real e imaginaria y eligiendo las constantes de integración como corresponde, se obtendrá la siguiente ecuación paramétrica de la línea CD :

$$\begin{aligned} x &= \frac{ah}{2\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta+1} \\ &= \frac{ah}{\pi} \left[\operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}} - \sqrt{(\zeta_0+1)} \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\zeta(\zeta_0+1)}{\zeta_0(\zeta+1)}} \right], \\ y &= Y - \frac{ah}{2\pi} \int_{\zeta}^{\infty} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta+1} = Y - \frac{ah}{\pi} \sqrt{\zeta_0} \left(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

($Y = \frac{a_s}{2}$ es el valor de la coordenada y para $x \rightarrow \infty$; véase la fig. 24).

El período a de la estructura en capas está ligado con los grosores a_s y a_n de las capas s y n por las igualdades $a = a_s + a_n$, $a\xi = a_n H_{cr}$. La segunda de ellas es consecuencia de la continuidad del flujo magnético que atraviesa por completo las capas n . De aquí se sigue

$$a_s = a(1-h), \quad a_n = ah.$$

El período a se determina por la condición de mínimo del potencial termodinámico total de la placa. La existencia de una «tensión superficial» sobre la frontera de las fases n y s conduce a un término

$$\mathcal{G}_1 = 2l\Delta \cdot H_{cr}^2/8\pi a$$

en el potencial termodinámico referido a 1 cm² de superficie de la placa. Aquí l es el grosor de la placa y se ha designado por $H_{cr}^2\Delta/8\pi$ el coeficiente de tensión superficial (Δ tiene las dimensiones de una longitud). Al calcular esta parte de la energía se puede prescindir, naturalmente, de la curvatura de las capas cerca de la superficie de la placa.

La «energía de salida» de las capas cerca de la superficie de la placa se puede representar como suma de dos términos. En primer lugar, el propio aumento del volumen de las capas n comparado con el volumen que ocuparían si se conservara la forma planoparalela en toda la extensión del cuerpo conduce a una energía adicional

$$\mathcal{G}_2 = \frac{4}{a} \int_0^{\infty} (Y-y) dx \frac{H_{cr}^2}{8\pi}$$

(el factor 4 tiene en cuenta la existencia de cuatro ángulos, tales como B y C en la figura 24, sobre las dos caras de cada una de las $1/a$ capas s).

En segundo lugar, la salida de las capas en la superficie de la placa cambia la energía del sistema en el campo exterior, es decir, la energía $-(\frac{1}{2})\mathcal{M} \cdot \mathcal{H}$. El momento magnético de la placa viene determinado por las corrientes en las superficies de las capas s . Cuando la componente tangencial de la inducción cambia en forma discontinua desde H hasta cero, la densidad superficial de corrientes es $g = \pm cH/4\pi$. Por ello, sobre la unidad de longitud del eje z y por cada superficie frontera de

capas s aparece un momento magnético:

$$-\int_{OC D} \frac{H}{4\pi} y \, ds, \quad ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Si la capa no emergiese a la superficie, no existiría el segmento OC , y sobre CD se tendría $y = Y$. En consecuencia, el exceso del momento magnético para cada uno de los cuatro ángulos es igual a

$$-\int_{OC D} \frac{H}{4\pi} y \, ds + \int_0^\infty \frac{H_{cr}}{4\pi} Y \, dx.$$

De acuerdo con esto, el exceso de energía será

$$\begin{aligned} g_3 &= -\frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \frac{4}{a} \left[\int_0^\infty \frac{H_{cr}}{4\pi} Y \, dx - \int_{OC D} \frac{H}{4\pi} y \, ds \right] \\ &= \frac{\mathfrak{H}}{2\pi a} \left[H_{cr} \int_{CD} (-Y \, dx + y \, ds) + \int_{OC} H_y \, dy \right]. \end{aligned}$$

Las coordenadas x e y , expresadas en función de ζ , son proporcionales a a . Por consiguiente, todas las integrales en $g_2 + g_3$ son proporcionales a a^2 , de modo que esta parte del potencial termodinámico es proporcional a a . En cuanto a la suma $g_1 + g_2 + g_3$ es, por consiguiente*,

$$g = \frac{H_{cr}^2}{4\pi} \left[\frac{l\Delta}{a} + af(h) \right].$$

La condición de que sea mínima da

$$a = \sqrt{[l\Delta/f(h)]}.$$

Obsérvese que en las capas n , cerca de la superficie de la capa, el campo magnético puede ser considerablemente menor que H_{cr} , es decir, se tiene aquí una situación que corresponde a la representada en la figura 22 *a*. Su desventaja termodinámica queda compensada, en el presente caso, por la energía de tensión superficial que impide la disminución ulterior del espesor de las capas.

* Las integrales g_2 y g_3 no se expresan en términos de funciones elementales. La función $f(h)$ aparece tabulada en el artículo de E. Lifshitz y Iu. Sharvin (véase la nota en la pág. 214).

CAPÍTULO VII

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO CUASISTACIONARIO

§ 45. Corrientes de Foucault

Hasta aquí hemos considerado solamente campos eléctricos y magnéticos constantes, y la ecuación de Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (45.1)$$

la utilizamos (en el § 30) solamente como elemento auxiliar para deducir la expresión de la energía del campo magnético.

El carácter de los campos electromagnéticos variables en medios materiales depende fundamentalmente de la naturaleza de estos medios y del orden de magnitud de la frecuencia de los campos. En este párrafo consideramos fenómenos que tienen lugar en conductores tridimensionales situados en un campo magnético variable exterior. Supondremos que la velocidad de variación del campo no es muy grande, viniendo limitada por toda una serie de condiciones que se formularán más adelante. Los campos electromagnéticos y las corrientes que satisfacen estas condiciones se califican de *cuasistacionarios*.

En primer lugar admitiremos que la longitud de onda $\lambda \sim c/\omega$, que corresponde (en el vacío o en un medio dieléctrico que rodea al conductor) a una frecuencia del campo ω , es grande comparada con las dimensiones del cuerpo l :

$$\omega \ll c/l.$$

Entonces la distribución del campo magnético fuera del conductor se puede representar en cada instante por las ecuaciones del *campo estático*

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (45.2)$$

prescindiendo de todos los efectos ligados con la velocidad finita de propagación de las perturbaciones electromagnéticas. Claro está que solamente es posible prescindir de dichos efectos a distancias no demasiado grandes del cuerpo (pequeñas respecto de λ), lo que en cualquier caso es suficiente con vistas a determinar el campo en su interior.

En cuanto al sistema completo de ecuaciones del campo dentro del conductor,

está formado por la ecuación (45.1) y las ecuaciones*:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (45.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}/c. \quad (45.4)$$

La segunda de estas ecuaciones se dedujo, a decir verdad, para corrientes y campos magnéticos constantes. Por ello es necesario indicar criterios que permitan utilizar, con precisión suficiente, esta ecuación en el caso de campos variables. En la ecuación (45.4) es esencial que la relación entre la corriente y la intensidad del campo eléctrico venga dada por la igualdad $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, con un valor constante de σ correspondiente al caso estacionario. Esto ocurre si el período de variación del campo eléctrico es grande comparado con los tiempos característicos del mecanismo microscópico de conductibilidad. Para metales típicos (a la temperatura ambiente) las frecuencias límite admisibles por esta condición se encuentran en el dominio del espectro correspondiente al infrarrojo**.

Sin embargo, hay además otra condición que limita en el presente caso la aplicabilidad de las ecuaciones. Tratándose de ecuaciones macroscópicas, suponen que las longitudes de los libres caminos medios de los electrones son pequeñas comparadas con las distancias a las que varía apreciablemente el campo. Volveremos a considerar esta condición más adelante.

En las ecuaciones (45.1) y (45.4) \mathbf{E} es la intensidad del campo eléctrico inducido que resulta como consecuencia de variar el campo magnético. Cuando se conoce \mathbf{H} , el campo \mathbf{E} se determina directamente por la ecuación (45.4). La ecuación para \mathbf{H} , en cambio, se obtiene eliminando \mathbf{E} entre (45.1) y (45.4):

$$\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{\sigma}. \quad (45.5)$$

En un medio homogéneo de conductibilidad σ y de permeabilidad μ constantes, el factor $1/\sigma$ se puede sacar fuera del signo rot, y de acuerdo con (45.3) tenemos $\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. En consecuencia, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$, y obtenemos la ecuación

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (45.6)$$

* En un cuerpo anisótropo, en vez de $\sigma\mathbf{E}$, en el segundo miembro de la ecuación (45.4) debe figurar el vector de componentes $\sigma_{ik}E_k$.

** Para malos conductores (por ejemplo, los semiconductores) la aplicabilidad de la ecuación (45.4) exige que se cumpla todavía otra condición, que acaso resulte ser aún más restrictiva. En tales cuerpos puede tener sentido introducir juntas las constantes de conductibilidad y dieléctrica. Entonces al segundo miembro de la ecuación (45.4) se añade el término $-(\epsilon/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$, y la condición de que éste sea pequeño comparado con $(4\pi/c)\sigma\mathbf{E}$ es $\sigma/\omega \gg \epsilon$. En cambio, para los buenos conductores, los metales, se tiene de hecho $\sigma/\omega \gg 1$ en todo el dominio de frecuencias para las que todavía cabe hablar de conductibilidad constante (véase también la nota en la pág. 225).

Junto con la ecuación $\text{div } \mathbf{H} = 0$, constituye un sistema completo que basta para determinar el campo magnético. Obsérvese que la ecuación (45.6) tiene la forma de la ecuación de propagación del calor, representando el papel de «coeficiente de conductibilidad térmica», χ , la constante $c^2/4\pi\sigma\mu$.

Las condiciones de contorno para el campo magnético sobre la superficie del conductor son evidentes por la propia forma de las ecuaciones y, como antes, se escriben:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}. \quad (45.7)$$

La expresión en el segundo miembro de la ecuación (45.4) no influye sobre la segunda de estas condiciones en virtud de su carácter finito. Cuando $\mu = 1$ se puede escribir, simplemente*,

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \quad (45.8)$$

La continuidad de \mathbf{H}_t conduce a la continuidad de $(\text{rot } \mathbf{H})_n$, y de acuerdo con la ecuación (45.4), a la de $(\sigma \mathbf{E})_n$. Pero fuera de un conductor es $\sigma = 0$ con lo que llegamos a la conclusión de que sobre la superficie será

$$E_{n,i} = 0,$$

donde el índice (*i*) distingue el campo dentro del conductor. Junto con E_n se anula también $j_n = \sigma E_n$. Así pues, el sistema de ecuaciones considerado conduce automáticamente a la anulación (sobre la superficie del conductor) de la componente normal de la densidad de corriente. En otras palabras, en esta aproximación la existencia de un campo magnético variable no puede conducir a que aparezcan cargas libres sobre la superficie del conductor.

La condición de contorno (45.8) no basta para una formulación completa del problema si el conductor es un cuerpo compuesto constituido por secciones de diferente conductibilidad. Sobre las fronteras de separación de dichas secciones, junto con la continuidad de \mathbf{H} es necesario tener también en cuenta la condición de continuidad de \mathbf{E}_t ; para un campo magnético esta condición significa que

$$(\text{rot } \mathbf{H})_{t1}/\sigma_1 = (\text{rot } \mathbf{H})_{t2}/\sigma_2. \quad (45.9)$$

Establecidas las ecuaciones fundamentales, pasemos a estudiar la naturaleza de los campos variables caracterizados por las mismas.

Supongamos que el conductor se encuentra en un campo magnético y que la fuente de éste se desconecta en determinado instante. El campo en el conductor

* Para los cuerpos ordinarios dia- o paramagnéticos, μ es muy próximo a 1, y tener en cuenta μ en las fórmulas que siguen significaría una precisión excesiva carente de sentido. Valores de μ apreciablemente distintos de 1 pueden presentarse en los metales ferromagnéticos, cuyas propiedades magnéticas (en campos magnéticos suficientemente débiles) se pueden describir mediante una constante de permeabilidad grande. En estas sustancias, sin embargo, se produce, ya relativamente pronto, la dispersión de μ (que se traduce en su dependencia respecto de la frecuencia ω) que va acompañada de una disminución de μ que alcanza prácticamente el valor 1. Teniendo en cuenta estas circunstancias, en este capítulo supondremos $\mu = 1$.

(y en torno del mismo) no se anula en dicho instante y la marcha de su atenuación con el tiempo viene determinada por la ecuación (45.6). Para resolver un problema de este tipo hay que proceder, de acuerdo con los métodos generales de la física matemática, de la siguiente manera. Busquemos soluciones de la ecuación (45.6) que sean de la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m(x, y, z)e^{-\gamma_m t},$$

con valores γ_m constantes. Para las funciones $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ obtenemos ecuaciones

$$(c^2/4\pi\sigma)\Delta\mathbf{H}_m = -\gamma_m\mathbf{H}_m. \quad (45.10)$$

Para una forma dada del conductor, estas ecuaciones tienen soluciones no nulas (que satisfagan las condiciones de contorno necesarias) tan sólo para determinados valores de γ_m , que constituyen el conjunto de sus «valores propios». Todos estos valores son reales y positivos*, y las funciones que les corresponden $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ forman un sistema completo de funciones vectoriales ortogonales. Sea $\mathbf{H}_0(x, y, z)$ la distribución del campo en el instante inicial. Desarrollándola en serie de funciones \mathbf{H}_m ,

$$\mathbf{H}_0(x, y, z) = \sum_m c_m \mathbf{H}_m(x, y, z),$$

obtendremos la solución del problema de amortiguamiento del campo en la forma

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t} \mathbf{H}_m(x, y, z). \quad (45.11)$$

La rapidez del amortiguamiento viene determinada fundamentalmente por el término de la suma que corresponde al menor de los γ_m ; sea éste γ_1 . El «tiempo de amortiguamiento» del campo se puede definir por $\tau = 1/\gamma_1$. El orden de magnitud de este tiempo resulta evidente por la propia ecuación (45.10). Dado que $\Delta\mathbf{H} \sim \frac{\mathbf{H}}{l^2}$ (donde l es la dimensión del conductor), se tendrá

$$\tau \sim 4\pi\sigma l^2/c^2. \quad (45.12)$$

Otro tipo de problemas está ligado con el comportamiento de los conductores que se encuentran en un campo magnético variable exterior de frecuencia dada ω . El campo magnético, que penetra en el interior del conductor, induce en él un campo eléctrico variable y éste a su vez determina la aparición de corrientes (llamadas

* Esto puede verse fácilmente como sigue. Para evitar la necesidad de tener en cuenta las condiciones de contorno sobre la superficie del cuerpo, partiremos de la ecuación (45.5), imaginando que σ se anula de manera continua fuera del mismo. Multiplicando los dos miembros de la ecuación

$$-4\pi\gamma_m\mathbf{H}_m/c^2 = -\operatorname{rot}[(1/\sigma)\operatorname{rot}\mathbf{H}_m]$$

por \mathbf{H}_m^* e integrando en todo el espacio, obtendremos

$$\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m \int |\mathbf{H}_m|^2 dV = \int \mathbf{H}_m^* \cdot \operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}_m}{\sigma} dV = \int \frac{1}{\sigma} |\operatorname{rot}\mathbf{H}_m|^2 dV,$$

expresión en la que resulta evidente que γ_m es real y positivo.

corrientes de Foucault). Una idea general del carácter de la penetración del campo en el conductor puede obtenerse ya partiendo de la analogía antes indicada entre la ecuación (45.6) y la ecuación de transmisión del calor. Por la teoría de la transmisión del calor sabemos que una magnitud que satisfaga a dicha ecuación «se propaga» en el espacio a una distancia del orden de $\sqrt{\chi t}$ en un intervalo de tiempo t . En consecuencia, podemos concluir sin más que el campo magnético «penetra» en el interior del conductor hasta una distancia δ que es del orden de

$$\delta \sim \sqrt{(c^2/\sigma\omega)}.$$

Lo mismo vale, claro está, para el campo eléctrico y las corrientes inducidas por el mismo.

En un campo variable de frecuencia ω todas las magnitudes dependen del tiempo según el factor $e^{-i\omega t}$. La ecuación (45.6) adopta entonces la forma

$$\Delta \mathbf{H} = -4\pi i \sigma \omega \mathbf{H}/c^2. \quad (45.13)$$

Consideremos dos casos límite. Si la *profundidad de penetración* δ es grande comparada con las dimensiones del cuerpo (bajas frecuencias), en primera aproximación se puede substituir el segundo miembro de la ecuación (45.13) por cero. Entonces la distribución del campo magnético en cada instante será la misma que la correspondiente al caso estacionario para un valor dado del campo exterior lejos del cuerpo. Designemos esta solución por \mathbf{H}_{est} ; ésta no depende de la frecuencia (más exactamente, la contiene solamente en el factor dependiente del tiempo $e^{-i\omega t}$). En cuanto al campo eléctrico inducido, éste aparece tan sólo en la aproximación siguiente respecto de ω , ya que en el caso estacionario no existiría. Esto corresponde al hecho de que, al calcular \mathbf{E} en función de \mathbf{H} según la ecuación (45.4), el resultado que obtendríamos sería cero, puesto que $\text{rot } \mathbf{H}_{\text{est}} = 0$. En consecuencia, para calcular \mathbf{E} hay que recurrir a la ecuación (45.1), según la cual

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}_{\text{est}}/c. \quad (45.14)$$

Esta ecuación, junto con $\text{div } \mathbf{E} = 0$ (ecuación que se sigue de (45.4) para un valor de σ constante en el cuerpo), determina por completo la distribución del campo eléctrico. Obsérvese que ésta resulta proporcional a la frecuencia ω .

Pasemos al caso límite opuesto, en el que $\delta \ll l$ (frecuencias altas). La condición de aplicabilidad de las ecuaciones macroscópicas del campo, que hemos recordado al principio del párrafo, exige que δ sea, en cualquier caso, grande comparada con el libre camino medio de los electrones de conducción*.

Cuando $\delta \ll l$ el campo magnético penetra sólo en un delgado estrato superficial del conductor. Para calcular el campo fuera de éste cabe prescindir del grosor de dicho estrato, es decir, suponer que el campo magnético no penetra en el interior

* Esta condición precisamente es la que primero se viola, de hecho, en los metales (al aumentar la frecuencia). En cambio, la condición $\omega \ll 1/\tau$, donde τ es el tiempo de recorrido libre, puede resultar más restrictiva para los semiconductores de pequeña conductibilidad.

del cuerpo. En este sentido, un conductor en un campo magnético de alta frecuencia se comporta de la misma manera que un superconductor en un campo constante, y para calcular el campo fuera del mismo hay que resolver el correspondiente problema estacionario para un superconductor que tenga la misma forma.

El estudio de la verdadera distribución del campo en la capa superficial del conductor puede efectuarse de manera general considerando pequeñas porciones de la superficie como planos. Se trata entonces de resolver la ecuación (45.13) para un medio conductor limitado por una superficie plana fuera de la cual el campo tiene un valor dado, que designaremos por $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$. Este vector se obtiene de la manera antes indicada como resultado de resolver el problema exterior para un medio semi-infinito y es paralelo a la superficie del conductor. En virtud de la condición de contorno (45.8), el campo magnético en la superficie del conductor es también igual a $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$.

Elijamos como plano xy la superficie del conductor, y el eje z tal que el medio conductor ocupe el semiespacio $z > 0$. Teniendo en cuenta el carácter homogéneo de las condiciones del problema respecto de las direcciones x e y , el campo buscado \mathbf{H} depende solamente de la coordenada z (y del tiempo). Por ello tenemos $\text{div } \mathbf{H} = \partial H_z / \partial z = 0$, y dado que sobre la frontera es $H_z = 0$, también en todo el espacio será $H_z = 0$. Según (45.13), para \mathbf{H} vale la ecuación

$$\partial^2 \mathbf{H} / \partial z^2 + k^2 \mathbf{H} = 0,$$

donde

$$k = \sqrt{(4\pi i \sigma \omega / c^2)} = (1+i)\sqrt{(2\pi \sigma \omega)} / c.$$

La solución de esta ecuación que se anula lejos de la superficie ($z \rightarrow \infty$) es proporcional a e^{ikz} .

Teniendo en cuenta también la condición de contorno en $z=0$, se obtendrá

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-z/\delta} e^{iz/\delta - i\omega t} \quad (45.15)$$

donde la profundidad de penetración δ viene determinada por

$$\delta = c / \sqrt{(2\pi \sigma \omega)} \quad \text{y} \quad k = (1+i)/\delta. \quad (45.16)$$

En cuanto al campo eléctrico, éste se determina ahora mediante la ecuación (45.4). Introduciendo el vector unitario \mathbf{n} correspondiente al eje z , resulta

$$\mathbf{E} = \sqrt{(\omega / 8\pi \sigma)} (1-i) \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \quad (45.17)$$

Obsérvese que $E \sim (\delta/\lambda)H$.

Si el campo $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ está «linealmente polarizado», mediante una elección adecuada del origen del tiempo se puede conseguir que \mathbf{H}_0 sea real. Elijamos entonces la dirección de este vector como dirección del eje y . Separando en (45.16) y en (45.17) la parte real, se obtiene

$$H = H_y = H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right), \quad E = E_x = H_0 \sqrt{(\omega / 4\pi \sigma)} e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{1}{4}\pi\right). \quad (45.18)$$

Junto con el campo eléctrico, de acuerdo con esta misma ley se distribuirá la densidad de corriente de Foucault $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

La aparición de corrientes de Foucault va acompañada de disipación de la energía del campo, que se emite en forma de calor de Joule. La energía media (respecto del tiempo) Q disipada en el conductor en 1 s vale

$$Q = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \int \sigma \mathbf{E}^2 dV.$$

Es posible calcularla también como cantidad media de energía del campo que penetra dentro del conductor en 1 s, es decir, como integral

$$Q = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = (c/4\pi) \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}, \quad (45.19)$$

extendida a la superficie del mismo*.

Hemos visto ya que, en el caso límite $\delta \gg l$, la amplitud del campo magnético dentro de un conductor no depende de la frecuencia, mientras que la amplitud del campo eléctrico es proporcional a ω . En consecuencia, la disipación de energía Q para frecuencias bajas es proporcional a ω^2 .

En cambio, cuando $\delta \ll l$ el campo magnético y el campo eléctrico sobre la superficie del conductor vienen dados por las fórmulas (45.15) y (45.17) con $z = 0$. El vector de Poynting es normal a la superficie y su valor medio resulta ser

$$\bar{S} = (c/16\pi) \sqrt{(\omega/2\pi\sigma)} |\mathbf{H}_0|^2,$$

fórmula en la que la variación de \mathbf{H}_0 sobre la superficie se determina de la manera antes indicada resolviendo el problema correspondiente al campo fuera de un superconductor de la misma forma. La disipación de la energía vale

$$Q = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \oint |\mathbf{H}_0|^2 df. \quad (45.20)$$

Obsérvese que para grandes frecuencias es proporcional a $\sqrt{\omega}$.

La energía disipada puede también expresarse en función del momento magnético total \mathcal{M} que adquiere el conductor en el campo magnético. En un campo periódico, el momento magnético es también una función periódica del tiempo de igual

* Si dos magnitudes cualesquiera $a(t)$ y $b(t)$ se escriben en forma compleja (proporcional a $e^{-i\omega t}$), al formar su producto es necesario, claro está, separar previamente la parte real. Pero si nos interesa solamente el valor medio de este producto (respecto del tiempo), este valor medio se puede calcular en la forma

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} ab^*.$$

En efecto, los términos que contienen los factores $e^{\pm 2i\omega t}$ se anulan al efectuar el promedio y, en consecuencia,

$$\frac{1}{4} \overline{(a+a^*)(b+b^*)} = \frac{1}{4} (ab^* + a^*b).$$

En particular, cabe obtener $\bar{\mathbf{S}}$ como parte real del «vector de Poynting complejo», según la fórmula

$$\bar{\mathbf{S}} = \operatorname{Re} \left[\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right]. \quad (45.19a)$$

frecuencia. Según la fórmula (31.4), la variación de energía libre del cuerpo con el tiempo viene dada por la derivada

$$-\mathcal{M} \cdot d\mathfrak{H}/dt,$$

donde \mathfrak{H} es el campo homogéneo exterior en el que se encuentra el conductor.

Esta expresión no nos da todavía, de manera inmediata, la disipación que se trata de determinar, puesto que la variación de energía del cuerpo no sólo es debida a la cesión de energía, sino también a su migración periódica entre el cuerpo y el campo que lo rodea. Ahora bien, si se efectúa el promedio respecto del tiempo, esta última parte desaparece y, por lo tanto, la energía media disipada por unidad de tiempo es

$$Q = -\overline{\mathcal{M} \cdot d\mathfrak{H}/dt}. \quad (45.21)$$

Si \mathcal{M} y \mathfrak{H} se expresan en forma compleja, se tendrá $\dot{\mathfrak{H}} = -i\omega \mathfrak{H}$ y cabe calcular Q mediante la fórmula

$$Q = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(i\omega \mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}^*) = \frac{1}{2} \omega \operatorname{Im}(\mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}^*) \quad (45.22)$$

(acerca de la aparición aquí del factor $\frac{1}{2}$, véase la nota en la pág. 227).

Las componentes del momento magnético \mathcal{M} son funciones lineales del campo exterior:

$$\mathcal{M}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_k, \quad (45.23)$$

donde los coeficientes sin dimensiones $\alpha_{ik}(\omega)$ dependen de la forma del cuerpo y de su orientación en el campo exterior (pero no de su volumen V); suponemos que en esta fórmula \mathcal{M} y \mathfrak{H} se han expresado en forma compleja, de modo que también las magnitudes α_{ik} serán, en general, complejas. El tensor $V\alpha_{ik}$ puede llamarse *tensor de polarizabilidad magnética* del cuerpo en conjunto. Este tensor es simétrico*:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (45.24)$$

Aplicando esta propiedad, cabe escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}^* &= V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k = \frac{1}{2}V\alpha_{ik}(\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k + \mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*) \\ &= V\alpha_{ik} \operatorname{Re}(\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*). \end{aligned}$$

Si, además, las magnitudes complejas α_{ik} se representan en la forma

$$\alpha_{ik}' + i\alpha_{ik}'',$$

para la energía disipada (45.22) obtendremos

$$Q = \frac{1}{2}V\omega\alpha_{ik}'' \operatorname{Re}(\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*). \quad (45.25)$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 127.

Así pues, la disipación de energía se determina por la parte imaginaria de la polarizabilidad magnética del cuerpo. Vimos más arriba que para bajas frecuencias ω es proporcional a ω^2 , y para frecuencias altas, a $1/\omega$. Podemos así concluir que las magnitudes α'_{ik} , en estos dos casos límite, son proporcionales a ω y a $\omega^{-1/2}$, respectivamente. Anulándose tanto para $\omega \rightarrow 0$ como para $\omega \rightarrow \infty$, pasan por un máximo en este intervalo.

El momento magnético de un conductor en un campo magnético variable se debe esencialmente a las corrientes de conducción que aparecen en el cuerpo; es diferente de cero incluso para $\mu = 1$, es decir, cuando el momento estático se anula. Este último ha de obtenerse a partir de $\mathcal{M}(\omega)$ en el límite en que $\omega \rightarrow 0$. De aquí se sigue que la parte real de la polarizabilidad magnética α'_{ik} tiende, cuando $\omega \rightarrow 0$, al valor constante (a cero si $\mu = 1$) que corresponde a la imanación en un campo constante. En cambio, si $\omega \rightarrow \infty$, cuando el campo magnético no penetra en el interior del cuerpo, las magnitudes α'_{ik} tienden a otro límite constante, que corresponde a la imanación estática de un superconductor de igual forma.

PROBLEMAS

1. Determinar la polarizabilidad magnética de una esfera conductora isótropa de radio a en un campo exterior periódico homogéneo.

Solución. El campo \mathbf{H}_i dentro de la esfera satisface las ecuaciones

$$\Delta \mathbf{H}_i + k^2 \mathbf{H}_i = 0, \quad \text{div } \mathbf{H}_i = 0, \quad k = (1+i)/\delta.$$

Tomemos para él una expresión de la forma $\mathbf{H}_i = \text{rot } \mathbf{A}$, donde \mathbf{A} satisface la ecuación $\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$: dado que \mathbf{H} es axial, \mathbf{A} es un vector polar. Teniendo en cuenta la simetría de la esfera, el único vector constante del cual puede depender la solución buscada es el campo exterior \mathfrak{H} . Designemos por f la solución con simetría esférica de la ecuación escalar $\Delta f + k^2 f = 0$:

$$f = (1/r) \sin kr.$$

Entonces el vector polar \mathbf{A} , que satisface la ecuación vectorial $\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ y que depende linealmente del vector constante axial \mathfrak{H} , se puede escribir en la forma

$$\mathbf{A} = \beta \text{ rot } (f \mathfrak{H})$$

(β es una constante). De acuerdo con esto, buscaremos para \mathbf{H}_i una expresión de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= \beta \text{ rot rot } (f \mathfrak{H}) \\ &= \beta \left(\frac{f'}{r} + k^2 f \right) \mathfrak{H} - \beta \left(\frac{3f'}{r} + k^2 f \right) (\mathbf{n} \cdot \mathfrak{H}) \mathbf{n}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{n} es el versor del vector posición \mathbf{r} (la derivada segunda f'' se elimina mediante la ecuación $\Delta f + k^2 f = 0$).

El campo \mathbf{H}_e fuera de la esfera satisface las ecuaciones $\text{rot } \mathbf{H}_e = 0$, $\text{div } \mathbf{H}_e = 0$. Tomemos para él $\mathbf{H}_e = -\text{grad } \phi + \mathfrak{H}$, donde ϕ satisface la ecuación $\Delta \phi = 0$ y se anula en el infinito. Esta función ϕ , que depende linealmente del vector constante \mathfrak{H} , tiene la forma

$$\phi = -V\alpha \mathfrak{H} \cdot \text{grad } (1/r)$$

($V = 4\pi a^3/3$). Así pues, buscaremos \mathbf{H}_e entre las expresiones del tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_e &= V\alpha \text{ grad } [(\mathfrak{H} \cdot \text{grad})(1/r)] + \mathfrak{H} \\ &= \frac{V\alpha}{r^3} [3(\mathbf{n} \cdot \mathfrak{H})\mathbf{n} - \mathfrak{H}] + \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Evidentemente, $\alpha V \mathfrak{H}$ es el momento magnético de la esfera, de modo que $V\alpha$ resulta ser su polarizabilidad magnética (en virtud de la simetría de la esfera, el tensor α_{ik} se reduce a un escalar $\alpha_{ik} = \alpha \delta_{ik}$).

Sobre la superficie de la esfera ($r = a$) son continuas todas las componentes de \mathbf{H} . Igualando por separado las componentes paralelas y perpendiculares a \mathbf{n} , obtendremos dos ecuaciones que determinan α y β . Para la polarizabilidad (referida a la unidad de volumen), que es lo que nos interesa, se obtiene:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha' + i\alpha'' = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3}{a^2 k^2} + \frac{2}{ak} \operatorname{ctg} ak \right], \\ \alpha' &= -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\delta}{a} \frac{\sinh(2a/\delta) - \sin(2a/\delta)}{\cosh(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)} \right], \\ \alpha'' &= -\frac{9\delta^2}{16\pi a^2} \left[1 - \frac{a}{\delta} \frac{\sinh(2a/\delta) + \sin(2a/\delta)}{\cosh(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)} \right].\end{aligned}$$

En el caso límite de bajas frecuencias ($\delta \gg a$),

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{1}{105\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 = -\frac{4\pi}{105} \frac{a^4 \sigma^2 \omega^2}{c^4}, \\ \alpha'' &= \frac{1}{20\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 = \frac{a^2 \sigma \omega}{10c^2}.\end{aligned}$$

En cambio, para frecuencias elevadas ($\delta \ll a$),

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3\delta}{2a} \right] = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3c}{2a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}} \right], \\ \alpha'' &= \frac{9}{16\pi} \frac{\delta}{a} = \frac{9c}{16\pi a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}.\end{aligned}$$

El valor límite $V\alpha' = -a^3/2$ corresponde al momento magnético de una esfera superconductora, mientras que el valor α'' podría hallarse mediante la fórmula (45.20) utilizando la fórmula (42.3) para el campo en la superficie de una esfera superconductora.

2. Lo mismo para un cilindro conductor (de radio a) en un campo magnético periódico homogéneo perpendicular a su eje.

Solución. El problema constituye la «analogía bidimensional» del problema 1; en lo que sigue, todas las operaciones vectoriales son operaciones bidimensionales en un plano perpendicular al eje del cilindro y \mathbf{r} es el vector posición en este plano. Para el campo en el interior del cilindro, elegiremos una expresión de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_i &= \beta \operatorname{rot} \operatorname{rot} (f \mathfrak{H}) \\ &= \beta \left(\frac{f'}{r} + k^2 f \right) \mathfrak{H} - \beta \left(\frac{2f'}{r} + k^2 f \right) (\mathbf{n} \cdot \mathfrak{H}) \mathbf{n},\end{aligned}$$

donde $f = J_0(kr)$ es la solución simétrica de la ecuación bidimensional $\Delta f + k^2 f = 0$ que es finita para $r = 0$. En cuanto al campo fuera del cilindro, tomaremos para él

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_e &= -2V\alpha \operatorname{grad} [(\mathfrak{H} \cdot \operatorname{grad}) \ln r] + \mathfrak{H} \\ &= \frac{2V\alpha}{r^2} [2(\mathbf{n} \cdot \mathfrak{H}) \mathbf{n} - \mathfrak{H}] + \mathfrak{H}\end{aligned}$$

($V = \pi a^2$). El momento magnético por unidad de longitud del cilindro es $V\alpha \mathfrak{H}$ (véase problema 2, § 3). De la condición $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_e$ para $r = a$, al igual que en el problema 1, obtendremos

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{ka} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right]$$

(se ha utilizado la igualdad $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$).

Cuando $\delta \gg a$, desarrollando las funciones de Bessel en potencias de ka , resulta

$$\alpha' = -\frac{1}{24\pi} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = -\frac{\pi a^4 \sigma^2 \omega^2}{6c^4},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = \frac{a^2 \sigma \omega}{4c^2}.$$

Cuando $\delta \ll a$, utilizaremos la expresión asintótica de las funciones de Bessel, con lo que se encuentra

$$\alpha' = -\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{c}{a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}\right),$$

$$\alpha'' = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta}{a} = \frac{c}{2\pi a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}.$$

3. Lo mismo para un cilindro en un campo magnético paralelo a su eje.

Solución. El campo magnético es paralelo al eje del cilindro en todo el espacio. Fuera del cilindro $\mathbf{H}_e = \mathfrak{H}$, y dentro de él $\mathbf{H}_i = f \mathfrak{H}$ donde f es la solución simétrica de la ecuación bidimensional $\Delta f + k^2 f = 0$, que toma el valor 1 en $r = a$:

$$\mathbf{H}_i = \mathfrak{H} J_0(kr) / J_0(ka).$$

Las corrientes de Foucault en un cilindro son circulares (es decir, \mathbf{j} tiene únicamente la componente j_ϕ en coordenadas cilíndricas) y se determinan a partir del campo $H_z = H$ mediante la igualdad

$$4\pi \mathbf{j} / c = -\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{r}.$$

El momento magnético del cilindro por unidad de longitud $\mathcal{M} = \pi a^2 a \mathfrak{H}$ determinado por las corrientes de conducción está dirigido a lo largo del eje y es igual a

$$(1/2c) \int \mathbf{j} r dV = -\frac{1}{2} \int (\partial H / \partial r) r^2 dr;$$

Calculando la integral, se obtiene

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi} \left[1 - \frac{2}{ka} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right].$$

Así pues, la polarizabilidad longitudinal del cilindro es la mitad de la polarizabilidad transversal que hallamos en el problema 2.

4. Determinar el menor de los coeficientes de amortiguamiento del campo magnético en una esfera conductora.

Solución. Entre las soluciones de las ecuaciones (45.10) correspondientes a una esfera se tienen funciones de diferente simetría. La más simétrica sería la solución que viene determinada dando un escalar constante arbitrario. Sin embargo, dicha solución no puede existir por la siguiente razón:

debiera poseer simetría esférica, $H = H_r(r)$, y en virtud de la ecuación $\text{div } \mathbf{H} = 1/r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rH) = 0$ (que vale tanto dentro como fuera de la esfera) sería $H = \text{const}/r$. Pero esta función no satisface la condición de ser finita en el centro de la esfera.

Al menor valor γ corresponde una de las soluciones que vienen determinadas dando un vector constante arbitrario. La forma de estas soluciones coincide, evidentemente, con la que hallamos en el problema 1, salvo la única diferencia de que en el campo \mathbf{H}_e hay que suprimir el término constante, puesto que en el infinito ha de ser $\mathbf{H} = 0$. Además, k es ahora una cantidad real ($k^2 = 4\pi\sigma\gamma/c^2$) y el vector \mathfrak{H} representa el papel de vector constante arbitrario. De la condición de contorno $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_e$ para $r = a$ se deducen dos ecuaciones que, por eliminación entre ellas de α y β , permiten hallar $\sin ka = 0$. La menor raíz no nula de esta ecuación es $ka = \pi$, de modo que el valor γ mínimo es

$$\gamma = \pi c^2 / 4\sigma a^2.$$

§ 46. Efecto pelicular

Consideremos la distribución de la densidad de corriente en la sección de un conductor por el que circula una corriente total variable diferente de cero. Basándonos en los resultados obtenidos en el párrafo que precede, podemos esperar que, al aumentar la frecuencia, la corriente se concentrará fundamentalmente cerca de la superficie del conductor. Este fenómeno se llama *efecto pelicular*.

La solución exacta del problema que plantea el efecto pelicular depende, en general, no sólo de la forma del conductor, sino también de la manera de excitar las corrientes en él, es decir, de la naturaleza del campo magnético variable exterior que induce la corriente. Sin embargo, existe un caso importante en el que la distribución de la corriente se puede considerar independiente del procedimiento adoptado para excitarla. Se trata de la corriente en un conductor cuyo grosor es pequeño comparado con su longitud.

Al calcular la distribución de la corriente en la sección de un conductor fino, éste se puede suponer rectilíneo. Entonces el campo eléctrico es paralelo al eje del conductor y el vector magnético \mathbf{H} se encuentra en un plano perpendicular al eje.

Consideremos un conductor de sección circular. Este caso es particularmente simple debido a que el campo fuera del conductor es evidente a priori. En efecto, en virtud de la simetría, sobre la superficie del conductor $E = \text{const}$ (en cada instante). Pero para esta condición de contorno las ecuaciones $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ tienen fuera del conductor solamente la solución $E = \text{const}$ en todo el espacio. Por causas análogas, también el campo magnético en torno del conductor será el mismo que existiría cuando por él circula una corriente constante igual al valor instantáneo dado de la corriente variable.

Dentro del conductor el campo eléctrico satisface la ecuación

$$\Delta \mathbf{E} = (4\pi\sigma/c^2)\partial \mathbf{E}/\partial t,$$

que coincide con la ecuación (45.6) para \mathbf{H} (se obtiene eliminando \mathbf{H} entre las ecuaciones (45.1) y (45.4) de igual manera como se obtuvo la ecuación (45.6) eliminando \mathbf{E}). En un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje z coincide con el eje del conductor, el campo \mathbf{E} tiene sólo la componente z y depende únicamente de la coordenada r . Para un campo periódico de frecuencia ω se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + k^2 E = 0, \quad k = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta}, \quad (46.1)$$

donde δ es la profundidad de penetración (45.16) introducida en el párrafo anterior. La solución de esta ecuación que se conserva finita para $r = 0$ es

$$E = E_z = \text{const} \times J_0(kr) e^{-i\omega t} \quad (46.2)$$

(J_0 es una función de Bessel). De acuerdo con la misma ley se distribuye la densidad de corriente $j = \sigma E$.

En cuanto al campo magnético $H_\phi = H$, éste se encuentra a partir del eléctrico de acuerdo con la ecuación (45.1):

$$i\omega H_\phi/c = (\text{rot } \mathbf{E})_\phi = -\partial E_z/\partial r. \quad (46.3)$$

Teniendo en cuenta que $J_0'(u) = -J_1(u)$, obtendremos

$$H = H_\phi = -\text{constante} \times i\sqrt{(4\pi\sigma i/\omega)} J_1(kr) e^{-i\omega t}, \quad (46.4)$$

con la misma constante que en (46.2). Es fácil determinar ésta partiendo de la condición de que sobre la superficie del conductor ha de ser $H = 2I/ca$, donde a es su radio, e I la corriente total que lo recorre.

En el caso límite de frecuencias bajas ($a/\delta \ll 1$), en toda la sección del conductor cabe limitarse a los primeros términos del desarrollo de la función de Bessel:

$$\begin{aligned} E_z &= \text{constante} \times \left[1 - \frac{1}{2}i(r/\delta)^2 - \frac{1}{16}(r/\delta)^4 \right] e^{-i\omega t}, \\ H_\phi &= \text{constante} \times \frac{2\pi\sigma}{c} r \left[1 - \frac{1}{4}i(r/\delta)^2 - \frac{1}{48}(r/\delta)^4 \right] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (46.5)$$

La amplitud E , y con ella también la amplitud de densidad de corriente, crece con la distancia al eje proporcionalmente a $\left[1 + \left(\frac{r}{2\delta} \right)^4 \right]$.

En el caso límite opuesto de altas frecuencias ($a/\delta \gg 1$), en la mayor parte de la sección del conductor cabe utilizar la conocida fórmula asintótica

$$J_0[u\sqrt{(2i)}] \sim u^{-1/2} e^{i(1-\pi/4)u}, \quad (46.6)$$

que es aplicable para grandes valores del argumento de la función de Bessel. Conservando solamente el factor exponencial rápidamente variable, obtendremos

$$\begin{aligned} E_z &= \text{constante} \times e^{-(a-r)/\delta} e^{i(a-r)/\delta - i\omega t}, \\ H_\phi &= \text{constante} \times (1+i) \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} e^{-(a-r)/\delta} e^{i(a-r)/\delta - i\omega t}. \end{aligned} \quad (46.7)$$

Estas fórmulas, naturalmente, coinciden con las fórmulas (45.15) a (45.17) que son aplicables cerca de la superficie de un conductor de forma cualquiera si el efecto pelicular es intenso.

En el caso de un conductor de sección no circular, el cálculo exacto del efecto pelicular plantea un problema considerablemente más complicado, puesto que exige determinar el campo a la vez, tanto en el interior, como en el exterior del conductor. Sólo en el caso límite de un efecto pelicular intenso es de nuevo posible simplificar el problema, puesto que el campo fuera del conductor puede determinarse a priori como campo estático en torno de un superconductor de igual forma (§ 45).

§ 47. Resistencia compleja

Hasta aquí, mientras la frecuencia de la corriente variable se ha supuesto suficientemente pequeña, el valor instantáneo de la intensidad de la corriente $J(t)$ en un circuito lineal se determina por el valor de la fuerza electromotriz $\mathcal{E}(t)$ en el mismo instante de acuerdo con

$$\mathcal{E}(t) = RJ(t), \quad (47.1)$$

donde R es la resistencia del conductor a una corriente constante.

Mas para frecuencias arbitrarias no hay razón alguna para esperar que exista ligamen directo entre los valores de \mathcal{E} y J en, precisamente, el mismo instante. Sólo cabe afirmar que el valor $J(t)$ debe depender linealmente de los valores de $\mathcal{E}(t)$ en todos los instantes anteriores. Representemos simbólicamente este ligamen en la forma $J = \hat{Z}^{-1}\mathcal{E}$, o bien, para la correspondencia inversa

$$\mathcal{E} = \hat{Z}J, \quad (47.2)$$

donde \hat{Z} es un cierto operador lineal*. Si las funciones $\mathcal{E}(t)$ y $J(t)$ se desarrollan en integrales de Fourier, para cada una de sus componentes «monocromáticas» (que dependen del tiempo a través del factor $e^{-i\omega t}$) el resultado de aplicar el operador \hat{Z} se reduce, en virtud del carácter lineal de este último, a multiplicar por una cierta magnitud Z que depende del valor de la frecuencia:

$$\mathcal{E} = Z(\omega)J. \quad (47.3)$$

La función $Z(\omega)$ es, en general, compleja. Ha recibido el nombre de *resistencia compleja* o *impedancia* del conductor.

De la comparación de (47.3) con (47.1) resulta claro que la resistencia ordinaria R es el término de grado cero del desarrollo de la función $Z(\omega)$ en potencias de ω . Para determinar el término siguiente hay que tener en cuenta, junto con R , también la autoinductancia L del conductor**.

Consideremos un circuito lineal en el que actúa una fuerza electromotriz variable $\mathcal{E}(t)$. Por definición de ésta, el trabajo efectuado en 1 s por el campo eléctrico sobre las cargas que se mueven en el conductor viene dado por el producto $\mathcal{E}J$. Este trabajo se transforma en parte en calor de Joule, y en parte se gasta en cambiar la energía del campo magnético de la corriente. Por la propia definición de R y L , el calor de Joule liberado en el conductor en 1 s es RJ^2 y la energía magnética de la corriente vale $LJ^2/2c^2$. La ley de conservación de la energía se expresa así por la ecuación

$$\mathcal{E}J = RJ^2 + \frac{d}{dt} \frac{LJ^2}{2c^2} = RJ^2 + \frac{1}{c^2} LJ \frac{dJ}{dt},$$

* No nos detendremos aquí a considerar las propiedades generales de este operador, dado que son por completo análogas a las del operador $\hat{\epsilon}$, que se expondrán detalladamente en los §§ 58 y 62.

** Aquí y en lo que sigue, entendemos por R y L los valores correspondientes a una corriente continua.

o bien

$$\mathcal{E} = RJ + \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt}. \quad (47.4)$$

Al operar con las expresiones cuadráticas ($\mathcal{E}J$, J^2), hay que escribir \mathcal{E} y J como funciones reales. Pero una vez obtenida la ecuación lineal (47.4), cabe pasar a componentes monocromáticas en la representación compleja: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$, $J = J_0 e^{-i\omega t}$. La ecuación (47.4) se reduce entonces a la relación algebraica

$$\mathcal{E} = \left(R - \frac{i}{c^2} \omega L \right) J,$$

de donde

$$Z = R - \frac{i}{c^2} \omega L. \quad (47.5)$$

Separando en la igualdad $J = \mathcal{E}/Z$ la parte real, obtendremos

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2/c^4)}} \cos(\omega t - \phi), \quad \text{tg } \phi = \omega L/c^2 R, \quad (47.6)$$

lo que permite determinar la amplitud de la corriente y la diferencia de fase entre la corriente y la fuerza electromotriz.

La parte real de la expresión (47.5) coincide con la resistencia R que determina la disipación de energía en el circuito. Es fácil ver que también en el caso general de una dependencia arbitraria $Z(\omega)$ se tiene una relación análoga entre $\text{Re } Z$ y la energía disipada (para una intensidad dada de la corriente).

Promediando respecto del tiempo la potencia $\mathcal{E}J$ requerida para mantener en el circuito la corriente periódica, hallamos aquella parte de dicha potencia que continuamente se gasta en compensar las pérdidas por disipación. De esta manera, la energía Q disipada por segundo en el circuito vale:

$$Q = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathcal{E} J^*),$$

donde \mathcal{E} y J se expresan en forma compleja (cf. la nota en la pág. 227). Substituyendo aquí $\mathcal{E} = ZJ$ y designando las partes real e imaginaria de Z por Z' y Z'' , respectivamente*,

$$Z = Z' + iZ'', \quad (47.7)$$

obtendremos

$$Q = \frac{1}{2} Z' |J|^2$$

o bien, mediante la función real $J(t)$,

$$Q = Z'(\omega) \overline{J}^2, \quad (47.8)$$

* Llamadas a veces resistencia *activa* y *reactiva* o, más generalmente, *resistencia* y *reactancia*.

con lo que queda establecida la relación buscada.

Obsérvese que, por ser Q una magnitud definida positiva, también Z' será siempre positiva:

$$Z' > 0. \quad (47.9)$$

Calculemos $Z(\omega)$ para un conductor de sección circular en el caso de frecuencias cualesquiera*, esto es, sin prescindir al hacerlo del efecto pelicular. Utilizaremos de nuevo para ello la ley de conservación de la energía, si bien en otra forma.

Descompongamos la potencia $\mathcal{E}J$ (\mathcal{E} y J son expresiones reales) en dos términos, uno de los cuales representa ahora la variación de la energía del campo magnético fuera del conductor, y la otra, la energía total absorbida en el interior de éste (tanto en la variación de la energía del campo en él, como en la liberación de calor). La segunda parte se puede calcular como flujo total de energía que penetra por segundo en el conductor a través de su superficie. Obtendremos así

$$\mathcal{E}J = \frac{d}{dt} \left(\frac{L_e J^2}{2c^2} \right) + \frac{cEH}{4\pi} \cdot 2\pi a l = \frac{L_e}{c^2} J \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} cEHal,$$

donde L_e es la parte exterior de la autoinducción del conductor, E y H las intensidades de los campos eléctrico y magnético sobre su superficie, a su radio y l su longitud. El campo H está ligado con la corriente J por la igualdad $H = 2J/ca$. Por consiguiente, dividiendo la igualdad por J , obtendremos

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c^2} L_e \frac{dJ}{dt} + El.$$

Esta ecuación es lineal y cabe, por lo tanto, pasar a la representación compleja de las magnitudes. Entonces

$$\mathcal{E} = ZJ = -\frac{i\omega L_e}{c^2} J + El,$$

de donde

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{El}{J} = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{2El}{caH}. \quad (47.10)$$

Para frecuencias arbitrarias hay que substituir aquí las expresiones de E y H dadas por (46.2) y (46.4):

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{1}{2} Rka \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \quad (47.11)$$

($R = l/\pi a^2 \sigma$). Si el efecto pelicular es débil, aplicaremos los desarrollos (46.5); efectuando el cálculo con una precisión que alcanza los términos del orden de $(a/\delta)^4$

* Pero, claro está, tales que se cumplen las condiciones de cuasiestacionariedad.

y separando la parte real, resulta

$$Z' = R \left[1 + \frac{1}{48} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 \right] = R \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi \sigma \omega a^2}{c^2} \right)^2 \right]. \quad (47.11a)$$

En el caso opuesto de un efecto pelicular intenso, mediante las expresiones (46.7) se obtiene

$$\begin{aligned} Z' &= Ra/2\delta = (l/ca)\sqrt{(\omega/2\pi\sigma)}, \\ Z'' &= -\frac{\omega}{c^2} \left[L_e + \frac{2\delta}{a} L_i \right] = -\frac{\omega}{c^2} \left[L_e + \frac{lc}{a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}} \right]. \end{aligned} \quad (47.12)$$

Por (47.11a) se ve que podemos hacer $Z' = R$ si

$$(\pi\sigma\omega a^2/c^2)^2 \ll 12.$$

Al mismo tiempo

$$Z''/Z' = \omega L/c^2 R = (\pi\sigma\omega a^2/c^2) 2 \ln(l/a)$$

(L se toma de (33.1)). Comparando con la desigualdad que precede, vemos que la región de frecuencias en la que es necesario utilizar la expresión (47.5), sin que se pueda prescindir en ella de la autoinducción, depende de la razón l/a y es relativamente estrecha.

En la práctica, sin embargo, el caso más importante es aquel en que la autoinducción del circuito se debe fundamentalmente a los carretes incluidos en el mismo, que poseen una autoinductancia elevada respecto de la de un conductor no arrollado (véase § 33). En tales circuitos el intervalo de frecuencias en el que debe aplicarse la fórmula (47.5) (es decir, la ecuación (47.4) con R y L constantes) es bastante amplio.

Consideremos un circuito que se encuentra en un campo magnético variable exterior \mathbf{H}_e , cuyo origen puede ser cualquiera. Designaremos por \mathbf{E}_e el campo eléctrico que induciría el campo variable \mathbf{H}_e si no existieran conductores. Tanto \mathbf{H}_e como \mathbf{E}_e varían muy poco en la sección de un conductor delgado (en contraste con el campo propio de las corrientes que pasan por el mismo). Por ello es posible considerar la circulación de \mathbf{E}_e a lo largo del circuito de la corriente sin precisar por dónde pasa precisamente este contorno dentro del conductor. Esta circulación no es sino la fuerza electromotriz \mathcal{E} inducida en el circuito por el campo magnético variable exterior. Según la forma integral de la ecuación de Maxwell, se tiene

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{H}_e \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}, \quad (47.13)$$

donde Φ_e es el flujo del campo exterior a través del circuito considerado. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (47.4), obtendremos

$$RJ + \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}. \quad (47.14)$$

Si pasamos el término que contiene la autoinducción al segundo miembro de la igualdad, esta ecuación se escribe en la forma

$$RJ = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt} - \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

donde $\Phi = \Phi_e + \frac{1}{c} LJ$ es el flujo magnético total, el debido tanto al campo magnético exterior como al campo propio de la corriente. En esta forma la ecuación expresa la ley de Ohm para el circuito en conjunto, es decir, la igualdad entre RJ y la fuerza electromotriz total en el circuito.

La formulación de la ecuación (47.14) como expresión de la ley de Ohm permite generalizarla al caso en que, en el curso del tiempo, cambia también la forma del propio circuito conductor. En tal caso será también función del tiempo la autoinductancia L y en vez de (47.14) habrá que escribir

$$RJ = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(LJ) - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}. \quad (47.15)$$

Sin embargo, al deducir (47.15) de la ley de conservación de la energía sería necesario tener en cuenta, además, el trabajo gastado en la deformación del conductor.

Si se tiene un cierto número de circuitos colocados próximos entre sí y por los que circulan corrientes J_a , para cada uno de ellos el papel de Φ_e en la ecuación (47.14) lo representa la suma de los flujos magnéticos de los demás circuitos (y del campo exterior, si éste existe). El flujo magnético debido a la corriente J_b a través del circuito de la corriente J_a , es $L_{ab}J_b/c$, donde L_{ab} es la inductancia mutua de los dos circuitos. Obtenemos así el siguiente sistema de ecuaciones para la corriente variable en los circuitos:

$$R_a J_a + \frac{1}{c^2} \sum_b L_{ab} \frac{dJ_b}{dt} = \mathcal{E}_a. \quad (47.16)$$

La suma respecto de b incluye también el término de autoinducción ($b = a$), y \mathcal{E}_a es la fuerza electromotriz determinada en el circuito a -ésimo por las fuentes exteriores al sistema de corrientes considerado.

Para corrientes periódicas (monocromáticas) el sistema de ecuaciones diferenciales (47.16) se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathcal{E}_a, \quad (47.17)$$

donde las magnitudes

$$Z_{ab} = \delta_{ab} R_a - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab} \quad (47.18)$$

constituyen la *matriz impedancia*. Análogamente a (47.5), las expresiones (47.18) constituyen los primeros términos del desarrollo de las funciones $Z_{ab}(\omega)$ en potencias de la frecuencia.

Obsérvese que, en esta aproximación, no existe influencia mutua de los circuitos sobre la parte real de su impedancia. Esta influencia se manifiesta en el hecho de que el campo magnético de la corriente variable en un conductor crea corrientes de Foucault (y con ellas una disipación adicional de energía) en otro conductor. Para conductores lineales este efecto es insignificante. Sin embargo, puede llegar a ser apreciable cuando existen cerca de ellos conductores que poseen ya un cierto volumen.

Finalmente, consideremos la cuestión de cómo están ligadas las ecuaciones obtenidas en este párrafo, relativas a las corrientes variables en circuitos lineales, con las ecuaciones generales del campo magnético variable en conductores cualesquiera. Veamos de determinar esta relación en el ejemplo más simple de la corriente que se establece en un circuito al desconectar una fuerza electromotriz constante \mathcal{E}_0 que ha actuado en él hasta el instante $t = 0$. De la ecuación (47.4) se sigue*:

$$J = \mathcal{E}_0/R \text{ para } t < 0, \quad (47.19)$$

$$J = (\mathcal{E}_0/R)e^{-c^2 R t/L} \text{ para } t > 0.$$

Vemos así que, después de desconectar la f.e.m., la corriente disminuye con el tiempo siguiendo una ley exponencial, con decrecimiento

$$\gamma = c^2 R/L. \quad (47.20)$$

Desde el punto de vista de la formulación exacta del problema, el coeficiente γ es el menor de los valores γ_m que se obtienen como resultado de resolver la ecuación exacta (45.10) para el conductor dado. Entre los valores γ_m para un conductor lineal, existe uno (el menor de todos) que, en orden de magnitud, es $\ln(l/a)$ veces menor que los restantes; éste es precisamente el valor (47.20).

§ 48. Capacidad en el circuito de una corriente cuasiestacionaria

En contraste con una corriente constante, una corriente variable puede recorrer no solamente un circuito cerrado, sino también uno abierto. Consideremos un circuito lineal cuyos extremos están unidos a las placas de un condensador que se encuentran a pequeña distancia una de otra. Al propagarse por el circuito la corriente variable, las armaduras del condensador se cargarán y descargarán periódicamente, representando así el papel de «fuentes» y «sumideros» de la corriente en el circuito abierto.

Teniendo en cuenta que la distancia entre las armaduras del condensador es pequeña, la energía magnética de la corriente se puede suponer, como antes, igual a

* Hablando estrictamente, estas fórmulas resultan inaplicables para valores muy pequeños de t , cuando en la descomposición espectral de las funciones son importantes las componentes con frecuencias altas y, por lo cual, es imposible utilizar la ecuación (47.4). Pero durante este pequeño intervalo de tiempo, la corriente J sólo consigue variar muy poco y, en consecuencia, la fórmula (47.19) posee un grado suficiente de aproximación para determinar la intensidad de la corriente en los instantes siguientes.

$LJ^2/2c^2$, donde L es la autoinductancia del circuito cerrado que se obtendría a partir del dado uniendo las armaduras mediante un corto segmento de conductor. Al aplicar la ley de conservación de la energía, sin embargo, es necesario tener en cuenta, junto con la energía magnética, también la energía del campo eléctrico en el condensador. Esta última es igual a $e^2/2C$, donde C es la capacidad del condensador, y $\pm e(t)$, las cargas que se encuentran sobre sus armaduras. Procediendo de la misma manera que en la deducción de la ecuación (47.4), obtendremos*

$$\mathcal{E}J = RJ^2 + \frac{d}{dt} \frac{LJ^2}{2c^2} + \frac{d}{dt} \frac{e^2}{2C} = RJ^2 + \frac{1}{c^2} LJ \frac{dJ}{dt} + \frac{e}{C} \frac{de}{dt}.$$

Pero la intensidad de la corriente J es igual a la disminución de la carga de una de las placas o al aumento en la otra:

$$J = de/dt.$$

Dividiendo los dos miembros de la ecuación por J y expresando en ella J en función de e , se obtendrá

$$\frac{1}{c^2} L \frac{d^2 e}{dt^2} + R \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = \mathcal{E}. \quad (48.1)$$

Esta es precisamente la ecuación buscada para la corriente variable en un circuito con una capacidad.

Si \mathcal{E} es una función periódica del tiempo de frecuencia ω , la ecuación (48.1) se reduce a una relación algebraica entre \mathcal{E} y la carga e , o, lo que es lo mismo, entre \mathcal{E} y la corriente $J = -i\omega e$. En efecto, tenemos $JZ = \mathcal{E}$, donde la impedancia Z se define por

$$Z = R - i \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (48.2)$$

Separando la parte real en la igualdad $J = \mathcal{E}/Z$, obtendremos

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{\left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}}, \quad (48.3)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{1}{R},$$

con lo que queda determinada la intensidad de la corriente en el circuito al que se ha aplicado una fuerza electromotriz exterior $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$.

Pero si $\mathcal{E} = 0$, la corriente en el circuito constituye un sistema de oscilaciones eléctricas «libres». La frecuencia (compleja) de estas oscilaciones viene determinada

* Prescindimos en este párrafo del efecto pelicular.

por la condición $Z = 0$, de donde

$$\omega = -i \frac{Rc^2}{2L} \pm \sqrt{\left[\frac{c^2}{LC} - \left(\frac{Rc^2}{2L} \right)^2 \right]}. \quad (48.4)$$

Según sea el signo del radicando, tendremos un amortiguamiento de las oscilaciones (con decremento $Rc^2/2L$) o una descarga amortiguada puramente aperiódica. En el caso límite $R \rightarrow 0$ se presentan oscilaciones no amortiguadas con una frecuencia que se expresa por la conocida fórmula de Thomson:

$$\omega = c/\sqrt{LC}.$$

La ecuación (48.1) se generaliza sin más a un sistema constituido por un cierto número de circuitos, acoplados inductivamente en los que hay condensadores. La corriente J_a en el circuito a -ésimo está ligada con las cargas $\pm e_a$ en las armaduras del correspondiente condensador por la igualdad

$$J_a = de_a/dt,$$

y en vez de (48.1) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\sum_b \frac{1}{c^2} L_{ab} \frac{d^2 e_b}{dt^2} + R_a \frac{de_a}{dt} + \frac{e_a}{C_a} = \mathcal{E}_a. \quad (48.5)$$

Para corrientes periódicas (monocromáticas) estas ecuaciones se reducen a un sistema algebraico

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathcal{E}_a, \quad (48.6)$$

en el que los elementos de matriz Z_{ab} vienen dados por las fórmulas

$$Z_{ab} = \delta_{ab} \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab}. \quad (48.7)$$

Las frecuencias propias del sistema de corrientes resultan de la condición de compatibilidad de las ecuaciones (48.6) cuando $\mathcal{E}_a = 0$, es decir, de la condición de que el determinante sea igual a cero:

$$|Z_{ab}| = 0. \quad (48.8)$$

Si las resistencias R no son nulas, todas las «frecuencias» tienen una parte imaginaria, es decir, las oscilaciones eléctricas son amortiguadas.

Obsérvese que las ecuaciones (48.5) coinciden formalmente con las ecuaciones mecánicas del movimiento de un sistema con un cierto número de grados de libertad que ejecuta pequeñas oscilaciones amortiguadas. En este caso, el papel de coordenadas generalizadas lo desempeñan las cargas e_a y el de velocidades generalizadas,

las corrientes $J_a = \frac{de_a}{dt}$. La «función de Lagrange» del sistema es

$$\mathcal{L} = \sum_{a,b} \frac{1}{2c^2} L_{ab} \dot{e}_a \dot{e}_b - \sum_a \frac{e_a^2}{2C_a} + \sum_a e_a \mathcal{E}_a. \quad (48.9)$$

En ella, el papel de la energía cinética y potencial de un sistema mecánico lo representan las energías magnética y eléctrica del sistema de corrientes, respectivamente, y las magnitudes \mathcal{E}_a corresponden a las fuerzas impuestas que provocan las oscilaciones forzadas del sistema. En cuanto a las magnitudes R_a , éstas intervienen en la *función disipativa*

$$R = \sum_a \frac{1}{2} R_a \dot{e}_a^2. \quad (48.10)$$

Las ecuaciones (48.5) coinciden con las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{e}_a}. \quad (48.11)$$

PROBLEMAS

1. Determinar las frecuencias propias de las oscilaciones eléctricas en dos circuitos acoplados inductivamente cuyas autoinductancias son L_1 y L_2 y sus capacidades C_1 y C_2 ; se prescinde de las resistencias R_1 y R_2 .

Solución. Las frecuencias se determinan a partir de la condición

$$|Z_{ab}| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0,$$

donde

$$Z_{11} = -i \left(\frac{\omega}{c^2} L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right), \quad Z_{22} = -i \left(\frac{\omega}{c^2} L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right), \quad Z_{12} = -\frac{i\omega}{c^2} L_{12}.$$

El cálculo da:

$$\omega_{1,2}^2 = c^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \mp \sqrt{[(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_{12}^2]}}{2 C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$$

Ambas frecuencias son puramente reales, lo que es consecuencia de haber prescindido de R_1 y R_2 . Cuando $L_{12} \rightarrow 0$ las frecuencias ω_1 y ω_2 tienden a los valores $c/\sqrt{L_1 C_1}$ y $c/\sqrt{L_2 C_2}$ que corresponden a oscilaciones en cada uno de los circuitos por separado.

2. Lo mismo para un circuito constituido por una resistencia R , una capacidad C y una autoinducción L unidas en paralelo.

Solución. Las impedancias de las tres ramas del circuito son iguales a

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = i/\omega C, \quad Z_3 = -i\omega L/c^2,$$

y las corrientes en ellos están ligadas por las igualdades

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0, \quad Z_1 J_1 = Z_2 J_2 = Z_3 J_3.$$

De aquí se sigue la ecuación

$$1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 = 0,$$

que resuelta da

$$\omega = -\frac{i}{2RC} \pm \sqrt{\left[\frac{c^2}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}\right]}.$$

3. Estudiar la propagación de oscilaciones eléctricas en un circuito constituido por una sucesión infinita de mallas idénticas que contienen las impedancias

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right),$$

como se representa en la figura 25. Hallar el intervalo de frecuencias de las oscilaciones que podrían propagarse a lo largo del circuito sin amortiguación*.

Solución. Designemos por i_α la corriente en la malla α como se indica en la figura 25. La ecuación de Kirchhoff da para esta malla:

$$Z_1 i_\alpha + Z_2(2i_\alpha - i_{\alpha-1} - i_{\alpha+1}) = 0.$$

Ésta es una ecuación lineal entre diferencias (respecto de la variable entera α) con coeficientes constantes. Para su solución buscaremos una expresión de la forma

$$i_\alpha = \text{const} \times q^\alpha,$$

y para el parámetro q obtenemos la ecuación característica

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)q + 1 = 0. \quad (1)$$

Supongamos que

$$-4 \leq Z_1/Z_2 \leq 0,$$

acotación a la que corresponden valores de ω^2 que se encuentran entre el menor y el mayor de los valores

$$c^2/L_1C_1 \quad \text{y} \quad c^2(4/C_2 + 1/C_1)/(4L_2 + L_1)$$

Entonces, la ecuación (1) tiene dos raíces conjugadas complejas de módulo unidad $|q| = 1$. Esto significa que al pasar de una malla del circuito a la siguiente, la amplitud de la corriente no disminuye, es decir, que las oscilaciones eléctricas se propagan por el mismo sin amortiguarse. Si hacemos en este caso $q = e^{ikl}$ (l es la longitud de una malla del circuito), el parámetro k representa el papel de «vector de onda» de las oscilaciones que se propagan a lo largo del circuito. En cuanto a la velocidad de propagación u , ésta puede calcularse aplicando la regla general, es decir, mediante la derivada $u = \frac{d\omega}{dk}$.

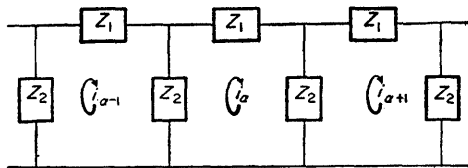


FIG. 25

Pero si ω se encuentra fuera de los límites indicados, la ecuación (1) tiene dos raíces reales q_1 y q_2 ; dado que $q_1q_2 = 1$, una de ellas (por ejemplo, q_1) será en valor absoluto menor que la unidad, y la otra, mayor que 1. Es fácil ver que esto significa la imposibilidad de una propagación de las

* La condición de aplicabilidad de la teoría cuasiestacionaria a un circuito periódico de estas características se traduce en la de que las dimensiones de cada una de las mallas sean pequeñas comparadas con la «longitud de onda» c/ω .

oscilaciones a lo largo del circuito sin que se amortigüen. Para poner en claro las causas de esto, consideremos un circuito de longitud grande, pero finita. Un impulso oscilatorio inicial se aplica al origen del circuito, mientras que su extremo se encuentra cerrado de alguna manera. Matemáticamente, el que este extremo del circuito se encuentre cerrado se representa por una determinada condición de contorno, mediante la cual en la solución general

$$c_1 q_1^{-(\alpha_k - \alpha)} + c_2 q_2^{-(\alpha_k - \alpha)},$$

(α_k es la «coordenada» del extremo del circuito) se determina la razón de los coeficientes c_1/c_2 , que en la forma en que se ha presentado la solución será del orden de 1. Pero entonces, a medida que aumenta $\alpha_k - \alpha$, el segundo término (en el cual $|q_2| > 1$) pronto pasa a ser muy pequeño comparado con el primero. Así pues, casi en toda la longitud del circuito, con exclusión tan sólo de una pequeña parte del mismo cerca del extremo, la solución tiene la forma $i_\alpha = c_1 q_1^{-(\alpha_k - \alpha)}$, en la que $|i_\alpha|$ disminuye en el sentido del origen hacia el extremo del circuito.

Hay que subrayar que este amortiguamiento no tiene el carácter de una absorción disipativa (para la que no hay motivo, visto que no existen resistencias en el circuito); es posible describirlo intuitivamente como resultado de reflexiones del impulso oscilatorio por cada malla sucesiva del circuito.

§49. Movimiento de un conductor en un campo magnético

En todo lo dicho hasta aquí hemos supuesto implícitamente que los conductores se encuentran en reposo en el campo electromagnético (es decir, respecto del sistema de referencia K en el que se han determinado todas las magnitudes \mathbf{E} , \mathbf{H} , etc.). En particular, también la relación $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ entre la corriente y el campo es válida, hablando en general, tan sólo cuando los conductores se hallan en reposo.

Para determinar la relación entre la corriente y el campo en un conductor en movimiento pasaremos del sistema de referencia K a otro sistema, K' , en el que el conductor (o una de sus partes) se encuentra en reposo en el instante dado. En este sistema tenemos $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$, donde \mathbf{E}' es la intensidad del campo eléctrico en K' . Pero según la conocida fórmula de transformación de los campos, \mathbf{E}' se expresa en función del campo en el sistema K por la igualdad*

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c, \quad (49.1)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del sistema K' respecto del sistema K , es decir, en el presente caso, la velocidad del conductor (velocidad que, naturalmente, suponemos pequeña comparada con la velocidad de la luz). Encontramos así

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c). \quad (49.2)$$

Ésta es precisamente la fórmula que determina la relación entre la corriente y el campo en los conductores en movimiento. Acerca de su deducción, hay que hacer notar todavía lo que sigue. Al efectuar el paso de un sistema de referencia a otro, hemos transformado el campo, pero se ha mantenido constante la magnitud \mathbf{j} . La transformación de la densidad de corriente conduciría, cuando $v \ll c$, a la aparición

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, cap. 3. Los valores microscópicos de las intensidades de los campos eléctrico y magnético se han substituido por sus valores promedios $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}$, $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$.

de términos adicionales de orden superior de pequeñez. En la fórmula (49.2), sin embargo, el segundo término, que resulta de la transformación del campo, no es, en general, pequeño comparado con el primero, aunque contiene el factor v/c . Por ejemplo, si el campo eléctrico se debe a la inducción electromagnética en un campo magnético variable, su orden de magnitud contiene un factor $1/c$ más comparado con el campo magnético.

La energía disipada en un conductor cuando por él circula una corriente dada, no puede depender, claro está, del movimiento del mismo. Por lo tanto, la densidad de calor emitida (en 1 s) por efecto Joule en el conductor en movimiento, expresada en función de la densidad de corriente, viene dada por la misma fórmula j^2/σ que en el caso de un conductor en reposo. Pero en vez del producto $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ tenemos ahora*

$$j^2/\sigma = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c).$$

Así pues, en un conductor en movimiento, la suma $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ representa el papel de intensidad «efectiva» del campo eléctrico que crea la corriente de conducción. En consecuencia, la fuerza electromotriz que actúa en un circuito lineal cerrado C viene dada por la integral

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c) \cdot d\mathbf{l}. \quad (49.3)$$

Transformémosla de la siguiente manera. Según la ecuación de Maxwell, $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, se tiene

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$$

o bien, designando por Φ el flujo magnético a través de la superficie S que se apoya sobre el circuito de la corriente,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\mathbf{v}=0}.$$

La derivada respecto del tiempo con el subíndice $\mathbf{v} = 0$ significa la variación del flujo magnético determinada por el cambio en el tiempo del propio campo magnético, sin que varíe la posición del circuito C .

* Se ve por esta fórmula que el calor adicional que se emite (en un intervalo de tiempo δt) en el conductor cuando éste se mueve en un campo magnético es

$$\delta t \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} dV/c = - \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV/c,$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{v} \delta t$ es el desplazamiento en el intervalo δt . Esta cantidad es igual y de signo opuesto al trabajo realizado durante el mismo tiempo por las fuerzas de volumen que actúan sobre el conductor $\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$; con esto se explica la aparente contradicción que mencionamos en la pág. 170.

Escribamos en el segundo término $\mathbf{v} = d\mathbf{u}/dt$, donde $d\mathbf{u}$ es el desplazamiento infinitesimal de un elemento de contorno. Entonces

$$\oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C d\mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}/dt = - \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}/dt,$$

donde $d\mathbf{f} = d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}$ es el elemento de área de la superficie «lateral» s entre dos posiciones infinitamente próximas C y C' del circuito de la corriente ocupadas por éste en los instantes t y $t+dt$ (fig. 26). Dado que el flujo magnético total a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero, está claro que el flujo que atraviesa la superficie «lateral» es igual a la diferencia de los flujos a través de las superficies que se apoyan sobre C y C' . Así pues,

$$\oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -(\partial\Phi/\partial t)_{\mathbf{B}=\text{constante}},$$

donde la derivada respecto del tiempo significa la variación del flujo magnético determinada por el desplazamiento del conductor manteniendo el campo constante.

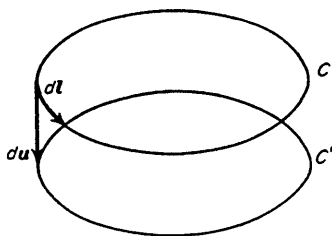


FIG. 26

Sumando los dos términos obtendremos, en definitiva,

$$\mathcal{E} = -(1/c) d\Phi/dt, \quad (49.4)$$

donde la derivada respecto del tiempo representa ahora la variación total del flujo magnético a través del circuito en movimiento. Por lo tanto, la *ley de Faraday* expresada por la fórmula (49.4) es válida cualquiera que sea la causa de la variación del flujo magnético, tanto si se debe a un cambio del propio campo (de lo que ya se habló en el § 47 en la fórmula (47.13)), como si se debe al movimiento del conductor.

En un campo magnético constante, la variación del flujo sólo puede atribuirse a un desplazamiento del circuito. Si éste se mueve de tal manera que todos sus puntos se desplazan a lo largo de líneas de fuerza del campo, sin cortarlas jamás, el flujo del campo a través del circuito no cambia. Esta circunstancia es una consecuencia evidente de que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero y de que el flujo a través de la superficie «lateral» engendrada por el circuito en movimiento es, en este caso, igual a cero idénticamente (puesto que sobre

ella se tiene $B_n = 0$). Cabe decir, en consecuencia, que para que aparezca una fuerza electromotriz de inducción el conductor debe, en cualquier caso, cortar en su movimiento líneas de fuerza magnéticas.

El campo electromagnético en conductores en movimiento viene determinado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 4\pi\mathbf{j}/c = (4\pi\sigma/c)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Despejando en la segunda ecuación \mathbf{E} en función de \mathbf{H} y substituyendo en la primera, obtendremos

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{\sigma} \right). \quad (49.5)$$

En un conductor homogéneo de conductibilidad σ y permeabilidad μ constantes, se tiene

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \Delta\mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (49.6)$$

Estas ecuaciones generalizan las que obtuvimos en el § 45.

Hay que señalar, sin embargo, que si se tiene sólo un conductor que se mueve como un todo (sin deformarse) en un campo magnético exterior, la solución del problema se simplifica considerablemente si se utiliza un sistema de coordenadas rígidamente ligado al cuerpo. En este sistema el conductor se encuentra en reposo, mientras que el campo exterior cambia con el tiempo de acuerdo con una ley dada, de modo que volvemos al tipo de problemas de corrientes de Foucault estudiados en el § 45. La posibilidad de este paso no está ligada, sin embargo, con el principio de relatividad de Galileo (o de Einstein), puesto que el nuevo sistema de coordenadas no será, en general, inercial. La equivalencia de ambos problemas es consecuencia de que, conforme se hizo notar anteriormente, la inducción electromagnética es independiente de las causas que provocan la variación del flujo magnético. Podemos comprobar también que así es por un camino puramente matemático. Para ello desarrollemos la expresión $\operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ teniendo en cuenta que $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ y que en el movimiento de un cuerpo como un todo se tiene asimismo $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (esta igualdad expresa la «incompresibilidad» del cuerpo). Entonces, el primer miembro de la ecuación (49.5) tomará la forma

$$\partial\mathbf{B}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v}. \quad (49.7)$$

Pero esta suma no es sino la derivada de \mathbf{B} respecto del tiempo determinada por la variación de \mathbf{B} respecto de un cuerpo que gira. En efecto, la suma de los dos primeros términos es la derivada «substancial» respecto del tiempo $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$, que

da la variación de \mathbf{B} en un punto que se mueve con velocidad \mathbf{v} . En cuanto al tercer término, éste tiene en cuenta la variación de la orientación de \mathbf{B} respecto del cuerpo: es igual a cero en el caso de un movimiento de traslación pura ($\mathbf{v} = \text{const}$) e igual a $-\mathbf{\Omega} \times \mathbf{B}$ en una rotación del cuerpo ($\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, donde $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular).

Para terminar este párrafo consideremos un singular fenómeno (la llamada *inducción unipolar*) que se produce en la rotación de un conductor imanado. Este fenómeno consiste en que si mediante dos contactos deslizantes (A y B en la figura 27) se une al imán en rotación un conductor en reposo, por éste circulará una corriente. No es difícil calcular la fuerza electromotriz que la crea. Para ello lo más fácil consiste en pasar a un sistema de coordenadas que gira junto con el imán. Si $\mathbf{\Omega}$ es su velocidad de rotación, en el nuevo sistema el conductor girará con velocidad angular $-\mathbf{\Omega}$ (mientras que el imán permanecerá inmóvil). Así pues, se trata ahora de un conductor que se mueve en un campo magnético constante dado \mathbf{B} que crea el imán en reposo; prescindimos de la distorsión del campo por el propio conductor. Según la fórmula (49.3) la fuerza electromotriz que actúa entre los extremos del conductor viene dada por la integral

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_{ACB} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \int_{ACB} \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{\Omega}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (49.8)$$

extendida a lo largo del conductor. Esta fórmula precisamente resuelve el problema propuesto.

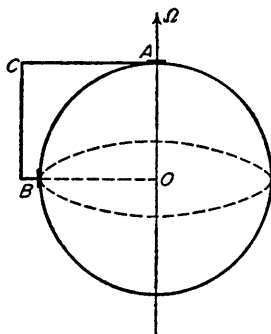


FIG. 27

PROBLEMAS

1. Determinar el momento magnético de una esfera conductora ($\mu = 1$) que gira uniformemente en un campo magnético constante homogéneo; determinar también el momento de las fuerzas que actúan sobre la esfera.

Solución. Sean $\mathfrak{H}_x, 0, \mathfrak{H}_z$ las componentes del campo exterior en un sistema de coordenadas en reposo (cuyo eje z está orientado en el sentido de la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$). En un sistema de

coordenadas ξ, η, z , que gira junto con la esfera, las componentes del campo serán

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x \cos \Omega t, \quad \mathfrak{H}_\eta = -\mathfrak{H}_x \sin \Omega t, \quad \mathfrak{H}_z,$$

o en forma compleja,

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_\eta = -i\mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_z.$$

Por lo tanto, a lo largo de los ejes ξ y η actúa un campo variable de frecuencia Ω y el momento magnético que induce vale

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\xi &= V \operatorname{Re}(\alpha \mathfrak{H}_\xi) = V \mathfrak{H}_x (\alpha' \cos \Omega t + \alpha'' \sin \Omega t), \\ \mathcal{M}_\eta &= V \operatorname{Re}(\alpha \mathfrak{H}_\eta) = V \mathfrak{H}_x (-\alpha' \sin \Omega t + \alpha'' \cos \Omega t), \end{aligned}$$

donde $V\alpha$ es la polarizabilidad magnética compleja de la esfera, determinada en el problema 1 del § 45. En cambio, a lo largo del eje z el campo magnético es constante, por lo que (para $\mu = 1$) no crea ningún momento magnético. Las componentes del momento magnético respecto del sistema de coordenadas en reposo son

$$\mathcal{M}_x = V\alpha' \mathfrak{H}_x, \quad \mathcal{M}_y = V\alpha'' \mathfrak{H}_x, \quad \mathcal{M}_z = 0.$$

Por consiguiente, en este problema α' y α'' determinan, respectivamente, las componentes del momento magnético de la esfera paralela y perpendicular al plano de los vectores Ω y \mathfrak{H} .

El momento de las fuerzas que actúan sobre la esfera es $\mathbf{K} = \mathcal{M} \times \mathfrak{H}$. Sus componentes respecto de los ejes fijos son

$$K_x = V\alpha'' \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z, \quad K_y = -V\alpha' \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z, \quad K_z = -V\alpha'' \mathfrak{H}_x^2.$$

2. Determinar la fuerza electromotriz debida a la inducción unipolar que aparece entre el polo y el ecuador (véase fig. 27) de una esfera imanada homogéneamente que gira con movimiento de rotación uniforme en torno de un eje que coincide con la dirección de imanación.

Solución. Cuando la esfera gira en torno de su eje de imanación, determina un campo constante y, dado que por la esfera no circulan corrientes, de (49.5) se sigue que $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$. Por lo tanto, la integral de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a lo largo del contorno cerrado $OACBO$ (fig. 27) es nula y, en consecuencia, la integración a lo largo de ACB en (49.8) puede substituirse por la correspondiente a AOB , camino éste interior a la esfera. La integral a lo largo del segmento AO del eje de rotación es igual a cero, puesto que Ω y \mathbf{r} son paralelos; la integral a lo largo de OB da, ya que \mathbf{B} y Ω son paralelos dentro de la esfera,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_0^a B_0 \Omega r dr = B_0 \Omega a^2 / 2c,$$

donde a es el radio de la misma y B_0 la inducción magnética en ella. En una esfera uniformemente imanada (cuando no existe campo exterior) la inducción está ligada con la imanación por $B_0 + 2H = 0$ (cf. (8.1)) y $B_0 - H = 4\pi M$, de donde $B_0 = 8\pi M/3$. En función del momento magnético total de la esfera, tenemos finalmente $\mathcal{E} = \Omega \mathcal{M} / ca$.

3. Determinar la carga total que pasa por un circuito cerrado lineal al variar (por la causa que sea) el flujo magnético a través del mismo desde un valor constante (Φ_1) a otro (Φ_2) .

Solución. La carga total buscada es la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} J dt$, donde $J(t)$ es la corriente de inducción que aparece en el conductor. Desde el punto de vista matemático, esta integral es la «componente de Fourier» de la función $J(t)$ para la frecuencia $\omega = 0$. Por ello, está ligada con la misma componente de la fuerza electromotriz por la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} dt = Z(0) \int_{-\infty}^{\infty} J dt;$$

(véase (47.3). Substituyendo $Z(0) = R$ (R es la resistencia del circuito para corriente constante) y $\mathcal{E} = -(1/c) d\Phi/dt$, obtendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} J dt = \frac{1}{cR} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

§ 50. Excitación de corrientes por aceleración

Al estudiar en el párrafo precedente el movimiento del conductor prescindimos de la posible influencia de la aceleración (si la hay). Ahora bien, el movimiento acelerado de un metal es equivalente a la aparición de fuerzas inerciales complementarias, que actúan sobre los electrones de conducción. Si $\dot{\mathbf{v}}$ es la aceleración del conductor y m la masa del electrón, dicha fuerza es igual a $-m\dot{\mathbf{v}}$ y determina sobre el electrón el mismo efecto que causaría un campo eléctrico de intensidad $\frac{m}{e}\dot{\mathbf{v}}$, donde $-e$ es la carga del electrón. Por lo tanto, el campo eléctrico «efectivo» que actúa sobre los electrones de conducción en un metal que se mueve con movimiento acelerado, es

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + m\dot{\mathbf{v}}/e. \quad (50.1)$$

De acuerdo con esto, para la densidad de corriente se tiene

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma (\mathbf{E} + m\dot{\mathbf{v}}/e). \quad (50.2)$$

Despejemos en (50.1) \mathbf{E} en función de \mathbf{E}' y substituyamos el resultado en la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t$$

(suponemos $\mu = 1$). Entonces

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{m}{e} \text{rot } \dot{\mathbf{v}}. \quad (50.3)$$

Escribiremos \mathbf{v} en forma de suma

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

donde \mathbf{u} es la velocidad del movimiento de traslación y $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular de rotación del cuerpo. Derivando respecto del tiempo, se halla la aceleración

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}.$$

Los dos primeros términos no dependen de \mathbf{r} y su contribución es nula al derivar respecto de las coordenadas. El tercer término se puede escribir en la forma

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \text{grad } (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2,$$

y, en consecuencia, también se anula su rotacional. Finalmente, $\text{rot}(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) = 2\dot{\boldsymbol{\Omega}}$.

Por consiguiente, substituyendo $\dot{\mathbf{v}}$ en (50.3) se obtendrá

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t + 2m\dot{\mathbf{\Omega}}/e$$

o bien

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}, \quad (50.4)$$

donde se ha introducido la notación

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - 2mc\dot{\mathbf{\Omega}}/e. \quad (50.5)$$

Dado que $\dot{\mathbf{\Omega}}$ no depende de las coordenadas, la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$$

conserva su forma si expresamos en ella \mathbf{H} en función de \mathbf{H}' :

$$\text{rot } \mathbf{H}' = 4\pi\sigma\mathbf{E}'/c. \quad (50.6)$$

Eliminando \mathbf{E}' entre las ecuaciones (50.4) y (50.6), obtendremos para \mathbf{H}' la ecuación

$$\Delta\mathbf{H}' = (4\pi\sigma/c^2)\partial\mathbf{H}'/\partial t, \quad (50.7)$$

que coincide con aquella a que satisface \mathbf{H} en un conductor en reposo.

Fuera del cuerpo, el campo cumple la ecuación $\Delta\mathbf{H} = 0$ (la longitud de onda se supone grande comparada con las dimensiones del cuerpo); exactamente la misma ecuación satisfará también \mathbf{H}' .

Finalmente, sobre la superficie del conductor, junto con \mathbf{H} será también continuo \mathbf{H}' . Tan sólo es diferente la condición en el infinito: \mathbf{H} tiende a cero, mientras que \mathbf{H}' tiende al límite no nulo $-2mc\dot{\mathbf{\Omega}}/e$.

Vemos así que el problema de determinar el campo magnético variable \mathbf{H} en torno de un cuerpo en rotación no uniforme es equivalente al de determinar el campo \mathbf{H}' alrededor de un cuerpo inmóvil que se encuentra en un campo magnético exterior homogéneo de intensidad

$$\mathfrak{H} = -2mc\dot{\mathbf{\Omega}}/e. \quad (50.8)$$

A partir de la solución \mathbf{H}' de este problema, el campo buscado \mathbf{H}_e fuera del conductor se obtiene restando \mathfrak{H}^* .

El campo magnético que así se produce, al igual que cualquier campo variable, induce en el propio conductor corrientes eléctricas. En un cuerpo simplemente conexo estas corrientes se manifiestan en la forma de un momento magnético ad-

* Aunque en la fórmula (50.8) interviene la propia velocidad angular $\dot{\mathbf{\Omega}}$, y no su derivada respecto del tiempo, todo el razonamiento, y en consecuencia también el resultado, se refieren solamente a una rotación no uniforme. En particular, el campo magnético (50.8) nada tiene que ver con el efecto giro-magnético (el cual se manifiesta incluso en una rotación uniforme y es una cantidad pequeña que no tenemos en cuenta aquí).

quirido por el cuerpo. En un anillo en rotación no uniforme, el efecto se traduce en la aparición de una fuerza electromotriz (*efecto Stewart-Tolman*).

PROBLEMAS

1. Determinar el momento magnético de una esfera en rotación no uniforme (de radio a). La velocidad de rotación se supone tan pequeña que la profundidad de penetración es $\delta \gg a$.

Solución. El momento magnético que adquiere la esfera en el campo $\mathfrak{H}(t)$ (50.8) es

$$\mathcal{M} = V \hat{\alpha} \mathfrak{H}$$

donde $\hat{\alpha}$ es un operador cuya acción sobre las componentes de Fourier de la función $\mathfrak{H}(t)$ viene determinada por las fórmulas que obtuvimos en el problema 1, § 45. Para las componentes cuyas frecuencias ω son tales que $\delta \gg a$, tenemos

$$\mathcal{M} = V \alpha(\omega) \mathfrak{H} \cong -4\pi m a^5 \sigma i \omega \Omega / 15 c e.$$

Esta fórmula, escrita en la forma

$$\mathcal{M} = (4\pi m a^5 \sigma / 15 c e) d\Omega / dt,$$

no contiene ω explícitamente y, por lo tanto, es también válida para las funciones $\Omega(t)$, $\mathcal{M}(t)$ no desarrolladas en componentes de Fourier (admitiendo que en su desarrollo intervienen fundamentalmente tan sólo frecuencias que satisfacen la condición establecida).

2. Determinar la carga total que fluye por un anillo circular fino cuando cesa su movimiento de rotación uniforme en torno de un eje perpendicular a su plano.

Solución. En la fórmula obtenida en el problema 3, § 49, hay que interpretar Φ como flujo del campo \mathfrak{H} (50.8). La carga total que circula al variar la velocidad angular de Ω a 0, es

$$\int_{-\infty}^{\infty} J dt = \frac{2mc}{eRc} \Omega \pi b^2 = \frac{m\sigma V}{2\pi e},$$

(b es el radio del anillo, y V su volumen).

3. Determinar la corriente que se produce en un anillo circular superconductor cuando se interrumpe su rotación uniforme.

Solución. De la condición de que el flujo magnético total a través del anillo sea constante (véase (42.5)) se sigue

$$J = \frac{2mc^2}{eL} \Omega \pi b^2 = \frac{mc^2 b \Omega}{2e [\ln(8b/a) - 2]}.$$

(para el valor de L véase la nota en la pág. 204).

CAPÍTULO VIII

MAGNETOHIDRODINÁMICA

§ 51. Ecuaciones del movimiento de un líquido en un campo magnético

Si un líquido (o un gas) conductor se encuentra en un campo magnético, en sus movimientos hidrodinámicos se inducen en el mismo campos eléctricos y aparecen corrientes eléctricas. Pero sobre las corrientes en un campo magnético actúan fuerzas que pueden influir fundamentalmente sobre el movimiento del líquido. Por otra parte, estas corrientes cambian a su vez el propio campo magnético. De esta manera se forma un cuadro complicado de interacción de fenómenos magnéticos e hidrodinámicos que ha de considerarse tomando como base conjuntamente el sistema de ecuaciones del campo y de ecuaciones del movimiento del líquido.

Como ecuaciones del campo en un medio conductor en movimiento adoptaremos las ecuaciones (49.6). La permeabilidad de los medios, de los que cabe tratar en la magnetohidrodinámica, difiere poco de la unidad y esta diferencia carece de importancia en relación con los fenómenos estudiados aquí. En consecuencia, en todo este capítulo supondremos $\mu = 1$. Así pues, se tienen las ecuaciones

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (51.1)$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta \mathbf{H}. \quad (51.2)$$

Al utilizar estas ecuaciones admitimos que se cumplen determinadas condiciones. Concretamente, los períodos de variación del campo deben ser grandes comparados con el tiempo de recorrido libre de los electrones de conducción. Entonces la relación entre la corriente y el campo eléctrico viene determinada por la misma conductibilidad σ que en el caso de una corriente constante (véase § 45)*. Además, admitimos que σ es constante en todo el medio. Con esto se presupone, en particular, que la conductibilidad es independiente del campo magnético. Para que esto ocurra, el libre camino medio de los electrones debe ser pequeño comparado con el radio de curvatura de su trayectoria en el campo magnético. En otras palabras, el tiempo

* En la nota de la página 222 se señaló también la condición $\sigma/\omega \gg 1$, que debe cumplirse en los malos conductores y que automáticamente queda satisfecha (supuesto que se cumplan las restantes condiciones necesarias) en el caso de buenos conductores. En el presente caso, la razón V/L representa el papel de la frecuencia, donde L y V son parámetros de longitud y velocidad característicos que determinan las propiedades del movimiento dado del líquido. De esta manera se admite que se cumpla la condición $\sigma L/V \gg 1$.

de recorrido libre debe ser pequeño comparado con la frecuencia de Larmor de los electrones eH/mc . Esta condición puede quedar violada en un medio excesivamente enrarecido que se encuentre en un campo magnético intenso.

Las ecuaciones hidrodinámicas contienen, en primer lugar, la ecuación de continuidad

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (51.3)$$

(ρ es la densidad del líquido) y la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} (\zeta + \frac{1}{3} \eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho},$$

donde η , ζ son los dos coeficientes de viscosidad del líquido, y \mathbf{f} la densidad volumétrica de fuerzas externas, en este caso las electromagnéticas. Según la fórmula (34.4) se tiene

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{H} / c = (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H} / 4\pi.$$

Así pues, la ecuación de movimiento del líquido toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} \\ = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} (\zeta + \frac{1}{3} \eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (51.4)$$

A esta ecuación hay que añadir todavía la ecuación de estado

$$p = p(\rho, T), \quad (51.5)$$

que liga entre sí la presión, la densidad y la temperatura del líquido, y la llamada ecuación de transmisión del calor. En la hidrodinámica ordinaria, ésta es*:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T).$$

Aquí s es la entropía de la unidad de masa del líquido, y la expresión en el primer miembro de la igualdad representa la cantidad de calor (referida a 1 cm³) liberada en 1 s en un elemento del líquido en movimiento. En cuanto al segundo miembro de la igualdad, éste representa la energía disipada en el mismo volumen en 1 s. El primer término en él está ligado con la viscosidad; σ'_{ik} es el tensor viscosidad:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

El segundo término da la disipación ligada a la conductibilidad térmica (κ es el

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 49.

coeficiente de conductibilidad calorífica). En un líquido conductor hay que añadir el calor liberado por efecto Joule. Referido a la unidad de volumen, éste es igual a

$$j^2/\sigma = (c^2/16\pi^2\sigma)(\operatorname{rot} \mathbf{H})^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de transmisión del calor en magnetohidrodinámica se escribe:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2. \quad (51.6)$$

Las ecuaciones (51.1) a (51.6) constituyen el sistema completo de ecuaciones de la magnetohidrodinámica (en las hipótesis indicadas al principio del párrafo).

Las ecuaciones (51.4) y (51.6) pueden también escribirse de una forma que expresa las leyes de conservación del impulso y de la energía, respectivamente. En efecto, la ecuación de Navier-Stokes de la hidrodinámica ordinaria se puede llevar a la forma*

$$\partial(\rho v_i)/\partial t = -\partial \Pi_{ik}/\partial x_k, \quad (51.7)$$

(aplicando al hacerlo también la ecuación de continuidad), donde Π_{ik} es el tensor densidad de flujo de impulso, igual a

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik}.$$

A la misma forma se reduce también la ecuación (51.4), con la única diferencia de que a Π_{ik} se añade un término. Tenemos

$$\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} H^2 - (\mathbf{H} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{H}.$$

Por consiguiente, se obtiene para Π_{ik} :

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik} - (H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik})/4\pi. \quad (51.8)$$

Como debe ser, a Π_{ik} se añade el tensor maxwelliano de tensiones en el campo magnético.

En cuanto a la ecuación de transmisión del calor, ésta se transforma (utilizando las demás ecuaciones hidrodinámicas) en la ecuación de conservación de la energía. En la hidrodinámica ordinaria

$$\partial(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon)/\partial t = -\operatorname{div} \mathbf{q},$$

donde \mathbf{q} es la densidad de flujo de energía, igual a

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} (\frac{1}{2} v^2 + w) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \kappa \operatorname{grad} T;$$

mientras que ϵ y $w = \epsilon + p/\rho$ son, respectivamente, la energía interna y la entalpía correspondientes a 1 g de líquido. Cuando en el medio conductor existe un campo

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 15.

magnético, a la densidad de energía se suma la energía magnética $H^2/8\pi$, y a la densidad de flujo de energía, el vector de Poynting $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Expresando en este último \mathbf{E} en función de \mathbf{H} obtendremos:

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \kappa \text{ grad } T, \quad (51.9)$$

y la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \text{div } \mathbf{q}. \quad (51.10)$$

No presenta dificultad comprobar mediante un cálculo directo la equivalencia de las ecuaciones (51.6) y (51.10).

Las ecuaciones se simplifican un poco si el líquido en movimiento se puede considerar incompresible. La ecuación de continuidad (51.3) se reduce entonces a $\text{div } \mathbf{v} = 0$ y en la ecuación (51.4) desaparece el último término. Escribamos una vez más (con vistas a ulteriores referencias) el correspondiente sistema de ecuaciones (en las ecuaciones (51.2) y (51.4) conviene en este caso transformar los términos $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ y $\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}$, respectivamente, mediante conocidas fórmulas vectoriales):

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (51.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + (c^2/4\pi\sigma) \Delta \mathbf{H}, \quad (51.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} + \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (51.13)$$

($\nu = \eta/\rho$ es la viscosidad cinemática). En lo que concierne a la ecuación (51.6), ésta no es necesaria para resolver el problema del movimiento de un líquido incompresible, a menos que nos interese especialmente la distribución de la temperatura en el mismo y su influencia sobre el movimiento.

Volvamos a la ecuación general (51.2). En el caso límite de una conductibilidad suficientemente grande, toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (51.14)$$

y puede dársele una importante interpretación sumamente intuitiva. Desarrollemos el rotacional que aparece en el segundo miembro de la igualdad, teniendo en cuenta que $\text{div } \mathbf{H} = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{v}.$$

Substituyendo aquí, de acuerdo con la ecuación de continuidad (51.3),

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho}{\rho},$$

obtendremos, después de una simple reagrupación de términos,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \right) \mathbf{v}.$$

La expresión en el primer miembro de la igualdad representa la derivada «substancial» que determina la variación de una magnitud en el desplazamiento del líquido junto con la partícula en movimiento; designando esta derivada por d/dt , tenemos

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{H}/\rho) = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \right) \mathbf{v}. \quad (51.15)$$

Por otra parte, consideremos una «línea de fluido» cualquiera, es decir, una línea que se desplace junto con las partículas del líquido que la constituyen. Sea $\delta \mathbf{l}$ el elemento de longitud de esta línea; determinemos cómo varía en el curso del tiempo. Si \mathbf{v} es la velocidad del líquido en un punto que coincide con un extremo del elemento $\delta \mathbf{l}$, su velocidad en el otro extremo será $\mathbf{v} + (\delta \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}$. En consecuencia, en el intervalo de tiempo dt el elemento $\delta \mathbf{l}$ varía en $dt(\delta \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}$, es decir,

$$d(\delta \mathbf{l})/dt = (\delta \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}.$$

Vemos así que la variación de los vectores $\delta \mathbf{l}$ y \mathbf{H}/ρ con el tiempo viene determinada exactamente por la misma ecuación. De aquí se sigue que si en el instante inicial estos vectores coinciden en dirección y sentido, seguirán coincidiendo también en instantes posteriores y sus longitudes variarán proporcionalmente la una a la otra. En otras palabras, si dos partículas del líquido infinitamente próximas se encuentran sobre la misma línea de fuerza en un instante, se encontrarán siempre sobre ella y la magnitud H/ρ cambiará proporcionalmente a la distancia entre ellas.

Pasando de puntos infinitamente próximos a puntos que se encuentran a una distancia finita cualquiera uno de otro, llegamos, por consiguiente, a la conclusión de que cada línea de fuerza se desplace junto con las partículas de líquido que se encuentran sobre ella. Cabe imaginar que (en el caso límite $\sigma \rightarrow \infty$) las líneas de fuerza magnéticas están como «pegadas» a la materia del líquido, moviéndose junto con él. La magnitud H/ρ , en cambio, varía en cada punto proporcionalmente a la extensión de la correspondiente «línea de fluido». Si el líquido que se mueve se puede considerar como incompresible, se tendrá $\rho = \text{const}$ y entonces la propia intensidad H varía proporcionalmente al alargamiento de las líneas de fuerza.

Estos resultados poseen también otro aspecto intuitivo. De ellos se sigue que en el desplazamiento, con el tiempo, de un circuito «líquido» cerrado cualquiera, éste no cortará líneas de fuerza, es decir, el «número» de tales líneas que lo atraviesan se conservará constante. Esto significa (cf. § 49) que el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie que se apoya sobre un contorno «líquido»

permanece invariable en el tiempo.

La cuestión de en qué casos se puede de hecho prescindir de los procesos disipativos en un líquido, no tiene respuesta general, puesto que las correspondientes condiciones dependen fundamentalmente del carácter del movimiento y, por ejemplo, son completamente diferentes para movimientos estacionarios y no estacionarios. No nos ocuparemos aquí en estudiar de modo general esta cuestión.

PROBLEMA

Determinar la distribución de velocidades en un líquido conductor viscoso incompresible que se mueve con movimiento estacionario en el espacio entre dos planos sólidos paralelos; en la dirección perpendicular a los planos se aplica un campo magnético exterior homogéneo H_0 (J. HARTMANN, 1937).

Solución. Es natural suponer que la velocidad del líquido tiene la misma dirección en todos los puntos (dirección en la que tomaremos el eje x); dicha velocidad depende solamente de la coordenada z , perpendicular a la orientación de los planos. Lo mismo vale también para el campo longitudinal H_x que aparece como consecuencia del movimiento del líquido. La presión p , en cambio, depende también de x , ya que en la dirección del movimiento debe producirse un gradiente de presión constante que asegure el carácter estacionario de la corriente. La ecuación $\text{div } \mathbf{v} = 0$ se cumple automáticamente, y de la ecuación $\text{div } \mathbf{H} = 0$ se sigue que $H_z = \text{const} = H_0$. La componente z de la ecuación (51.13) da

$$p + \frac{H_x^2}{8\pi} = P(x), \quad (1)$$

donde $P(x)$ es función sólo de x . El gradiente de la presión a lo largo del eje $-\partial p/\partial x = -dP/dx$ es una cantidad constante.

Además, las componentes x de las ecuaciones (51.12), (51.13), dan

$$H_0 \frac{dv}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{d^2 H_x}{dz^2} = 0, \quad (2)$$

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{H_0}{4\pi} \frac{dH_x}{dz} = \text{constante} \equiv \frac{dP}{dx}. \quad (3)$$

Las condiciones de contorno para la velocidad del líquido viscoso se escriben: $v = 0$ para $z = \pm a$ donde $2a$ es la distancia entre los planos rígidos, y el plano $z = 0$ coincide con el plano medio entre ellos. La misma condición, $H_x = 0$ para $z = \pm a$, debe quedar satisfecha por el campo magnético, puesto que fuera del líquido se tiene un campo exterior no variable H_0 y la componente de \mathbf{H} tangencial a la frontera es continua. La solución de las ecuaciones (2), (3) que satisface estas condiciones es

$$v = v_0 \frac{\cosh(a/\Delta) - \cosh(z/\Delta)}{\cosh(a/\Delta) - 1},$$

$$H_x = -v_0 \frac{4\pi}{c} \sqrt{(\sigma\eta)} \frac{(z/a) \sinh(a/\Delta) - \sinh(z/\Delta)}{\cosh(a/\Delta) - 1}, \quad (4)$$

donde $\Delta = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}$. La constante v_0 es la velocidad del líquido en el plano medio $z = 0$. La relación que la liga con el gradiente de la presión se puede obtener substituyendo (4) en (3). La velo-

cidad media del líquido (relativa a su sección transversal) vale

$$\bar{v} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a v \, dz = -\frac{dP}{dx} \frac{a\Delta}{\eta} \left(\operatorname{ctgh} \frac{a}{\Delta} - \frac{\Delta}{a} \right).$$

El grado de influencia del campo magnético sobre el movimiento del líquido se caracteriza por la razón $\frac{a}{\Delta} = \frac{aH_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$. Cuando $a/\Delta \ll 1$ se obtiene

$$v = v_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right), \quad \bar{v} = -\frac{dP}{dx} \frac{a^2}{3\eta},$$

en correspondencia con el resultado de la hidrodinámica ordinaria. Pero si $a/\Delta \gg 1$, se tendrá

$$v = v_0 (1 - e^{-(a-|z|)/\Delta}), \quad \bar{v} = -\frac{dP}{dx} \frac{ac}{H_0 \sqrt{(\sigma\eta)}}.$$

El aumento del campo magnético hace más plano el perfil de las velocidades en una gran parte de la sección transversal y disminuye la velocidad media del movimiento (para un valor dado del gradiente de presión).

§ 52. Ondas magnetohidrodinámicas

Consideremos la propagación de pequeñas perturbaciones en un medio conductor homogéneo que se encuentra en un campo magnético constante y homogéneo H_0 . Admitiremos que la viscosidad, la conductibilidad calorífica y la resistencia eléctrica ($1/\sigma$) del medio son tan pequeñas que, en primera aproximación, puede prescindirse de la influencia de la disipación de energía ligada con ellas sobre la propagación de las perturbaciones*. Entonces las perturbaciones se propagarán en forma de ondas no amortiguadas**.

Prescindiendo de todos los términos disipativos, escribiremos el sistema de ecuaciones fundamentales (51.1) a (51.4) en la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (52.1)$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (52.2)$$

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (52.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\frac{\operatorname{grad} p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H}. \quad (52.4)$$

En lo que concierne a la ecuación (51.6), ésta se reduce a la ecuación de conservación de la entropía (condición de movimiento adiabático). Si el medio no perturbado

* Obsérvese que al hacer $1/\sigma = 0$ ampliamos el intervalo de frecuencias en que son aplicables las ecuaciones consideradas: dejan de ser necesarias las condiciones que permiten asegurar la falta de dispersión de σ y su independencia respecto del campo magnético.

** La condición que hace posible prescindir de dicha influencia se reduce a que el coeficiente de amortiguamiento de las ondas sea pequeño, coeficiente que se calculará en el problema de este párrafo.

es homogéneo, en virtud de esta ecuación será también $s = \text{const}$ en el medio perturbado, es decir, el movimiento será isentrópico.

Hagamos

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad (52.5)$$

donde el índice 0 caracteriza los valores de equilibrio constantes de las diferentes magnitudes y \mathbf{h} , ρ' , p' sus pequeñas variaciones en la onda. Pequeña y del mismo orden es también la velocidad \mathbf{v} , que es nula en el equilibrio. Teniendo en cuenta que el movimiento es isentrópico, las variaciones de presión y de densidad están ligadas entre sí por

$$p' = (\partial p / \partial \rho)_s \rho'.$$

Pero $(\partial p / \partial \rho)_s$ es el cuadrado de la velocidad ordinaria del sonido en el medio dado. Designando esta velocidad por u_0 , tenemos $p' = u_0^2 \rho'$. Prescindiendo en las ecuaciones (52.1) a (52.4) de pequeñas cantidades de orden superior al primero, obtendremos el sistema siguiente de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, & \partial \mathbf{h} / \partial t &= \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \\ \partial \rho' / \partial t + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \partial \mathbf{v} / \partial t &= - (u_0^2 / \rho) \operatorname{grad} \rho' - (\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}) / 4\pi\rho. \end{aligned} \right\} \quad (52.6)$$

Aquí y en lo que sigue, para abreviar la notación hemos prescindido del índice 0 en los valores de equilibrio de las diferentes cantidades. Para una perturbación periódica en el tiempo, la primera de estas ecuaciones es consecuencia de la segunda y podemos prescindir de ella.

Buscaremos soluciones de estas ecuaciones que sean de la forma $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ es decir, soluciones que representan la propagación de ondas planas con vector de onda \mathbf{k} y frecuencia ω . Para ellas el sistema (52.6) se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} -\omega \mathbf{h} &= \mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), & \omega \rho' &= \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}, \\ -\omega \mathbf{v} + (u_0^2 / \rho) \rho' \mathbf{k} &= -\mathbf{H} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{h}) / 4\pi\rho. \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones prueba, ante todo, que el vector \mathbf{h} es perpendicular a la dirección del vector de onda, en cuyo sentido elegiremos a continuación el eje x . El plano determinado por \mathbf{k} y \mathbf{H} se tomará como plano xy . Además, introduciremos la «velocidad de fase» de la onda

$$u = \omega / k.$$

Eliminando ρ' mediante la segunda ecuación y pasando en las demás a componentes, se obtendrá el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} u h_z &= -v_z H_x, & u v_z &= -H_x h_z / 4\pi\rho, \\ u h_y &= v_x H_y - v_y H_x, & u v_y &= -H_x h_y / 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (52.7)$$

$$v_x \left(u - \frac{u_0^2}{u} \right) = H_y h_y / 4\pi\rho. \quad (52.8)$$

Hemos separado aquí las ecuaciones en dos grupos, el primero de los cuales contiene solamente las variables h_z, v_z , y el segundo, tan sólo h_y, v_x, v_y . De aquí se sigue que las perturbaciones de estos dos grupos de variables se propagan con independencia las unas de las otras. En lo que concierne a las perturbaciones de la densidad (y con ellas también en la presión), éstas se propagan junto con las correspondientes a h_y, v_x, v_y , puesto que están ligadas con v_x por la relación

$$\rho' = \rho v_x / u. \quad (52.9)$$

La condición de compatibilidad de las dos ecuaciones (52.7) da

$$u \equiv u_1 = H_x / \sqrt{(4\pi\rho)}. \quad (52.10)$$

En estas ondas la componente h_z del campo magnético perpendicular a la dirección de propagación de la onda y a la del campo constante \mathbf{H} experimenta oscilaciones. Junto con h_z , oscila la velocidad v_z , ligada con h_z por la igualdad

$$v_z = -h_z / \sqrt{(4\pi\rho)}. \quad (52.11)$$

La relación entre ω y k (o, como suele decirse, la *relación de dispersión*) dada por la fórmula (52.10) depende esencialmente de la dirección del vector de onda:

$$\omega = \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} / \sqrt{(4\pi\rho)}.$$

La velocidad física de propagación de las ondas, en cambio, resulta ser, como es sabido, la llamada *velocidad de grupo*, dada por la derivada $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. En el presente caso, esta magnitud es igual a

$$\partial\omega/\partial\mathbf{k} = \mathbf{H} / \sqrt{(4\pi\rho)},$$

y no depende de la dirección de \mathbf{k} ; la dirección de propagación de la onda, entendiendo por ella la de la velocidad de grupo, coincide con la de \mathbf{H} .

Consideremos las ondas descritas por las ecuaciones (52.8). Formando el determinante de las mismas e igualándolo a cero, tendremos la ecuación

$$(u^2 - u_0^2) \left(u^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \right) = \frac{u^2 H_y^2}{4\pi\rho}.$$

Esta ecuación bicuadrada (respecto de u) tiene las raíces*

$$u_{2,3} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} + \frac{H_x u_0}{\sqrt{(\pi\rho)}} \right)} \pm \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} - \frac{H_x u_0}{\sqrt{(\pi\rho)}} \right)} \right\}. \quad (52.12)$$

* Las raíces de la ecuación bicuadrada $x^4 + px^2 + q = 0$ se pueden escribir en la forma

$$x = \pm \frac{1}{2} \{ \sqrt{(-p + 2\sqrt{q})} \pm \sqrt{(-p - 2\sqrt{q})} \}.$$

Obtenemos así dos tipos más de ondas. En éstas oscilan las magnitudes h_y , v_x , v_y (y la densidad ρ'). Los vectores \mathbf{h} , \mathbf{v} se encuentran en el plano de los vectores \mathbf{H} , \mathbf{k} .

En el caso límite en que $H^2 \ll 4\pi\rho u_0^2$, tenemos $u_2 \cong u_0$ y entonces de las ecuaciones (52.8) se sigue que $v_y \ll v_x$. En otras palabras, las ondas de este tipo se convierten, en el límite, en ondas acústicas ordinarias que se propagan con la velocidad u_0 . El débil campo transversal en la onda está ligado con v_x por la relación

$$h_y \cong v_x H_y / u_0.$$

En el mismo caso límite, u_3 coincide en primera aproximación con u_1 , siendo $v_x \cong 0$, $v_y \cong -h_y / \sqrt{4\pi\rho}$, al igual que en una onda del primer tipo, pero los vectores \mathbf{v} y \mathbf{h} se encuentran en el plano \mathbf{k} , \mathbf{H} en vez de ser perpendiculares al mismo.

Vemos también que en un líquido incompresible (al que corresponde formalmente el paso al límite $u_0 \rightarrow \infty$) subsiste en definitiva un solo tipo de ondas, con dos direcciones de polarización independientes. La ley de dispersión que corresponde a estas ondas viene dada por la fórmula (52.10); los vectores \mathbf{v} y \mathbf{h} son perpendiculares al vector de onda y están ligados entre sí por

$$\mathbf{v} = -\mathbf{h} / \sqrt{4\pi\rho}. \quad (52.13)$$

Estas ondas fueron discutidas por vez primera por H. ALFVÉN (1942)*.

El hecho de que, cuando existe un campo magnético longitudinal, los desplazamientos transversales del líquido se propagan en el mismo en forma de ondas, tiene una interpretación intuitiva simple. Vimos al final del § 51 que las líneas de fuerza magnéticas se comportan (en un líquido con $\sigma \rightarrow \infty$) como «líneas de fluido». Por ello, el desplazamiento transversal de las partículas del líquido conduce a la curvatura de estas líneas y, por lo tanto, al alargamiento de las mismas y, en algunos puntos, a su acortamiento. Pero las fuerzas que actúan en el campo magnético (expresadas por el tensor de tensiones de Maxwell) se comportan como si las líneas de fuerza magnéticas tendieran a acortarse a la vez que se repelen unas a otras**. En consecuencia, al curvarse aparecen fuerzas «cuasielásticas» que tienden a enderezarlas de nuevo, lo que conduce a la aparición de oscilaciones.

Es interesante que en un líquido incompresible la onda plana magnetohidrodinámica representada por las fórmulas (52.10) y (52.13) resulta ser de hecho solución exacta de las ecuaciones válidas para campos transversales arbitrarios \mathbf{h} , no necesariamente pequeños. (Esto, sin embargo, no es aplicable a la superposición de un cierto número de ondas planas que se propagan en diferentes direcciones.) En efecto, volvamos a las ecuaciones exactas (52.1) a (52.4). La tercera de ellas se reduce en un líquido incompresible a $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Si se busca una solución en la cual todas las mag-

* A veces se las llama ondas *magnetohidrodinámicas* en el sentido estricto de la palabra. En el caso general de campos magnéticos no débiles, la división de las ondas en magnetohidrodinámicas y acústicas ordinarias es imposible.

** En efecto, supongamos que la línea de fuerza coincide con el eje z . Entonces la tensión longitudinal Π_{zz} (51.8) contiene un término negativo $-H^2/8\pi$, mientras que en las transversales Π_{xx} y Π_{yy} encontramos un término positivo $H^2/8\pi$.

nitudes dependen solamente de una coordenada, la x (y del tiempo t), de dicha ecuación se deduce que $v_x = \text{const}$; mediante el paso a otro sistema de coordenadas que se mueve con movimiento uniforme a lo largo del eje x , se puede siempre conseguir que sea $v_x = 0$. Pero de la ecuación $\text{div } \mathbf{H} = 0$ se sigue que $H_x = \text{const}$. Designando las componentes transversales de \mathbf{H} por \mathbf{h} , de las ecuaciones (52.2) y (52.4) se sigue (para $v_x = 0$)

$$\partial \mathbf{h} / \partial t = H_x \partial \mathbf{v} / \partial x, \quad \partial \mathbf{v} / \partial t = (H_x / 4\pi\rho) \partial \mathbf{h} / \partial x,$$

es decir, las ecuaciones exactas se reducen automáticamente a ecuaciones lineales que describen una onda plana con la velocidad de fase (52.10) y en la que los vectores \mathbf{v} y \mathbf{h} están ligados por la relación (52.13). La componente x de la ecuación (52.4) da

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} = 0,$$

de donde

$$p + h^2/8\pi = \text{constante}, \quad (52.14)$$

con lo que se determina la marcha de la variación de la presión en la onda.

Volvamos de nuevo a las fórmulas (52.8) y (52.12) y consideremos el caso límite opuesto en el que $H^2 \gg 4\pi\rho u_0^2$. Para u_2 tenemos entonces, en primera aproximación,

$$u_2 = H/\sqrt{(4\pi\rho)}.$$

Dado que esta expresión no depende en modo alguno de \mathbf{k} , la velocidad de grupo coincide en módulo con u_2 y está dirigida en el sentido de \mathbf{k} . El vector \mathbf{v} en esta onda es perpendicular a \mathbf{H} (fig. 28) y su valor absoluto está ligado con $h = h_y$ por

$$v = h/\sqrt{(4\pi\rho)}.$$

Para u_3 tenemos, en este caso,

$$u_3 = u_0 H_x / H$$

y la velocidad de grupo es

$$\partial\omega/\partial\mathbf{k} = u_0 \mathbf{H} / H.$$

El vector \mathbf{v} en esta onda es antiparalelo a \mathbf{H} , y su módulo viene dado por

$$v = hH^2/4\pi\rho u_0 H_y.$$

Cuando la relación entre H^2 y ρu_0^2 es arbitraria, tanto u_2 como u_3 dependen de la dirección del vector de onda. Al aumentar el ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{H} , u_2 crece con monotonía, y u_3 disminuye de manera monótona. Es fácil ver que siempre se cumplen las desigualdades

$$u_3 \leq u_1 \leq u_2, \quad u_2 \geq u_0, \quad u_3 \leq u_0. \quad (52.15)$$

Si $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ ($H_y = 0$, $H_x = H$), u_2 y u_3 son iguales, respectivamente, a la mayor y a la menor de las cantidades u_0 y $u_1 = H/\sqrt{4\pi\rho}$. Pero si $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ ($H_x = 0$, $H_y = H$), se tiene

$$u_2 = \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right)}, \quad (52.16)$$

y u_1 y u_3 tienden a cero, es decir, no quedan más que ondas de un solo tipo.

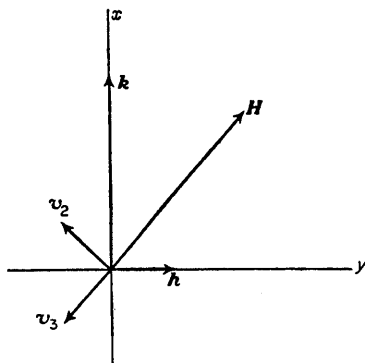


FIG. 28

En este último caso resulta posible hallar soluciones exactas de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica para una onda plana no ligadas con la hipótesis de que su amplitud sea pequeña (*S. A. Kaplan y K. P. Staniukovich*, 1954). Si $H_x = 0$ y $H_y = H$, la ecuación (52.1) queda satisfecha idénticamente, y las ecuaciones (52.2) a (52.4) dan

$$\partial H / \partial t + \partial(v_x H) / \partial x = 0, \quad (52.17)$$

$$\partial \rho / \partial t + \partial(v_x \rho) / \partial x = 0, \quad (52.18)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial H^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (52.19)$$

De las dos primeras ecuaciones se sigue, como se ve fácilmente, que la razón $H/\rho = b$ satisface la ecuación

$$\partial b / \partial t + v_x \partial b / \partial x = 0$$

o bien $db/dt = 0$, donde la derivada total representa la variación de una magnitud en el desplazamiento de un elemento dado del líquido. De aquí se deduce que si en el instante inicial el fluido era homogéneo, de modo que en él b era constante, también se tendrá luego*

$$H/\rho = b = \text{constante}. \quad (52.20)$$

* De acuerdo con los resultados generales acerca de la relación entre H/ρ y las líneas de fuerza «fluidas» (§ 51), si se tiene en cuenta que, en el presente caso, la longitud de estas últimas no cambia con el tiempo.

Substituyendo $H = \rho b$ en la tercera ecuación, obtendremos

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{b^2}{8\pi} \rho^2 \right). \quad (52.21)$$

Así pues, el campo magnético queda eliminado de las ecuaciones y el problema se reduce a resolver las ecuaciones (52.18) y (52.21). Pero éstas difieren de las ecuaciones del movimiento unidimensional de la hidrodinámica ordinaria tan sólo en un cambio en la ecuación de estado del gas: en vez de la ecuación verdadera $p = p(\rho)$ (para una entropía dada s) hay que utilizar la ecuación

$$p^*(\rho) = p(\rho) + b^2 \rho^2 / 8\pi.$$

Esta circunstancia permite trasladar al caso considerado del movimiento magnetohidrodinámico todos los resultados de la hidrodinámica ordinaria. En particular, pueden aplicarse las fórmulas de la solución exacta para ondas unidimensionales móviles (solución de Riemann)*, representando el papel de velocidad del sonido en ellas la magnitud

$$\begin{aligned} u^* &= \sqrt{\left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{b^2}{4\pi} \rho \right)} \\ &= \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi \rho} \right)}, \end{aligned}$$

de acuerdo con la fórmula (52.16).

PROBLEMA

Determinar el coeficiente de absorción de una onda magnetohidrodinámica (supuesto pequeño) en un líquido incompresible.

Solución. El coeficiente de absorción de la onda se determina por

$$\gamma = \bar{Q} / 2\bar{q},$$

donde \bar{Q} es el valor medio (respecto del tiempo) de la energía disipada en 1 s en 1 cm³ y \bar{q} es la densidad media de flujo de energía en la onda; la amplitud de ésta disminuye, a medida que se propaga, proporcionalmente a $e^{-\gamma x}$. \bar{Q} viene dado por el segundo miembro de la ecuación (51.6); en un líquido incompresible y para una onda que se propaga a lo largo del eje x (con lo cual $v_x = 0$), se tiene

$$Q = \eta (\partial \mathbf{v} / \partial x)^2 + (c^2 / 16\pi^2 \sigma) (\partial \mathbf{h} / \partial x)^2.$$

En la densidad de flujo de energía (51.9), en cambio, prescindimos de los pequeños términos disipativos, con lo que resulta

$$q_x = -H_x \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} / 4\pi.$$

Utilizando las fórmulas (52.10), (52.13), obtendremos en definitiva

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2u_1^3} \left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right).$$

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 94.

§ 53. Discontinuidades tangenciales y rotacionales

Las ecuaciones del movimiento de un medio magnetohidrodinámico «perfecto» (de un medio sin viscosidad, ni conductibilidad térmica, ni resistencia eléctrica) admiten discontinuidades de la corriente al igual que en la hidrodinámica ordinaria.

Para poner en claro las condiciones que deben quedar satisfechas sobre una superficie de discontinuidad, consideremos un elemento cualquiera de esta superficie y utilicemos un sistema de coordenadas que se mueva junto con él*.

Ante todo, sobre una superficie de discontinuidad debe ser continuo el flujo de materia: la cantidad de gas que penetra por una cara de la superficie debe ser igual a la cantidad de gas que sale por la otra. Esto significa que $\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$, donde los índices 1 y 2 se refieren a las dos caras de la superficie de discontinuidad y el índice n designa la componente de un vector normal a la superficie. Designaremos más adelante la diferencia de valores de cualquier magnitud a uno y otro lado de la superficie de discontinuidad mediante corchetes. Así, pues,

$$[\rho v_n] = 0.$$

Además, debe ser continuo el flujo de energía. Utilizando la expresión (51.9) (y suprimiendo en ella los términos disipativos), tendremos

$$[q_n] = [\rho v_n(\frac{1}{2}v^2 + w) + v_n H^2/4\pi - H_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}/4\pi] = 0.$$

También debe ser continuo el flujo de impulso. Esta condición significa que $[\Pi_{ik} n_k] = 0$, donde Π_{ik} es el tensor densidad de flujo de impulso, y \mathbf{n} el vector unitario normal a la superficie. Con ayuda de (51.8), obtendremos a partir de aquí las ecuaciones

$$[p + \rho v_n^2 + (\mathbf{H}_t^2 - H_n^2)/8\pi] = 0,$$

$$[\rho v_n \mathbf{v}_t - H_n \mathbf{H}_t/4\pi] = 0,$$

donde el subíndice t designa las componentes de los vectores tangentes a la superficie.

Finalmente, son continuas la componente normal del campo magnético y la componente tangencial del campo eléctrico. Si la conductibilidad del medio es infinita, el campo eléctrico inducido es

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{H}/c,$$

Por ello, la condición $[\mathbf{E}_t] = 0$ da

$$[H_n \mathbf{v}_t - \mathbf{H}_t v_n] = 0.$$

En lo que sigue resultará conveniente utilizar en vez de la densidad del gas su

* Mediante esta condición, el sistema de coordenadas queda fijado solamente en lo que concierne a su velocidad en la dirección normal a la superficie. En cambio, a su velocidad tangencial se le puede sumar todavía un vector constante arbitrario.

volumen específico $V = 1/\rho$. La densidad de flujo de masa a través de la superficie de discontinuidad la designaremos por j :

$$j = \rho v_n = v_n/V.$$

Teniendo en cuenta que j y H_n son continuas, las demás condiciones de contorno se pueden escribir de la siguiente manera:

$$j[w + \frac{1}{2}j^2V^2 + \frac{1}{2}v_t^2 + V\mathbf{H}_t^2/4\pi] = H_n[\mathbf{H}_t \cdot \mathbf{v}_t]/4\pi, \quad (53.1)$$

$$[p] + j^2[V] + [\mathbf{H}_t^2]/8\pi = 0, \quad (53.2)$$

$$j[\mathbf{v}_t] = H_n[\mathbf{H}_t]/4\pi, \quad (53.3)$$

$$H_n[\mathbf{v}_t] = j[V\mathbf{H}_t]. \quad (53.4)$$

Éste es precisamente el sistema fundamental de ecuaciones que describen las discontinuidades en magnetohidrodinámica.

En la hidrodinámica ordinaria son posibles, como es sabido, discontinuidades de dos tipos totalmente diferentes: ondas de choque y discontinuidades tangenciales*. La aparición de dos tipos de discontinuidades está vinculada matemáticamente con el hecho de que algunas de las ecuaciones que traducen las condiciones de contorno es posible representarlas como anulación de un producto de dos factores; igualando a cero cada uno de ellos por separado, obtenemos dos soluciones completamente independientes.

En magnetohidrodinámica, en cambio, las ecuaciones (53.1) a (53.4) no presentan esta forma, y basándose en ello cabría pensar que, en total, se tiene solamente un único tipo de discontinuidades que abarca todos los casos particulares posibles. En realidad, sin embargo, resulta que también aquí existen diferentes tipos de discontinuidad que no cabe considerar como casos particulares de uno mismo más general (*F. de Hoffmann y E. Teller*, 1950).

Consideremos en primer lugar aquellas discontinuidades en las que $j = 0$. Ello significa que $v_{1n} = v_{2n} = 0$, esto es, que el líquido se mueve paralelamente a la superficie de discontinuidad. Si, además, $H_n \neq 0$, por las ecuaciones (53.1) a (53.4) se ve que deben ser continuas la velocidad, la presión y el campo magnético. En cambio, puede experimentar un salto arbitrario la densidad (y también la entropía, la temperatura, etc.). Tal discontinuidad, que se puede llamar *de contacto*, es simplemente la frontera de separación entre dos medios en reposo con diferentes densidades y temperaturas.

Pero si además de $j = 0$ también es $H_n = 0$, de las cuatro ecuaciones (53.1) a (53.4) quedan satisfechas idénticamente tres de ellas; esto hace ver ya que se trata de un caso singular. Encontramos de esta manera un tipo de discontinuidad que se podría llamar, al igual que en la hidrodinámica ordinaria, *discontinuidad tangencial*. Sobre una tal superficie de discontinuidad la velocidad y el campo magnético son

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 81.

tangentes y experimentan saltos arbitrarios en magnitud y en dirección:

$$j = 0, \quad H_n = 0, \quad [\mathbf{v}_t] \neq 0, \quad [\mathbf{H}_t] \neq 0. \quad (53.5)$$

También es arbitrario el salto de densidad, mientras que el salto de presión está ligado con el de \mathbf{H}_t por la ecuación (53.2):

$$[V] \neq 0, \quad \left[p + \frac{\mathbf{H}_t^2}{8\pi} \right] = 0. \quad (53.6)$$

En cuanto a los saltos de las demás magnitudes termodinámicas (la entropía, la temperatura, etc.), éstos se determinan a partir de las discontinuidades de V y p mediante la ecuación de estado.

Otro tipo de discontinuidades lo constituyen aquellas en las que la densidad no experimenta salto alguno. Teniendo en cuenta la continuidad del flujo $j = v_n/V$, del hecho de que la densidad no presente un salto se sigue inmediatamente que también será continua la componente normal de la velocidad

$$j \neq 0, \quad [V] = 0, \quad [v_n] = 0. \quad (53.7)$$

En el segundo miembro de la ecuación (53.4) saquemos ahora V fuera de los corchetes y, dividiendo término a término las ecuaciones (53.4) y (53.3), se obtiene

$$j = H_n / \sqrt{(4\pi V)}. \quad (53.8)$$

Con esto la ecuación (53.3) o la (53.4) da

$$[\mathbf{v}] = \sqrt{(V/4\pi)}[\mathbf{H}_t]. \quad (53.9)$$

En la ecuación (53.1) escribamos $w = \epsilon + pV$; teniendo en cuenta la continuidad de V , substituyendo H_n de acuerdo con (53.8) y reagrupando términos, escribiremos dicha ecuación en la forma

$$j[\epsilon] + jV \left[p + \frac{\mathbf{H}_t^2}{8\pi} \right] + \frac{1}{2}j \left[\left(\mathbf{v}_t - \sqrt{\frac{V}{4\pi}} \mathbf{H}_t \right)^2 \right] = 0.$$

El segundo término se anula aquí en virtud de la igualdad (53.2), y el tercero, en virtud de (53.9), de modo que queda $[\epsilon] = 0$, es decir, junto con la densidad es también continua la energía interna. Ahora bien, cualquier otra magnitud termodinámica viene unívocamente determinada si se dan las dos magnitudes ϵ y V . Por lo tanto, son también continuas las restantes magnitudes termodinámicas, en particular la presión. Pero de la ecuación (53.2) se sigue entonces que es asimismo continuo el cuadrado \mathbf{H}_t^2 , esto es, el módulo del vector \mathbf{H}_t :

$$[p] = 0, \quad [H_t] = 0. \quad (53.10)$$

Que H_t y H_n sean continuas a la vez significa que también se conserva invariable el valor absoluto del propio vector \mathbf{H} y el ángulo que forma con la normal a la superficie.

Las fórmulas (53.7) a (53.10) determinan todas las propiedades de las disconti-

nidades consideradas. Todas las magnitudes termodinámicas son continuas, mientras que el campo magnético gira en torno de la dirección normal al pasar de una a otra cara, manteniendo constante su valor absoluto. Junto con el vector \mathbf{H}_t experimenta un salto la componente tangencial de la velocidad (según (53.9)), si bien la componente normal de la velocidad $v_n = jV$ es continua e igual a

$$v_n = H_n \sqrt{(V/4\pi)} = H_n / \sqrt{(4\pi\rho)}. \quad (53.11)$$

Llamaremos a las discontinuidades de este tipo *discontinuidades de rotación* (o *rotacionales*).

Conviene hacer notar que eligiendo convenientemente el sistema de coordenadas es siempre posible conseguir que en ambas caras de una superficie de discontinuidad rotacional la velocidad del gas sea paralela al campo. Para ello basta pasar a un nuevo sistema de coordenadas (véase la nota en la pág. 266) que se mueva respecto al de partida con velocidad igual a

$$\mathbf{v}_{1t} - \mathbf{H}_{1t} \sqrt{(V/4\pi)} = \mathbf{v}_{2t} - \mathbf{H}_{2t} \sqrt{(V/4\pi)}.$$

En este nuevo sistema de coordenadas, en ambas caras de las superficies de discontinuidad las razones de las tres componentes de \mathbf{v} a las correspondientes componentes de \mathbf{H} son las mismas e iguales a $\sqrt{V/4\pi}$, es decir,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1 \sqrt{(V/4\pi)}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2 \sqrt{(V/4\pi)}. \quad (53.12)$$

Así, pues, en este sistema de coordenadas la velocidad gira junto con el campo magnético, manteniéndose constante su módulo y el ángulo que forma con la normal.

La velocidad v_n , tomada con signo opuesto, es al mismo tiempo la velocidad de propagación de la discontinuidad respecto del líquido. Dicha velocidad coincide con la de fase (u_1) de uno de los tres tipos de ondas magnetohidrodinámicas (§ 52). El hecho de que esta coincidencia tenga lugar para cualquier discontinuidad de rotación, es hasta cierto punto casual, mas para pequeños saltos de las magnitudes sobre la correspondiente superficie de discontinuidad esta coincidencia es del todo necesaria. En efecto, una discontinuidad de este tipo representa una débil perturbación en la cual la velocidad \mathbf{v} y el campo magnético \mathbf{H} adquieren pequeños incrementos perpendiculares al plano que pasa por \mathbf{H} y por la normal a la superficie \mathbf{n} . Esta perturbación es precisamente del tipo al que corresponde la velocidad de fase u_1 . La velocidad física de propagación del frente de una pequeña perturbación es la proyección de la velocidad de grupo sobre la normal al mismo, es decir, sobre el vector de onda \mathbf{k} . Pero teniendo en cuenta el carácter lineal de la relación entre ω y \mathbf{k} resulta

$$\mathbf{k} \cdot \partial \omega / \partial \mathbf{k} = \omega,$$

y, en consecuencia, dicha proyección coincide con la velocidad de fase $\omega/k = u_1$.

Aunque las discontinuidades tangenciales y de rotación constituyen dos tipos diferentes de discontinuidad, existen, sin embargo, discontinuidades que poseen simultáneamente las propiedades características de uno y otro. Tales son las super-

ficies de discontinuidad sobre las que \mathbf{v} y \mathbf{H} son tangenciales y meramente giran sin que cambien sus valores absolutos.

Como es sabido, en la hidrodinámica ordinaria las discontinuidades tangenciales son siempre inestables respecto de perturbaciones infinitesimales, lo que conduce a su rápida transición al régimen turbulento. En cambio, un campo magnético ejerce una influencia estabilizadora sobre el movimiento de un líquido conductor, y las discontinuidades tangenciales pueden en él resultar estables. Esta circunstancia es consecuencia natural del hecho de que los desplazamientos del líquido en una perturbación, que son transversales (respecto del campo), conducen a un alargamiento de las líneas de fuerza magnéticas «adheridas» al mismo, y con ello a la aparición de fuerzas que tienden a restablecer el movimiento no perturbado. El estudio de tales discontinuidades en un líquido incompresible (llevado a cabo por *S. I. Syrovatskiĭ*, 1953) conduce a las dos desigualdades siguientes, que deben quedar satisfechas a la vez para que la discontinuidad sea estable:

$$\begin{aligned} H_1^2 + H_2^2 &> 2\pi\rho v^2, \\ (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2)^2 &\geq 2\pi\rho\{(\mathbf{H}_1 \times \mathbf{v})^2 + (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{v})^2\}, \end{aligned} \quad (53.13)$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ es el salto de la velocidad sobre la superficie de discontinuidad (véase probl. 1 de este párrafo)*.

De hecho, sin embargo, gracias a la existencia en el líquido de viscosidades pequeñas, pero en todo caso no nulas, y de la resistencia eléctrica, la discontinuidad tangencial no se conservará durante un tiempo infinitamente largo, incluso si las condiciones (53.13) se cumplen. Aunque no se produce entonces turbulencia, en vez de un salto brusco se presenta, en cambio, una región de transición que se ensancha gradualmente y en la cual la velocidad y el campo magnético pasan con suavidad de un valor al otro.

Es fácil comprobar esto partiendo de las ecuaciones del movimiento (51.12) y (51.13) incluidos los términos disipativos. Elijamos como eje x la normal a la superficie de discontinuidad. Suponiendo que todas las magnitudes dependen solamente de la coordenada x (y, posiblemente, del tiempo), escribiremos las componentes transversales de estas ecuaciones en la forma:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{H}_t / \partial t &= (c^2 / 4\pi\sigma) \partial^2 \mathbf{H}_t / \partial x^2, \\ \partial \mathbf{v}_t / \partial t &= \nu \partial^2 \mathbf{v}_t / \partial x^2, \end{aligned} \quad (53.14)$$

(el líquido se supone incompresible). Admitiendo que el movimiento es estacionario, los primeros miembros de estas ecuaciones deben substituirse por cero. Pero entonces la única solución que se conserva finita para $x \rightarrow \pm \infty$ es, simplemente, $\mathbf{H}_t = \text{const}$, $\mathbf{v}_t = \text{const}$, lo que contradice la hipótesis de que los valores de estas cantidades experimentan un cambio. Así pues, una discontinuidad tangencial no puede tener una

* Si las densidades de los medios incompresibles a uno y otro lado de la discontinuidad son diferentes, en estas desigualdades hay que substituir ρ por $2\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$.

anchura estacionaria (como tiene, por ejemplo, una onda de choque débil). Las ecuaciones (53.14) tienen la forma de la ecuación de la transmisión del calor. Como es sabido por la teoría de ésta, la discontinuidad de una magnitud descrita por dicha ecuación se difunde en el curso del tiempo ocupando una región de transición cuya anchura crece proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo. Teniendo en cuenta que los coeficientes en las dos ecuaciones (53.14) son diferentes, las anchuras δ_v y δ_H de las regiones de transición de la velocidad y del campo serán distintas:

$$\delta_v \sim \sqrt{(\nu t)}, \quad \delta_H = \sqrt{(c^2 t / \sigma)}. \quad (53.15)$$

En lo que concierne a las discontinuidades de rotación, éstas resultan ser estables (en un líquido incompresible) respecto de las perturbaciones infinitesimales y cualesquiera que sean los valores del campo magnético (*S. I. Syrovatskiĭ*, 1953). Sin embargo, al igual que las discontinuidades tangenciales, no pueden tener una anchura estacionaria y se ensanchan con el tiempo bajo la influencia de la viscosidad y de la resistencia eléctrica del medio (véase problema 2).

PROBLEMAS

1. Obtener las condiciones de estabilidad de una discontinuidad tangencial en un líquido conductor perfecto incompresible que se encuentra en un campo magnético (*S. I. Syrovatskiĭ*).

*Solución**. Hagamos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad p = p_0 + p', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}',$$

donde $\mathbf{v}_0, p_0, \mathbf{H}_0$ son los valores constantes de las diferentes magnitudes (sobre cada una de las dos caras de la superficie de discontinuidad) y $\mathbf{v}', p', \mathbf{H}'$ sus pequeñas perturbaciones. Substituyendo en las ecuaciones (51.11)-(51.13), se obtendrá en el caso de un líquido perfecto

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad (1)$$

$$\partial \mathbf{u}' / \partial t = (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}' - (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}' \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}' &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p' - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}' \\ &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} (p' + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}'. \end{aligned} \quad (3)$$

Para abreviar prescindimos aquí y en lo que sigue del subíndice 0 e introducimos la notación $\mathbf{u} \equiv \mathbf{H} / \sqrt{4\pi\rho}$. Aplicando a la ecuación (3) el operador div y teniendo en cuenta (1), se obtendrá

$$\Delta(p' + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') = 0. \quad (4)$$

Supongamos que el plano de discontinuidad es el $x = 0$; los vectores \mathbf{v} y \mathbf{u} son paralelos al mismo. Busquemos para las magnitudes $\mathbf{v}', \mathbf{u}', p'$ en cada uno de los semiespacios $x > 0$ y $x < 0$ expresiones proporcionales a $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{\kappa x}$, donde \mathbf{k} es un vector bidimensional en el plano y, z . De la ecuación (4) se deduce que $k^2 - \kappa^2 = 0$, con lo cual hay que hacer $\kappa = +k$ en el semiespacio $x < 0$, y $\kappa = -k$ en el semiespacio $x > 0$. Eliminemos ahora v'_x entre las componentes x de las ecuaciones (2) y (3), con lo que se obtendrá**

$$p' + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = -u'_x \frac{i\rho}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \kappa} \{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2\}. \quad (5)$$

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 30.

** El caso en que la expresión entre corchetes se anula no nos interesa, ya que entonces ω es real, mientras que la inestabilidad puede estar únicamente ligada con valores complejos de ω .

Sea $\zeta = \zeta(y, z, t)$ el desplazamiento de la superficie de discontinuidad a lo largo del eje x en la perturbación. Sobre la superficie desplazada deben cumplirse las condiciones (53.5) y (53.6):

$$\left. \begin{aligned} [p + \rho(\mathbf{u} + \mathbf{u}')^2] &\cong [p' + \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'] = 0, \\ u_{n1} + u'_{n1} &\cong u'_{x1} - \mathbf{u}_1 \cdot \text{grad } \zeta = 0, \\ u_{n2} + u'_{n2} &\cong u'_{x2} - \mathbf{u}_2 \cdot \text{grad } \zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(la condición de que no exista flujo de líquido a través de la superficie de discontinuidad se cumple con esto automáticamente).

Haciendo $\zeta = \text{const} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ y eliminando ζ , u_{x1} , u_{x2} entre las tres ecuaciones (6), se obtiene la ecuación que determina los valores posibles de ω :

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)^2 + (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_2)^2.$$

Esta ecuación cuadrática carece de raíces complejas si

$$2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_2)^2 - \{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\}^2 > 0,$$

o bien

$$\{2u_{11}u_{1k} + 2u_{21}u_{2k} - (v_{21} - v_{11})(v_{2k} - v_{1k})\}k_k k_k > 0.$$

A su vez, esta forma cuadrática es definida positiva si son positivos la traza y el determinante del tensor de segundo orden que aparece entre corchetes; de aquí resultan precisamente las condiciones (53.13) indicadas en el texto.

2. Determinar cómo se expande con el tiempo una discontinuidad de rotación.

Solución. Suponiendo que todas las magnitudes dependen solamente de la coordenada x (y del tiempo), a partir de las ecuaciones $\text{div } \mathbf{v} = 0$ y $\text{div } \mathbf{H} = 0$ se encuentra que $v_x = \text{const}$, $H_x = \text{const}$. Elijamos el sistema de coordenadas de tal manera que los valores de \mathbf{v} y \mathbf{H} a ambos lados de la discontinuidad (es decir, lejos de la capa de transición), estén ligados por las relaciones (53.12); entonces $v_x = u_x$ (con la misma notación \mathbf{u} que en el problema 1). Para los componentes transversales \mathbf{u}_t y \mathbf{v}_t tenemos las ecuaciones, deducidas de (51.12) y (51.13),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} &= u_x \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x} &= u_x \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dado que para $x = \pm\infty$ la diferencia $\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t$ se anula en virtud de las relaciones (53.12), dicha diferencia es pequeña dentro de la capa de transición comparada con la suma $\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t$. Sumando las ecuaciones (1) podemos, por ello, prescindir del término $\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t$, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + \nu \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t).$$

De aquí resulta que la anchura de la discontinuidad varía de acuerdo con la ley

$$\delta \sim \sqrt{\left\{ \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + \nu \right) t \right\}}.$$

§ 54. Ondas de choque

Pasemos al siguiente tipo de discontinuidades, en el cual

$$j \neq 0, \quad [V] \neq 0. \quad (54.1)$$

Estas discontinuidades, al igual que en la hidrodinámica ordinaria, se llaman *ondas de choque*. Se caracterizan por la existencia de un salto de la densidad y por el hecho de que el gas las atraviesa (v_{n1} y v_{n2} diferentes de cero). En lo que concierne a la componente normal del campo magnético, ésta, en general, es diferente de cero, pero en algún caso particular puede también ser $H_n = 0$.

Comparando las ecuaciones (53.3) y (53.4), vemos que, cuando $H_n \neq 0$, los vectores $\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1}$ y $V_2 \mathbf{H}_{t2} - V_1 \mathbf{H}_{t1}$ son paralelos a un mismo vector, el $\mathbf{v}_{2t} - \mathbf{v}_{1t}$, y, por consiguiente, paralelos entre sí. A su vez, de aquí se sigue que también son paralelos \mathbf{H}_{t1} y \mathbf{H}_{t2} , es decir, los vectores \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 y la normal a la superficie se encuentran en un plano, en contraste con el caso de las discontinuidades tangencial y de rotación, en las que, en general, los planos \mathbf{H}_1, \mathbf{n} y \mathbf{H}_2, \mathbf{n} no coinciden. Este resultado vale también en el caso en que $H_n = 0$, cuando de (53.4) se sigue que $V_1 \mathbf{H}_{t1} = V_2 \mathbf{H}_{t2}$ (este caso se considerará más adelante con mayor detenimiento).

En cuanto a la velocidad, el salto $\mathbf{v}_{t1} - \mathbf{v}_{t2}$ se encuentra en el mismo plano que $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$. Sin limitar la generalidad cabe suponer, evidentemente, que también los propios vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 se encuentran en aquel mismo plano, de modo que el movimiento en la onda de choque resulta ser, por su propia naturaleza, un movimiento plano. Además, es fácil ver que, mediante una adecuada transformación del sistema de coordenadas, es siempre posible conseguir (cuando $H_n \neq 0$) que a ambos lados de la discontinuidad los vectores \mathbf{v} y \mathbf{H} sean paralelos entre sí. Para ello hay que pasar a un nuevo sistema de coordenadas que se mueva respecto del inicial con una velocidad

$$\mathbf{v}_t - (v_n/H_n)\mathbf{H}_t = \mathbf{v}_t - (jV/H_n)\mathbf{H}_t$$

(los valores de esta magnitud a uno y otro lado de la discontinuidad son iguales en virtud de la condición de contorno (53.4)). En las fórmulas que siguen a continuación, sin embargo, no supondremos esta especial elección del sistema de coordenadas.

Deduzcamos la relación que para las ondas de choque en magnetohidrodinámica representa el papel de las adiabáticas de Hugoniot de la hidrodinámica ordinaria. Eliminando $[\mathbf{v}_t]$ entre las dos ecuaciones (53.3) y (53.4), obtendremos la relación

$$j^2[VH_t] = H_n^2[H_t]/4\pi; \quad (54.2)$$

hemos escrito aquí H_t en vez de \mathbf{H}_t teniendo ya en cuenta que \mathbf{H}_{t1} y \mathbf{H}_{t2} son paralelos. Para eliminar $[\mathbf{v}_t]$ de la ecuación (53.1), escribiremos ésta en la siguiente forma:

$$[w] + \frac{1}{2}j^2[V^2] + \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{v}_t - \frac{H_n}{4\pi j}\mathbf{H}_t\right)^2\right] + \\ + [VH_t^2]/4\pi - H_n^2[H_t^2]/32\pi^2j^2 = 0.$$

El tercer término se anula en virtud de la ecuación (53.3) y, de esta manera, desaparece \mathbf{v}_t . En el último término substituiremos el valor de j^2 dado por (54.2), y en el primero, el que resulta de (53.2), es decir,

$$j^2 = \{p_2 - p_1 + (H_{t2}^2 - H_{t1}^2)/8\pi\}/(V_1 - V_2). \quad (54.3)$$

Después de simples cálculos obtendremos entonces en definitiva

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) + (V_2 - V_1)(H_{t2} - H_{t1})^2/16\pi = 0. \quad (54.4)$$

Esta es precisamente la *ecuación de la adiabática de choque* en magnetohidrodinámica. Difiere de la ecuación ordinaria en el tercer término.

Escribamos también aquí una vez más la ecuación (53.3)

$$v_{t2} - v_{t1} = H_n(H_{t2} - H_{t1})/4\pi j. \quad (54.5)$$

que determina el salto de v_t en función del que experimenta H_t . Las ecuaciones (54.2) a (54.5) constituyen un sistema completo de ecuaciones que describen las ondas de choque. Cuando tienden a cero los saltos de todas las magnitudes, la velocidad de propagación de la onda de choque debe tender a la velocidad de propagación de las pequeñas perturbaciones. En la hidrodinámica ordinaria esto significa que la velocidad de las ondas de choque débiles tiende a la velocidad del sonido. En cambio, en la magnetohidrodinámica se tienen dos velocidades diferentes (u_2 y u_3), con las que pueden propagarse las ondas de choque de débil intensidad*.

Consideremos más detenidamente las ondas de choque débiles y veamos en qué sentido cambian en ellas las diferentes magnitudes. Desarrollando la ecuación (54.4) en potencias de los saltos de la presión y de la entropía, obtendremos**

$$T(s_2 - s_1) = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 - \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1)(H_{t2} - H_{t1})^2. \quad (54.6)$$

Cuando el gas atraviesa la onda de choque, su entropía sólo puede aumentar: $s_2 > s_1$. Pero $\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s < 0$, de acuerdo con una de las desigualdades termodinámicas, mientras que la derivada $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s$ es de hecho positiva para todos los medios de que aquí se trata. Por ello, (54.6) nos dice que de la condición $s_2 > s_1$ se siguen las desigualdades $p_2 > p_1$ y por lo tanto $V_2 < V_1$. Así pues, como en la hidrodinámica ordinaria, una onda de choque es una onda de compresión. Este resultado, que hemos demostrado aquí para las ondas de choque débiles, es también válido, al parecer, para las ondas de choque de cualquier intensidad.

Para las ondas de choque débiles es posible formular también determinadas proposiciones acerca de la dirección en que cambia el campo magnético. Las variacio-

* Con la velocidad u_1 , en cambio, se propagan las perturbaciones que, por su carácter, corresponden a discontinuidades de rotación, conforme se indicó ya en el párrafo que precede.

** Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 83.

nes de las diferentes magnitudes en una pequeña perturbación del estado del gas están ligadas entre sí por las fórmulas (52.8) y (52.9). Para las variaciones $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\delta(H_t^2) = H_{t2}^2 - H_{t1}^2$ se encuentra

$$\delta(H_t^2) = 8\pi(u^2 - u_0^2)\delta\rho.$$

Dado que $u_2 > u_0$, $u_3 < u_0$ (véase (52.15)) y que, según lo dicho antes, siempre es $\delta\rho > 0$, vemos que en los dos tipos diferentes de ondas de choque los sentidos de la variación de H_t^2 (y, por lo tanto, también de $H^2 = H_t^2 + H_n^2$) son diferentes. En una onda de choque que se propaga con velocidad $\sim u_2$, el campo magnético aumenta su intensidad, mientras que en una onda cuya velocidad es $\sim u_3$, la intensidad disminuye.

Consideremos ahora las ondas de choque en campos magnéticos débiles, es decir, admitamos que a uno y otro lado de la superficie de discontinuidad se tiene $H^2 \ll \rho u^2$. Por lo demás, ninguna otra limitación se impone a los saltos de las diferentes magnitudes; en particular, la discontinuidad del campo magnético puede ser comparable con su propio valor.

También aquí tenemos dos posibilidades. Suponiendo que los saltos de la densidad y de la presión no son pequeños, podemos prescindir, en primera aproximación, del último término en la ecuación (54.4), como también del campo magnético en la fórmula (54.3). Con esto volvemos a las fórmulas de la hidrodinámica ordinaria. Así pues, las relaciones entre los saltos de las diferentes magnitudes termodinámicas y la velocidad de propagación de la onda serán las mismas que en las ondas de choque ordinarias. En lo que concierne a la variación del campo magnético, su valor puede obtenerse a partir de la relación (54.2). Dado que el segundo miembro de la igualdad es una cantidad pequeña de tercer orden (respecto del campo), al mismo orden debe reducirse también el primer miembro. En primera aproximación puede hacerse $[VH_t] = V_2 H_{t2} - V_1 H_{t1} \cong 0$, de donde

$$H_{t2}/H_{t1} = V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1.$$

Dado que en una onda de choque ordinaria siempre es $V_1 > V_2$, vemos que en una onda del tipo considerado se produce un aumento de la intensidad del campo magnético.

Las ecuaciones (54.2) a (54.4) permiten también otra posibilidad. La hipótesis de que el campo es pequeño es compatible con la ecuación (54.2) también en una onda en la cual $V_1 \cong V_2$, mientras que j^2 es una pequeña magnitud de segundo orden igual a

$$j^2 = H_n^2/4\pi V, \quad (54.7)$$

donde V es el valor común a V_1 y V_2 . Ahora bien, de la ecuación (54.3) se sigue que, haciendo $V_1 = V_2$, con la misma aproximación debemos hacer

$$p_2 - p_1 = -(H_{t2}^2 - H_{t1}^2)/8\pi. \quad (54.8)$$

Que la densidad no cambie significa que es posible considerar una onda de choque de este tipo como una discontinuidad en un líquido incompresible. El vector \mathbf{H}_t

(y con el también v_l) experimenta sobre ella un salto en su valor absoluto, conservando invariable la dirección, mientras que el salto de la presión (para una densidad constante) viene determinado por la discontinuidad del campo magnético de acuerdo con la fórmula (54.8). La velocidad de propagación de esta discontinuidad es

$$v_{n2} = v_{n1} = jV = H_n \sqrt{(V/4\pi)}.$$

Este resultado es del todo natural, y la necesidad de que existan tales discontinuidades se podía haber previsto. En el § 52 vimos que en un líquido incompresible la velocidad de propagación de las pequeñas perturbaciones del campo magnético es única, e igual a $H/\sqrt{4\pi\rho}$. En consecuencia, con la velocidad $u_1 = H_n/\sqrt{4\pi\rho}$ se desplazan las superficies del frente de las pequeñas perturbaciones, tanto aquellas en las que la variación del campo es perpendicular al plano determinado por \mathbf{H} y \mathbf{n} , como aquellas en las cuales $\delta\mathbf{H}$ se encuentra en dicho plano. A las primeras corresponden discontinuidades de rotación de pequeña intensidad (de las que ya se habló en el párrafo que precede), mientras que a las segundas corresponden (para valores pequeños de los saltos) las discontinuidades que acabamos de estudiar.

Para ver en qué sentido varía el valor absoluto del campo magnético en estas discontinuidades, acudamos a la ecuación (54.4), que no hemos utilizado todavía, escribiéndola en la forma (54.6) (al deducir ésta no se supuso que el salto del campo magnético fuera pequeño comparado con su propio valor). Substituyendo la diferencia $p_2 - p_1$ dada por (54.8), encontramos que el segundo término del segundo miembro de (54.6) es una pequeña cantidad de cuarto orden respecto del campo, mientras que el primero es de sexto orden y, por lo tanto, puede suprimirse. De la condición $s_2 > s_1$ se sigue inmediatamente que

$$H_{t2} < H_{t1},$$

es decir, el módulo del campo magnético disminuye en esta discontinuidad.

Volviendo de nuevo a las ondas de choque de intensidad arbitraria en campos magnéticos con módulos cualesquiera, consideremos dos casos particulares. Supongamos que sobre la cara 1 el campo magnético es perpendicular al frente de la onda de choque, es decir, que $H_{t1} = 0$. Entonces la ecuación (54.2) toma la forma

$$j^2 V_2 H_{t2} = H_n^2 H_{t2} / 4\pi.$$

Vemos por ello que, o bien $H_{t2} = 0$, o bien H_{t2} tiene un valor arbitrario, mientras que

$$j^2 = H_n^2 / 4\pi V_2.$$

En el primer caso el campo magnético se conserva perpendicular a la superficie de discontinuidad y no influye en absoluto en las propiedades de la onda de choque, desapareciendo por completo de todas las ecuaciones. En el segundo caso, por el contrario, tenemos una onda de choque con variación de la dirección del campo, onda que se propaga respecto del gas que queda tras ella con la velocidad

$$v_{n2} = jV_2 = H_n / \sqrt{(4\pi\rho_2)}.$$

Otro caso particular es el de una onda de choque paralela a la dirección del campo a ambos lados de la discontinuidad ($H_n = 0$)*. En virtud de (54.5) tenemos entonces $v_{t2} = v_{t1}$, es decir, la componente tangencial de la velocidad se conserva continua. Mediante una adecuada elección del sistema de coordenadas es siempre posible, por consiguiente, que a uno y otro lado de la discontinuidad sea $v_t = 0$, es decir, que el gas se mueva perpendicularmente a la superficie de discontinuidad; supondremos que así se ha procedido. Por otra parte, de la ecuación (54.2) se sigue

$$V_2 H_2 = V_1 H_1.$$

Teniendo presente esta relación, es fácil ver que las ecuaciones (54.3) y (54.4) se pueden escribir en la forma

$$j^2 = (p_2^* - p_1^*) / (V_1 - V_2), \quad \epsilon_2^* - \epsilon_1^* + \frac{1}{2}(p_2^* + p_1^*)(V_2 - V_1) = 0,$$

que difiere de las ecuaciones ordinarias para las ondas de choque cuando no existe campo tan sólo en un cambio de la ecuación de estado: en vez de la ecuación verdadera $p = p(V, s)$ hay que utilizar la ecuación $p^* = p^*(V, s)$, en la cual

$$p^* = p + b^2 / 8\pi V^2,$$

y la letra b designa el producto constante HV . Análogamente, ϵ^* debe determinarse de forma que se cumpla la relación termodinámica $\left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial V}\right)_s = -p^*$, de donde

$$\epsilon^* = \epsilon + b^2 / 8\pi V.$$

En el párrafo precedente se señaló que existen discontinuidades que poseen, a la vez, propiedades de las discontinuidades tangenciales y de las de rotación. Estas discontinuidades se encuentran también en relación análoga con las ondas de choque. Una discontinuidad en la que no varía la densidad, y el cambio en el campo magnético queda limitado al del signo de H_t , constituye la transición entre las ondas de choque y las discontinuidades de rotación. Por otra parte, las discontinuidades en las que $v_n = 0$ y $H_n = 0$, mientras que H_t experimenta un salto arbitrario en su valor absoluto, sin que cambie su dirección, representan la transición entre las ondas de choque y las discontinuidades tangenciales.

Para terminar el análisis efectuado en los dos últimos párrafos acerca de las discontinuidades magnetohidrodinámicas, resumiremos como sigue los tipos de discontinuidad esencialmente diferentes:

1. Discontinuidades de contacto:

$$j = 0, \quad [v_t] = 0, \quad [V] \neq 0, \quad [p] = 0, \quad H_n \neq 0, \quad [H_t] = 0.$$

* Cuando $H_n = 0$ se tiene solamente un tipo de ondas de choque, de acuerdo con el hecho de que se anula la velocidad u_3 . A las perturbaciones correspondientes a u_3 van asociadas pequeñas discontinuidades tangenciales en reposo respecto del propio líquido.

2. *Discontinuidades tangenciales:*

$$j = 0, \quad [\mathbf{v}_t] \neq 0, \quad [V] \neq 0, \quad \left[p + \frac{H_t^2}{8\pi} \right] = 0, \quad H_n = 0, \quad [\mathbf{H}_t] \neq 0.$$

3. *Discontinuidades de rotación:*

$$j \neq 0, \quad [\mathbf{v}_t] \neq 0, \quad [V] = 0, \quad [p] = 0, \quad H_n \neq 0,$$

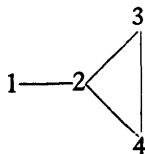
el vector \mathbf{H}_t gira sin que varíe su valor absoluto.

4. *Ondas de choque:*

$$j \neq 0, \quad [V] \neq 0;$$

los vectores \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{n} son coplanarios.

Entre estos cuatro tipos son posibles transiciones que se ajustan al siguiente esquema:



§ 55. Campo magnético espontáneo en el movimiento turbulento de un líquido conductor

El movimiento turbulento de un líquido conductor posee una notable propiedad: puede conducir a la aparición espontánea de campos magnéticos relativamente intensos. En un líquido conductor existen siempre pequeñas perturbaciones provocadas por factores extraños al propio movimiento del líquido* y que van acompañadas de la aparición de campos magnéticos y eléctricos muy débiles. La cuestión que se plantea es la de cuál será el comportamiento ulterior de estas perturbaciones, si se reforzarán en promedio con el tiempo como resultado del movimiento turbulento, o si se debilitarán. Los razonamientos que se exponen a continuación prueban que, según sean las propiedades del líquido, pueden cobrar realidad ambas posibilidades**.

La marcha de la variación de las perturbaciones del campo magnético con el tiempo, una vez se han producido, viene determinada por el juego de dos factores físicos. De una parte, en el sentido de disminuir el campo actúa la disipación de la

* Por ejemplo, un efecto magnetomecánico en porciones del líquido en rotación o incluso fluctuaciones térmicas.

** Los resultados que se exponen en este párrafo se deben a G. K. Batchelor (1950).

energía magnética que se libera en forma de calor de Joule por las corrientes de inducción. Por otra parte, el campo magnético tiende a aumentar gracias a un efecto específicamente magnetohidrodinámico de «alargamiento» de las líneas de fuerza. Al final del § 51 se puso de manifiesto que en el movimiento de un líquido (de conductibilidad suficientemente grande) también las líneas de fuerza magnéticas se desplazan como si fueran «líneas de fluido», variando con ello la intensidad del campo magnético proporcionalmente a la extensión relativa de la línea de fuerza en cada uno de sus puntos. Pero en el movimiento turbulento, dos partículas cualesquiera del líquido próximas entre sí tienden, en promedio, a separarse en el curso del tiempo. Como resultado de esto las líneas de fuerza se alargan y el campo magnético aumenta de intensidad.

Veamos cómo en ciertas condiciones pueden compensarse estas dos tendencias opuestas. Esto nos proporcionará, al mismo tiempo, un cierto criterio que determina en qué casos crecerán las perturbaciones del campo magnético, y en cuáles se amortiguarán.

En tanto el campo magnético que aparece cuando se mueve el líquido es suficientemente pequeño, cabe prescindir de su reacción sobre el propio movimiento. En otras palabras, se trata entonces de una turbulencia puramente hidrodinámica que crea el «fondo» sobre el cual se desarrollan las perturbaciones magnéticas. El campo turbulento de velocidades lo consideraremos estacionario en el sentido habitual de la teoría de turbulencias, es decir, en el sentido de que son constantes sus características medias*.

Matemáticamente, prescindir de los términos indicados significa que en la ecuación del movimiento (51.13) se suprimen los términos de segundo grado respecto del campo, es decir, volvemos a la ecuación ordinaria de Navier-Stokes:

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = - \text{grad} (p/\rho) + \nu \Delta \mathbf{v}$$

(suponemos que el líquido es incompresible). Si se transforma el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ de acuerdo con la igualdad

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}$$

y se aplica luego a ambos miembros de la ecuación el operador rotacional, obtenemos

$$\partial \boldsymbol{\Omega} / \partial t = \text{rot} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}, \quad (55.1)$$

donde se ha introducido para abreviar la notación $\boldsymbol{\Omega} = (\frac{1}{2}) \text{rot} \mathbf{v}$.

Comparemos esta ecuación con la ecuación (51.2):

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + (c^2/4\pi\sigma) \Delta \mathbf{H}, \quad (55.2)$$

* Consideramos aquí promedios relativos a intervalos de tiempo que son del orden de magnitud de los periodos de las correspondientes fluctuaciones turbulentas, pero que son, naturalmente, pequeños comparados con el tiempo total durante el que se observa el sistema.

que determina (para una distribución de velocidades dada) la variación del campo magnético con el tiempo. Vemos que Ω y \mathbf{H} satisfacen ecuaciones del mismo tipo y que si $\nu = c^2/4\pi\sigma$ estas ecuaciones coinciden idénticamente. En este último caso, por consiguiente, existe una solución de la ecuación (55.2) en la que

$$\mathbf{H} = \text{constante} \times \Omega. \quad (55.3)$$

Así pues, si

$$\nu = c^2/4\pi\sigma, \quad (55.4)$$

puede existir un campo magnético estacionario (en el mismo sentido de la palabra que antes). Este campo ni disminuye ni crece en promedio, cualquiera que sea el valor del coeficiente constante en (55.3). Cabe decir que se produce un equilibrio indiferente en el cual los dos factores antes indicados, y que influyen sobre la variación del campo magnético, se compensan entre sí.

A su vez, de aquí resulta evidente que si la conductibilidad del líquido es mayor que $c^2/4\pi\nu$, las pérdidas por disipación de energía electromagnética no bastarán para compensar el efecto de crecimiento del campo magnético debido al alargamiento de las líneas de fuerza. En consecuencia, llegamos a la desigualdad

$$4\pi\nu\sigma/c^2 > 1 \quad (55.5)$$

como condición para la formación espontánea de campos magnéticos resultado del crecimiento de pequeñas perturbaciones magnéticas*.

Cabe decir que ésta es la condición de inestabilidad del movimiento turbulento respecto de las perturbaciones magnéticas infinitesimales. Es notable que resulte posible establecer esta condición, no en orden de magnitud, sino con un coeficiente numérico preciso**.

Como criterio de crecimiento del campo, la condición (55.5) es válida en tanto lo sea la posibilidad de prescindir de la reacción del campo magnético sobre el movimiento del líquido, posibilidad que se encuentra en la base de su deducción. El crecimiento del campo seguirá hasta que se establezca un determinado estado estacionario en el que sea ya imposible prescindir de la influencia opuesta del campo. Aunque, rigurosamente hablando, las propiedades puramente hidrodinámicas de la turbulencia ya no coinciden en este estado con las fijadas *a priori*, el carácter cualitativo de la distribución y el orden de magnitud del campo magnético resultante pueden determinarse como si dichas propiedades subsistieran.

* La condición (55.5) es sumamente restrictiva. Así, para el mercurio ($\sigma \cong 10^{16} \text{ s}^{-1}$, $\nu = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$) la cantidad que aparece en el primer miembro de (55.5) es solamente del orden de $1,5 \times 10^{-7}$. Dado que σ y ν crecen al aumentar el libre camino medio de los portadores de carga y de masa, respectivamente, la condición (55.5) puede quedar satisfecha para objetos tales como la cromoesfera y la corona del Sol y en el gas ionizado interestelar.

** Hay que mencionar que los argumentos que preceden, por más convincentes que resulten, no constituyen, sin embargo, una completa demostración. Así, Ia. B. Zel'dovich demostró que resulta sin duda alguna inaplicable en un caso hipotético de turbulencia «bidimensional» (ZhETH 31, 154, 1956).

Es fácil ver que la distribución del campo magnético debe ser análoga a la distribución turbulenta de Ω . En efecto, desde un punto de vista intuitivo, Ω es la velocidad angular de rotación del líquido en un punto dado del espacio. Pero puesto que las líneas de fuerza magnéticas se mueven junto con el líquido, con esta misma velocidad girará el vector H . Por consiguiente, si en dos puntos cualesquiera del flujo turbulento los valores instantáneos de Ω no están, en promedio, correlacionados entre sí, también los vectores H en esos dos puntos figurarán de manera no correlacionada y su orientación relativa variará con el tiempo de manera totalmente caótica.

Recordemos en relación con esto algunas propiedades hidrodinámicas de la turbulencia*. El movimiento turbulento se puede considerar como un conjunto de «pulsaciones turbulentas», o remolinos, de diferentes tamaños, desde el mayor valor l («escala exterior») hasta el menor valor λ_0 («escala interior»). El primero coincide con las longitudes características que determinan las dimensiones del dominio en que tiene lugar el movimiento turbulento. En cuanto al segundo, determina el orden de magnitud de las distancias a las que se manifiestan ya de manera apreciable la viscosidad y la disipación de energía ligada con ella. λ_0 se puede expresar en función de l y del número de Reynolds $R \sim \frac{ul}{\nu}$ del movimiento turbulento en conjunto (u es del orden de magnitud de la variación de la velocidad media para distancias l), o bien en función de la energía ϵ disipada por segundo y gramo de líquido de acuerdo con la fórmula siguiente:

$$\lambda_0 \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \sim l/R^{1/4}. \quad (55.6)$$

La correlación de velocidades v_1 y v_2 en dos puntos 1 y 2 a una distancia λ uno de otro viene determinada fundamentalmente por pulsaciones de tamaño λ . Según la ley de Kolmogorov-Obujov, para distancias $\lambda \gg \lambda_0$ se tiene

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_k} \sim \lambda^{2/3},$$

donde $\Delta v = v_2 - v_1$. En cambio, para distancias $\lambda \ll \lambda_0$, resulta

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_k} \sim \lambda^2.$$

Es fácil deducir de aquí la correlación entre las velocidades angulares. Dado que las componentes Ω_1 y Ω_2 se expresan, respectivamente, en función de las derivadas de v_1 y de v_2 , derivando $\overline{\Delta v_i \Delta v_k}$ una vez respecto de las coordenadas del punto 1 y otra respecto de las del punto 2, se encuentra

$$\begin{aligned} \overline{\Omega_{1i} \Omega_{2k}} &\sim \lambda^{-4/3} && \text{para } \lambda \gg \lambda_0, \\ \overline{\Omega_{1i} \Omega_{2k}} &\sim \text{constante} && \text{para } \lambda \ll \lambda_0. \end{aligned} \quad (55.7)$$

Estas fórmulas prueban que la correlación angular de las velocidades es importante

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica* §§ 31-33.

sólo hasta distancias del orden de λ_0 , mientras que disminuye rápidamente a distancias mayores.

De acuerdo con lo dicho más arriba este mismo carácter tiene la distribución del campo magnético que se establece espontáneamente. Sólo se tiene una distribución correlacionada en regiones del espacio cuyos tamaños son $\sim \lambda_0$. A distancias mayores, en cambio, la orientación mutua de los vectores \mathbf{H} es prácticamente al azar.

Es fácil ahora determinar el orden de magnitud del campo magnético estimando los términos en la ecuación del movimiento completa

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = - \text{grad} (p/\rho) + \nu \Delta \mathbf{v} - (1/4\pi\rho) \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}.$$

Dado que el vector \mathbf{H} cambia totalmente su dirección a distancias $\sim \lambda_0$, el orden de magnitud del último término del segundo miembro de la ecuación es

$$H^2/4\pi\rho\lambda_0.$$

Por otra parte, estimemos el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Para pulsaciones de tamaño λ , su orden de magnitud será v_λ^2/λ , donde v_λ es la variación de la velocidad a la distancia λ . Pero según fórmulas conocidas de la teoría de la turbulencia se tiene

$$\begin{aligned} v_\lambda &\sim u(\lambda/l)^{1/3} \quad \text{para } \lambda \gg \lambda_0, \\ v_\lambda &\sim u(\lambda/l)\sqrt{R} \quad \text{para } \lambda \ll \lambda_0. \end{aligned} \quad (55.8)$$

Por ello, la razón $\frac{v_\lambda^2}{\lambda} \sim \lambda^{-1/3}$ para $\lambda \gg \lambda_0$ y $\frac{v_\lambda^2}{\lambda} \sim \lambda$ para $\lambda \ll \lambda_0$, siendo máxima, en consecuencia, cuando $\lambda \sim \lambda_0$. Así pues,

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \sim v_{\lambda_0}^2/\lambda_0.$$

Finalmente, considerando comparables las estimaciones de ambos términos, se encuentra que

$$H^2 \sim 4\pi\rho v_{\lambda_0}^2. \quad (55.9)$$

Según (55.6) y (55.8) $v_{\lambda_0} \sim uR^{-1/4} \sim (\nu\epsilon)^{1/4}$. Por lo tanto, podemos también escribir

$$H^2 \sim 4\pi\rho u^2/\sqrt{R} \sim 4\pi\rho\sqrt{(\nu\epsilon)}. \quad (55.10)$$

Estas mismas fórmulas determinan también el orden de magnitud del campo magnético espontáneo. Es útil comparar la energía de este campo con la energía cinética del movimiento turbulento del líquido. Como es sabido, esta última está concentrada fundamentalmente en las pulsaciones de mayor escala (tamaño $\sim l$) y su orden de magnitud es el de ρu^2 . En cambio, la energía magnética se concentra fundamentalmente en las «pulsaciones magnéticas» de pequeña escala ($\sim \lambda_0$). Según (55.9), esta energía es comparable con la energía cinética de las pulsaciones turbulentas de igual tamaño, pero, según (55.10), es pequeña comparada con la energía cinética total. Una formulación matemática más precisa de lo que acabamos de exponer permite afirmar que si se desarrollan las distribuciones

espaciales de la velocidad y del campo magnético en integrales de Fourier, la energía cinética se concentra fundamentalmente en las componentes espectrales con vectores de onda pequeños ($k \sim 1/l$) y la energía magnética, en las componentes con vectores de onda grandes ($k \sim 1/\lambda_0$).

En el movimiento turbulento tiene lugar, prácticamente sin disipación alguna, una continua transferencia de energía de las pulsaciones a gran escala a las pulsaciones a escala pequeña. Este «flujo de energía» se disipa solamente en las pulsaciones de tamaño λ_0 . Cuando no existe campo magnético, el mecanismo disipativo está vinculado por completo con la viscosidad del líquido conductor, la energía en las pulsaciones de escala λ_0 se disipa en parte debido a la viscosidad, pero en parte se transforma en energía del campo magnético y sólo luego se disipa pasando a calor por efecto Joule.

Estimemos ahora el tiempo necesario para que se establezca el estado estacionario, para lo cual partiremos de la ecuación (55.2). El orden de magnitud de los dos términos en su segundo miembro es, respectivamente,

$$Hv\lambda_0/\lambda_0 = Hv\lambda_0\lambda_0/\lambda_0^2 \sim Hv/\lambda_0^2 \quad \text{y} \quad c^2H/4\pi\sigma\lambda_0^2.$$

Dado que conocemos la condición exacta (55.4) en virtud de la cual tiene lugar el equilibrio indiferente, por ello conocemos también la relación exacta entre los coeficientes de estos dos términos y podemos escribir

$$\frac{\partial H}{\partial t} \sim \left(\nu - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right) \frac{H}{\lambda_0^2}.$$

Vemos así que las pequeñas perturbaciones crecerán con el tiempo según la ley exponencial:

$$\exp\left\{\left(\nu - \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right) \frac{t}{\lambda_0^2}\right\}. \quad (55.11)$$

Si $4\pi\sigma\nu/c^2 \gg 1$, tenemos simplemente $e^{\nu t/\lambda_0^2}$. El tiempo τ durante el cual una perturbación inicialmente pequeña $\sim H_0$ se desarrolla y transforma en el campo estacionario H (55.10) será entonces, en orden de magnitud, igual a

$$\tau \sim \frac{\lambda_0^2}{\nu} \ln \frac{H^2}{H_0^2} \sim \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\rho(\epsilon\nu)^{\frac{1}{2}}}{H_0^2}. \quad (55.12)$$

El carácter caótico de la variación del campo magnético con el tiempo en el movimiento turbulento significa que el valor medio (respecto del tiempo) de H se anula. En otras palabras, cabe decir que en el caso considerado (es decir, en aquellas condiciones que permiten la aparición espontánea del campo) la existencia de un campo cuyo valor medio no es nulo resulta incompatible con la turbulencia. Esta propiedad ha de conducir a que, cuando se aplica un campo magnético exterior, cuya intensidad no es demasiado elevada a un líquido que se mueve en régimen turbulento (en un volumen limitado), el líquido se comportará como superconduc-

tor. Sin embargo, un campo magnético suficientemente intenso ($H^2 \gtrsim \rho u^2$) no puede dejar de penetrar en el líquido y, en consecuencia, «suprimirá» la turbulencia.

CAPÍTULO IX

LAS ECUACIONES DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 56. Ecuaciones del campo en los dieléctricos cuando no existe dispersión

En el § 45 se escribieron las ecuaciones del campo electromagnético variable en los metales:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}/c, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial\mathbf{B}/\partial t, \quad (56.1)$$

que son válidas cuando el campo varía con suficiente «lentitud»: las frecuencias del campo deben ser tales que conserven su validez la dependencia de \mathbf{j} respecto de \mathbf{E} y la de \mathbf{B} respecto de \mathbf{H} (si esta última interviene) relativas al caso estacionario*.

Examinaremos ahora la cuestión análoga para un campo electromagnético variable en un medio dieléctrico y formularemos las ecuaciones que son válidas para aquellas frecuencias tales que la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} y entre \mathbf{B} y \mathbf{H} sigue siendo la misma que en los campos constantes. Si, como suele acontecer, esta relación se reduce a la mera proporcionalidad, la condición indicada significa que es posible hacer

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (56.2)$$

con los valores estáticos de ϵ y μ .

Estas relaciones dejan de cumplirse (o, como suele decirse, ϵ y μ presentan *dispersión*) para aquellas frecuencias que son comparables con las frecuencias propias de las oscilaciones moleculares o electrónicas que llevan a la aparición de la polarización eléctrica o magnética de la materia. El orden de magnitud de estas frecuencias depende del tipo de substancia y varía dentro de límites muy amplios. Puede también ser completamente distinto para fenómenos eléctricos y magnéticos**.

Las ecuaciones

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (56.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial\mathbf{B}/\partial t \quad (56.4)$$

* En lo que concierne a la condición $l \ll \lambda$, nada tiene que ver con la aplicabilidad de las ecuaciones (56.1) como tales. El papel de esta condición para las cuestiones examinadas en el Cap. VII se limitaba a que permitía prescindir de los efectos de retardo en el campo fuera del conductor.

** Así, en el diamante, la polarización eléctrica es de origen electrónico y la dispersión de ϵ comienza solamente en la región ultravioleta del espectro. En cambio, en un líquido polar, tal como el agua, la polarización está ligada con la orientación de las moléculas con momentos dipolares permanentes y la dispersión de ϵ se manifiesta para frecuencias $\omega \sim 10^{11}$ (es decir, en el intervalo de ondas centimétricas). Antes todavía puede iniciarse la dispersión de μ en las substancias ferromagnéticas.

se obtienen inmediatamente substituyendo \mathbf{e} y \mathbf{h} en las ecuaciones microscópicas exactas de Maxwell por sus valores medios \mathbf{E} y \mathbf{B} . Por consiguiente, cualesquiera que sean las condiciones, no es necesario modificarlas. En lo que concierne a la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (56.5)$$

ésta se obtiene (véase § 6) promediando la ecuación microscópica exacta $\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho$, valiéndonos a la vez únicamente del hecho de que la carga total del cuerpo es igual a cero. Es evidente que esta conclusión en modo alguno depende de la hipótesis hecha en el § 6 de que el campo sea estacionario, y, por consiguiente, la ecuación (56.5) conserva su forma también en los campos variables.

Una ecuación más todavía debe obtenerse promediando la ecuación exacta

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \quad (56.6)$$

El cálculo directo del valor promedio da

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}}. \quad (56.7)$$

Sin embargo, en el caso de un campo macroscópico que depende del tiempo, establecer la relación entre el valor medio $\overline{\rho \mathbf{v}}$ y las magnitudes antes introducidas es bastante complicado. Resulta más fácil llevar a cabo el cálculo del promedio no directamente, sino siguiendo el camino más formal que se indica a continuación.

Supongamos por el momento que en el dieléctrico se han introducido cargas extrañas a su naturaleza, con una densidad volumétrica ρ_{ex} . En su movimiento, estas cargas crean una corriente «extraña» \mathbf{j}_{ex} y la conservación de estas cargas se expresa por la ecuación de continuidad

$$\partial \rho_{\text{ex}} / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ex}} = 0.$$

En vez de la ecuación (56.5) tendremos

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ex}}$$

(véase (6.8)). Derivando esta igualdad respecto del tiempo y utilizando la ecuación de continuidad, obtendremos

$$\partial(\operatorname{div} \mathbf{D}) / \partial t = 4\pi \partial \rho_{\text{ex}} / \partial t = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ex}},$$

o bien

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}_{\text{ex}} \right) = 0.$$

De aquí se sigue que el vector al que se aplica el operador div , puede representarse en forma de rotacional de un cierto vector que designaremos por $c\mathbf{H}$; entonces

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ex}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (56.8)$$

Fuera del cuerpo esta ecuación debe coincidir con la ecuación exacta de Maxwell para el campo en el vacío, por lo que el vector \mathbf{H} coincide con la intensidad del campo magnético. Pero dentro del cuerpo la corriente \mathbf{j}_{ex} en el caso estático está ligada con el campo magnético por la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_{\text{ex}}/c,$$

donde \mathbf{H} es la magnitud introducida en el § 27 y ligada de determinada manera con la inducción media \mathbf{B} . De aquí se sigue que, en el caso de frecuencias que tienden a cero, el vector \mathbf{H} en la ecuación (56.8) pasa a coincidir con la magnitud estática $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, y que la «lentitud» con que hemos supuesto que se produce la variación del campo significa que también para estos campos variables se conserva la misma dependencia $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Así pues, \mathbf{H} se convierte en una magnitud completamente determinada y, prescindiendo de la magnitud auxiliar \mathbf{j}_{ex} , llegamos finalmente a la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (56.9)$$

Esta ecuación substituye para los dieléctricos la primera de las ecuaciones (56.1) que describen el campo en los metales. Cabe pensar que también para éstos debe incluirse en dicha ecuación el término con la derivada $\partial \mathbf{E} / \partial t$, es decir, que hay que escribir

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (56.10)$$

con un coeficiente constante ϵ .

Sin embargo, para buenos conductores (metales puros) la introducción de dicho término carecería de sentido. Los dos términos en el segundo miembro de la ecuación (56.10) representan esencialmente los dos primeros términos del desarrollo en potencias de la frecuencia del campo. Dado que ésta se supone suficientemente pequeña, tener en cuenta el segundo término podría significar, en el mejor de los casos, la introducción de una pequeña corrección. En realidad, ni tan sólo puede tener este sentido el término en cuestión, puesto que, de hecho, las correcciones en los metales debidas a la influencia de la no homogeneidad espacial del campo se hacen notar considerablemente antes que la corrección debida a la frecuencia (véase la nota en la pág. 225).

Existe, sin embargo, una categoría especial de cuerpos (los malos conductores) para los que la ecuación (56.10) puede tener sentido. En virtud de causas particulares (pequeño número de electrones de conductibilidad en los semiconductores, pequeña movilidad de los iones en las disoluciones de electrolitos, etc.), la conductibilidad de estas sustancias es anormalmente pequeña y, en consecuencia, el segundo término en el segundo miembro de la ecuación (56.10) puede ser comparable con el primero, e incluso superarlo, para aquellas frecuencias a las que es posible todavía considerar σ y ϵ como constantes. En un campo monocromático la razón del segundo término al primero vale

$$\epsilon\omega/4\pi\sigma.$$

Si esta razón es pequeña, el cuerpo se comporta como un conductor ordinario cuya conductibilidad es σ . Mas para frecuencias $\omega \gg 4\pi\sigma/\epsilon$, se comporta como un dieléctrico con constante dieléctrica ϵ .

En un medio homogéneo con ϵ y μ constantes las ecuaciones (56.3-5) y (56.9) toman la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (56.11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (56.12)$$

Eliminando entre estas ecuaciones, como de ordinario, \mathbf{E} (o \mathbf{H}), obtendremos

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

y dado que $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$, llegamos con ello a la ecuación de onda

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Puede obtenerse una ecuación semejante por eliminación de \mathbf{H} . Se ve por esto que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio dieléctrico homogéneo es

$$c/\sqrt{(\epsilon\mu)}. \quad (56.13)$$

La densidad de flujo de energía electromagnética en el medio dieléctrico viene dada por la misma fórmula

$$\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi \quad (56.14)$$

que en el caso de los metales. Es fácil comprobarlo sin más que calcular $\operatorname{div} \mathbf{S}$. Aplicando las ecuaciones (56.4) y (56.9), obtendremos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned} \quad (56.15)$$

de acuerdo con la expresión

$$dU = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B})/4\pi$$

de la diferencial de la energía interna de un dieléctrico para valores dados de la densidad y de la entropía.

Como es sabido, las condiciones generales de invariancia relativista conducen a que la densidad de flujo de energía coincida necesariamente (salvo el factor c^2) con la densidad espacial de impulso del campo*. En consecuencia, esta última es igual a

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi c. \quad (56.16)$$

* Esto es consecuencia del carácter simétrico del tensor energía-impulso cuadridimensional. Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 32.

Este hecho, en particular, debe ser tenido en cuenta al determinar las fuerzas que actúan sobre un dieléctrico que se encuentra en un campo electromagnético variable. La fuerza \mathbf{f} (referida a la unidad de volumen) se puede calcular a partir del tensor de tensiones σ_{ik} mediante la igualdad

$$f_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k.$$

Sin embargo, al hacerlo es necesario tener presente que σ_{ik} es la densidad del flujo de impulso que traduce la variación del impulso, tanto de la materia como del campo electromagnético. Si entendemos por \mathbf{f} la fuerza que actúa únicamente sobre el medio, de la expresión que acabamos de escribir hay que restar la variación del impulso de la unidad de volumen del campo:

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_i}{4\pi c}. \quad (56.17)$$

En un campo constante este último término es igual a cero, razón por la cual esta cuestión no se planteó antes.

La «lentitud» de la variación del campo permite utilizar para el tensor de tensiones las expresiones anteriores obtenidas para un campo constante. Así, para un medio dieléctrico líquido, σ_{ik} viene dado por la suma de las componentes eléctrica (15.9) y magnética (34.2).

Sin embargo, al derivar estas expresiones respecto de las coordenadas es necesario tener en cuenta que en vez de las ecuaciones $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ para un campo constante (en ausencia de corrientes) tenemos ahora las ecuaciones (56.12). El cálculo conduce al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & - \text{grad } p_0 - \frac{E^2}{8\pi} \text{grad } \epsilon + \text{grad} \left[\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \frac{E^2}{8\pi} \right] - \frac{H^2}{8\pi} \text{grad } \mu + \\ & + \text{grad} \left[\rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \frac{H^2}{8\pi} \right] + \frac{\epsilon\mu - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (56.18)$$

§ 57. Electrodinámica de los dieléctricos en movimiento

El movimiento de un medio provoca la aparición de fenómenos de influencia mutua entre los campos eléctrico y magnético. Para los conductores estos fenómenos se analizaron en el § 49, mientras que ahora pasamos al estudio de esta cuestión para el caso de los dieléctricos. Prácticamente, en este caso se trata de fenómenos que se producen en cuerpos en movimiento cuando existen campos exteriores, eléctrico o magnético. Hay que subrayar que nada tienen en común con los fenómenos de aparición de campos como resultado del propio movimiento del cuerpo (que se consideraron en los §§ 35 y 50).

El punto de partida en el § 49 lo constituyen las fórmulas de transformación del campo al pasar de un sistema de referencia a otro. Nos bastó entonces conocer las fórmulas ordinarias de transformación de la intensidad del campo eléctrico y del magnético en el vacío, cuyo promedio da directamente las fórmulas de transformación de \mathbf{E} y \mathbf{B} . En el caso de los dieléctricos la cuestión es considerablemente más complicada debido a la existencia de un mayor número de magnitudes que describen el campo electromagnético.

Para el movimiento de cuerpos macroscópicos, sólo cabe considerar de hecho velocidades que son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Sin embargo, para obtener las correspondientes fórmulas de transformación aproximadas, lo más sencillo es partir de las fórmulas relativistas exactas, que son válidas para velocidades cualesquiera.

Como es sabido, en la electrodinámica de un campo en el vacío las componentes de los vectores \mathbf{e} y \mathbf{h} de las intensidades eléctrica y magnética son, en realidad, componentes de un tensor cuadridimensional (4-tensor) antisimétrico de segundo orden*. Dado que \mathbf{E} y \mathbf{B} son los valores medios de \mathbf{e} y \mathbf{h} , lo mismo vale para estas magnitudes. Así pues, se tiene un 4-tensor F_{ik} con las siguientes componentes**:

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (57.1)$$

Mediante este tensor, el primer par de ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (57.2)$$

puede escribirse como sigue en forma cuadridimensional:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \quad (57.3)$$

Esto pone de manifiesto la invariancia relativista de dichas ecuaciones. Hay que subrayar que la aplicabilidad de las ecuaciones (57.2) a los cuerpos en movimiento es por sí misma evidente, puesto que estas ecuaciones se obtienen directamente substituyendo en las ecuaciones microscópicas exactas de Maxwell \mathbf{e} y \mathbf{h} por sus valores medios \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Pero también el segundo par de ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (57.4)$$

conserva asimismo su aspecto formal en los medios en movimiento. Esto es evidente en virtud de los razonamientos desarrollados en el párrafo anterior, razonamientos

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, §§ 23 y 24.

** En el texto de este párrafo (pero no en los problemas del mismo) los índices tensoriales toman los valores 1, 2, 3, 4, que corresponden a las coordenadas cuadridimensionales $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$.

en los que únicamente se utilizaron aquellas propiedades generales de los cuerpos (por ejemplo, la anulación de la carga total) que éstos poseen en igual grado tanto si están en movimiento como si están en reposo. Sin embargo, las relaciones entre las magnitudes \mathbf{D} y \mathbf{E} y las magnitudes \mathbf{B} y \mathbf{H} en modo alguno tienen por qué coincidir con las correspondientes a medios en reposo.

Dado que las ecuaciones (57.4) son válidas tanto para cuerpos en reposo como para cuerpos en movimiento, su forma debe conservarse en las transformaciones de Lorentz. Para un campo en el vacío los vectores \mathbf{D} y \mathbf{H} coinciden con \mathbf{E} y \mathbf{B} , y la invariancia relativista del segundo par de ecuaciones de Maxwell resulta de que pueden escribirse en forma cuatridimensional utilizando el mismo tensor F_{ik} : $\partial F_{ik}/\partial x_k = 0$ *. Es evidente que para que quede asegurada la invariancia relativista de las ecuaciones (57.4) es necesario que las componentes de los vectores \mathbf{D} y \mathbf{H} se transformen efectivamente como las componentes de un 4-tensor construido de manera completamente análoga a como se obtuvo el tensor F_{ik} ; designemos este tensor por H_{ik} :

$$H_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (57.5)$$

Mediante éste, las ecuaciones (57.4) se escriben en la forma

$$\partial H_{ik}/\partial x_k = 0. \quad (57.6)$$

Al haber aclarado la naturaleza tensorial en cuatro dimensiones de las magnitudes \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , se ha determinado a la vez su ley de transformación al pasar de un sistema de referencia a otro. Con todo, aquí nos interesa no tanto la ley de esta transformación, como el vínculo que une estas magnitudes en un medio en movimiento y que generalice las relaciones $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ válidas para cuerpos en reposo.

Designemos por u_i el 4-vector velocidad del medio; sus componentes están ligadas con la velocidad tridimensional \mathbf{v} por

$$u_{1,2,3} = v_{x,y,z} / c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad u_4 = i / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

A partir de este 4-vector y de los 4-tensores F_{ik} y H_{ik} formemos aquellas combinaciones que en un medio en reposo pasan a ser \mathbf{E} y \mathbf{D} . Tales son los 4-vectores $F_{ik}u_k$ y $H_{ik}u_k$; para $\mathbf{v} = 0$ sus componentes temporales se anulan y las espaciales se reducen a \mathbf{E} y \mathbf{D} , respectivamente. Es claro así que la generalización cuatridimensional de la igualdad $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ es**

$$H_{ik}u_k = \epsilon F_{ik}u_k. \quad (57.7)$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 30.

** Hay que hacer notar que al escribir relaciones como éstas que contienen solamente el valor local de la velocidad, estamos prescindiendo de débiles efectos ligados con una posible existencia de un gradiente de la velocidad (por ejemplo, efectos giromagnéticos; véase § 35).

Análogamente, vemos que la generalización de la igualdad $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ es la fórmula cuatridimensional

$$F_{ik}u_i + F_{kl}u_l + F_{li}u_k = \mu(H_{ik}u_l + H_{kl}u_i + H_{li}u_k). \quad (57.8)$$

Pasando de nuevo de las notaciones cuatridimensionales a magnitudes tridimensionales, a partir de estas dos ecuaciones se obtienen las relaciones vectoriales*:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c &= \epsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c), \\ \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c &= \mu(\mathbf{H} + \mathbf{D} \times \mathbf{v}/c). \end{aligned} \quad (57.9)$$

Estas fórmulas, obtenidas por *H. Minkowski* (1908), son exactas en el sentido de que en ellas no se ha hecho todavía hipótesis alguna acerca del valor de la velocidad. Pero si consideramos valores pequeños de la razón v/c y se resuelven estas ecuaciones respecto de \mathbf{D} y \mathbf{B} con una precisión que alcanza los términos de primer orden, obtendremos

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + (\epsilon\mu - 1)\mathbf{v} \times \mathbf{H}/c, \quad (57.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + (\epsilon\mu - 1)\mathbf{E} \times \mathbf{v}/c. \quad (57.11)$$

Estas ecuaciones, junto con las ecuaciones de Maxwell (57.2) y (57.4), constituyen la base de la electrodinámica de los dieléctricos en movimiento.

También las condiciones de contorno que se imponen a las ecuaciones de Maxwell experimentan ciertos cambios. De las ecuaciones $\text{div } \mathbf{D} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$ se siguen como antes las condiciones de continuidad de las componentes normales del desplazamiento eléctrico:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad B_{n1} = B_{n2}. \quad (57.12)$$

En lo que concierne a las componentes tangenciales del campo, la manera más fácil de obtener las correspondientes condiciones consiste en pasar del sistema de referencia en reposo K a un nuevo sistema K' que se mueve junto con el elemento de superficie dado del cuerpo; la velocidad de este último (dirigida a lo largo de la normal \mathbf{n}) la designaremos por v_n . En el sistema K' son correctas las condiciones ordinarias de continuidad de \mathbf{E}'_t y de \mathbf{H}'_t . Según las fórmulas de transformación relativistas**, estas condiciones son equivalentes a la de continuidad de las componentes tangenciales de los vectores

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c, \quad \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}/c.$$

Proyectándolos sobre un plano perpendicular a \mathbf{n} y teniendo en cuenta las igualdades (57.12), obtendremos las ecuaciones de contorno buscadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= v_n(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)/c, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= -v_n(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)/c. \end{aligned} \quad (57.13)$$

* Si algunas de las relaciones $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ o $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ no se cumple en el medio en reposo, la correspondiente relación de las dos (57.9) se substituye por otra dependencia funcional entre las dos sumas vectoriales que aparecen en uno y otro miembro de la igualdad.

** Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 24.

Si sustituimos aquí las expresiones (57.10-11) y prescindimos de los términos de orden superior respecto de v/c , se obtendrá

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= v_n(\mu_2 - \mu_1)\mathbf{H}_t/c, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= -v_n(\epsilon_2 - \epsilon_1)\mathbf{E}_t/c. \end{aligned} \quad (57.14)$$

En esta aproximación, en el segundo miembro de la igualdad cabe no distinguir entre los valores de \mathbf{H} y \mathbf{E} a uno y otro lado de la superficie de separación.

Si el cuerpo se mueve de manera que su superficie no se desplaza en dirección perpendicular a sí misma (por ejemplo, en la rotación de un cuerpo de revolución en torno de su eje), se tendrá $v_n = 0$. Sólo en este caso las condiciones de contorno (57.13) o (57.14) se reducen a las condiciones ordinarias de continuidad de \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t .

PROBLEMAS

1. Una esfera dieléctrica gira uniformemente (en el vacío) en un campo magnético constante y homogéneo \mathfrak{H} . Determinar el campo eléctrico que se crea en torno de la esfera.

Solución. Para calcular el campo eléctrico que se forma sólo es necesario tomar para el campo magnético el que se tendría en el caso de una esfera en reposo, puesto que tener en cuenta la influencia de la variación del campo magnético conduciría únicamente a pequeñas correcciones de orden superior. Dentro de la esfera el campo magnético es homogéneo e igual a

$$\mathbf{H}^{(i)} = 3\mathfrak{H}/(2 + \mu)$$

(véase (8.2)).

Dado el carácter estacionario de la rotación, el campo eléctrico que se crea es constante y, como todo campo eléctrico constante, posee un potencial: $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$. Fuera de la esfera, éste satisface la ecuación $\Delta\phi^{(e)} = 0$, y en el interior de la misma, la ecuación

$$\Delta\phi^{(i)} = 2(\epsilon\mu - 1)\mathfrak{H} \cdot \mathbf{H}^{(i)}/c\epsilon, \quad (1)$$

donde \mathfrak{H} es la velocidad angular de rotación (esta ecuación se obtiene a partir de $\text{div } \mathbf{D} = 0$ substituyendo para \mathbf{D} la expresión (57.10) con $\mathbf{v} = \mathfrak{H} \times \mathbf{r}$). La condición de continuidad de la componente normal de \mathbf{D} sobre la superficie de la esfera se escribe:

$$-\epsilon \left[\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial r} \right]_{r=a} + \frac{\epsilon\mu - 1}{c} a [\mathfrak{H} \cdot \mathbf{H}^{(i)} - (\mathfrak{H} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{H}^{(i)} \cdot \mathbf{n})] = - \left[\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r} \right]_{r=a} \quad (2)$$

(a es el radio de la esfera, y \mathbf{n} el versor correspondiente al vector posición \mathbf{r}).

Dada la simetría de la esfera, el campo eléctrico buscado viene determinado por dos vectores constantes: \mathfrak{H} y \mathfrak{H} . A partir de sus componentes se pueden construir un escalar $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}$ y un tensor

$$\mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_k + \mathfrak{H}_k \mathfrak{H}_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H},$$

bilineales, siendo igual a cero la suma de los elementos diagonales de este último. De acuerdo con esto, buscaremos para el potencial del campo fuera de la esfera, una expresión de la forma

$$\phi^{(e)} = \frac{1}{6} D_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2} D_{ik} \frac{n_i n_k}{r^3}, \quad (3)$$

donde D_{ik} es un tensor constante (tal que $D_{ii} = 0$); D_{ik} es el tensor momento eléctrico cuadrupolar de la esfera*. En cambio, en $\phi^{(e)}$ no puede existir un término de la forma $\frac{\text{const}}{r}$, puesto que daría lugar a un flujo total no nulo del campo eléctrico a través de una superficie que rodea la esfera

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 41.

(cuando en realidad ésta carece de carga). Para el potencial del campo dentro de la esfera se tomará una expresión de la forma

$$\phi^{(i)} = \frac{r^2}{2a^5} D_{ik} n_i n_k + \frac{\epsilon\mu - 1}{3c\epsilon} \Omega \cdot \mathbf{H}^{(i)} (r^2 - a^2). \quad (4)$$

El primer término es solución de la ecuación homogénea $\Delta\phi = 0$, y el coeficiente del mismo se ha elegido de manera que el potencial sea continuo (y con él también el propio \mathbf{E}_t) sobre la superficie de la esfera. Substituyendo (3) y (4) en (2), se encuentra

$$D_{ik} = -\frac{a^5}{c} \frac{3(\epsilon\mu - 1)}{(3 + 2\epsilon)(2 + \mu)} [\mathfrak{H}_i \Omega_k + \mathfrak{H}_k \Omega_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \mathfrak{H} \cdot \Omega]. \quad (5)$$

Así pues, alrededor de una esfera en rotación se forma un campo eléctrico de naturaleza cuadripolar, viniendo determinado el momento cuadripolar de la esfera por la fórmula (5)*. En particular, si la esfera gira en torno de un eje paralelo al campo exterior (eje z), D_{ik} tiene solamente componentes diagonales

$$D_{zz} = -\frac{a^5}{c} \frac{4(\epsilon\mu - 1)}{(3 + 2\epsilon)(2 + \mu)} \mathfrak{H} \Omega, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}.$$

2. Una esfera imanada uniformemente gira (en el vacío) en torno de un eje paralelo a la dirección de imanación. Determinar el campo eléctrico que se forma en torno de la esfera**.

Solución. El campo magnético dentro de la esfera es homogéneo y se expresa en función de la imanación constante \mathbf{M} de acuerdo con las ecuaciones $\mathbf{B}^{(i)} + 2\mathbf{H}^{(i)} = 0$ (véase (8.1)) y $\mathbf{B}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)} = 4\pi\mathbf{M}$, de donde

$$\mathbf{B}^{(i)} = 8\pi\mathbf{M}/3, \quad \mathbf{H}^{(i)} = -4\pi\mathbf{M}/3.$$

La segunda de las fórmulas (57.9) no se aplica en este caso (dado que la fórmula $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ no es válida para un imán en reposo) y de la primera se sigue que dentro de la esfera

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} + \epsilon\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c - \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c \\ &= \epsilon\mathbf{E} + 4\pi(2\epsilon + 1)\mathbf{v} \times \mathbf{M}/3c. \end{aligned}$$

El potencial del campo eléctrico que se produce fuera de la esfera satisface la ecuación $\Delta\phi^{(e)} = 0$, y dentro de la misma, la ecuación

$$\Delta\phi^{(i)} = 8\pi(2\epsilon + 1)M\Omega/3c\epsilon.$$

La condición de contorno que impone la continuidad de D_n sobre la superficie de la esfera, nos da:

$$-\epsilon \left[\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial r} \right]_{r=a} + \frac{4\pi(2\epsilon + 1)}{3c} a \Omega \cos^2 \theta = - \left[\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r} \right]_{r=a},$$

donde θ es el ángulo formado por la normal y la dirección de Ω y \mathbf{M} (eje z). Tomemos para $\phi^{(e)}$ y $\phi^{(i)}$ expresiones de la forma

$$\begin{aligned} \phi^{(e)} &= \frac{D_{ik} n_i n_k}{2r^3} = \frac{D_{zz}}{4r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ \phi^{(i)} &= \frac{r^2}{4a^5} D_{zz} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{4\pi(2\epsilon + 1)}{9c\epsilon} M \Omega (r^2 - a^2). \end{aligned}$$

* Análogamente, en torno de una esfera que gira en un campo eléctrico homogéneo se forma un campo magnético cuadripolar. El momento cuadripolar magnético de la esfera viene entonces dado por una fórmula que se obtiene a partir de (5) cambiando el signo y substituyendo ϵ , μ , \mathfrak{H} por μ , ϵ , \mathfrak{E} , respectivamente.

** Si la dirección de imanación no coincide con la del eje de rotación, cambia fundamentalmente el planteo del problema, puesto que la esfera emite entonces radiación hacia el espacio que la rodea.

La condición de contorno nos permite escribir entonces la siguiente fórmula para el momento eléctrico cuadripolar que se origina en la esfera en rotación:

$$D_{zz} = -\frac{4(2\epsilon+1)}{3c(2\epsilon+3)}a^2\Omega\mathcal{M}, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

(\mathcal{M} es el momento magnético total de la esfera). Para una esfera metálica hay que hacer $\epsilon \rightarrow \infty$, con lo que

$$D_{zz} = -4\Omega\mathcal{M}a^2/3c.$$

§ 58. Dispersión de la permitividad

Pasemos ahora al estudio de la importante cuestión que plantean los campos electromagnéticos rápidamente variables, cuyas frecuencias no están limitadas por la condición de que sean pequeñas comparadas con las que caracterizan el establecimiento de una polarización eléctrica y magnética de la materia.

Un campo electromagnético variable en el tiempo es también necesariamente variable en el espacio. Para una frecuencia ω la periodicidad espacial viene determinada por la longitud de onda, cuyo orden de magnitud es $\lambda \sim c/\omega$. Si sigue aumentando el valor de la frecuencia, λ viene a ser finalmente comparable con las dimensiones atómicas a . En tales condiciones, es imposible una descripción macroscópica del campo.

En relación con esto surge la cuestión de si existe en general un dominio de valores de las frecuencias en el que, de una parte, cobran ya importancia los fenómenos de dispersión, si bien, por la otra, es todavía admisible una descripción macroscópica. Es fácil ver que dicho intervalo debe existir necesariamente. El mecanismo más rápido para que se establezca la polarización eléctrica o magnética en la materia lo ofrecen los electrones. Su tiempo de relajación es del orden de magnitud de los tiempos atómicos a/v , donde a caracteriza las dimensiones atómicas y v las velocidades de los electrones en el átomo. Pero dado que $v \ll c$, incluso la longitud de onda correspondiente a estos tiempos, $\lambda \sim ac/v$, continúa siendo grande comparada con a . En lo que sigue supondremos que se cumple la condición $\lambda \gg a$ *. Sin embargo, no hay que perder de vista que esta condición puede resultar insuficiente: para los metales a bajas temperaturas existe un intervalo de frecuencias en el cual es inaplicable la teoría macroscópica, a pesar de que se cumple la desigualdad $c/\omega \gg a$ (véase § 67).

La teoría formal que se expone a continuación vale en igual grado para los metales y para los dieléctricos. Es más, para las frecuencias que corresponden a los movimientos intraatómicos de los electrones (*frecuencias ópticas*) y mayores, desaparece de hecho incluso la diferencia cuantitativa entre las propiedades de los unos y de los otros.

* Los efectos ligados con términos del orden siguiente respecto de a/λ (la llamada *actividad óptica natural*) se considerarán en el § 83.

Ya los razonamientos presentados en el § 56 hacen ver que el aspecto formal de las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (58.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (58.2)$$

se conserva en campos electromagnéticos variables arbitrarios. Pero estas ecuaciones de bien poco sirven, sin embargo, hasta que no se establece una relación entre las magnitudes \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{E} , \mathbf{H} que aparecen en ellas. En el caso de altas frecuencias, que estamos considerando ahora, esta relación nada tiene de común con la que es válida en el caso estático y que utilizamos en los campos variables cuando no existe dispersión.

Ante todo, desaparece incluso la propiedad fundamental de la relación que se tenía antes, a saber, la dependencia unívoca de \mathbf{D} y \mathbf{B} respecto de los valores de \mathbf{E} y \mathbf{H} en el mismo instante. En el caso general de un campo variable arbitrario, los valores de \mathbf{D} y \mathbf{B} en un determinado instante en modo alguno vienen determinados por solamente los valores de \mathbf{E} y \mathbf{H} en el mismo instante. Cabe afirmar, por el contrario, que los valores de \mathbf{D} y \mathbf{B} en un instante dado dependen, en general, de los valores de las funciones $\mathbf{E}(t)$ y $\mathbf{H}(t)$ en todos los instantes anteriores. Esta circunstancia traduce el hecho de que la polarización eléctrica o magnética de la materia «no logra» seguir las variaciones del campo electromagnético. Las frecuencias a las que se producen fenómenos de dispersión en las propiedades eléctricas y magnéticas de la materia pueden ser completamente distintas.

En este párrafo estudiaremos la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} ; en cuanto a las características específicas propias de la dispersión de las propiedades magnéticas de la materia, éstas se analizarán en el § 60.

En el § 6 se introdujo el vector polarización dieléctrica \mathbf{P} mediante la definición $\bar{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, donde ρ es la densidad verdadera (microscópica) de las cargas en la materia. Esta igualdad expresaba que el cuerpo en conjunto es eléctricamente neutro y bastó (junto con la condición $\mathbf{P} = 0$ fuera del mismo) para demostrar que el momento eléctrico total del cuerpo es igual a la integral $\int \mathbf{P} dV$. Evidentemente, esta conclusión es aplicable a los campos variables en igual medida que a los constantes. Así pues, en cualquier campo variable, incluso cuando existe dispersión, el vector $\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{D} - \mathbf{E})$ conserva su sentido físico de momento eléctrico por unidad de volumen de la materia.

En los campos rápidamente variables, las intensidades del campo que intervienen son siempre, en la práctica, relativamente pequeñas. Por ello, la relación de \mathbf{D} con \mathbf{E} en cualquier caso se puede considerar como lineal*. La forma más general de depen-

* Admitimos aquí que \mathbf{D} depende linealmente sólo de \mathbf{E} , pero no de \mathbf{H} . En un campo constante la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{H} se excluye por la condición de invariancia respecto del cambio de signo del tiempo. En un campo variable esta condición no es ya aplicable, y la dependencia lineal de \mathbf{D} respecto de \mathbf{H} resulta ser posible para determinados tipos de simetría de la materia. Con todo, representa un pequeño efecto del orden de a/λ , precisamente el mismo efecto a que se aludió en la nota de la página anterior.

dencia lineal entre $\mathbf{D}(t)$ y los valores de $\mathbf{E}(t)$ en todos los instantes anteriores cabe expresarla como relación integral

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_0^{\infty} f(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau \quad (58.3)$$

(la separación del término $\mathbf{E}(t)$ es conveniente por razones que se explicarán más adelante). Aquí $f(\tau)$ es una función del tiempo que depende de las propiedades del medio. Por analogía con la fórmula electrostática $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ escribiremos la relación (58.3) en la forma simbólica

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E},$$

donde $\hat{\epsilon}$ es un operador integral lineal cuya acción sobre \mathbf{E} viene definida por (58.3).

Cualquier campo variable puede reducirse (mediante un desarrollo de Fourier) a un sistema de componentes monocromáticas en las que la dependencia de todas las magnitudes respecto del tiempo viene dada por el factor $e^{-i\omega t}$. Para tales campos la relación (58.3) entre \mathbf{D} y \mathbf{E} toma la forma

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega) \mathbf{E}, \quad (58.4)$$

donde la función $\epsilon(\omega)$ se define por

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (58.5)$$

De esta manera, es posible introducir el concepto de permitividad para campos periódicos como coeficiente de proporcionalidad entre \mathbf{D} y \mathbf{E} , si bien, con todo, este coeficiente depende no solamente de las propiedades del medio, sino también de la frecuencia del campo. La dependencia de ϵ respecto de la frecuencia se llama su *ley de dispersión*.

La función $\epsilon(\omega)$ es, en general, compleja. Sus partes real e imaginaria las designaremos por ϵ' y ϵ'' :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega). \quad (58.6)$$

De la definición (58.5) se sigue inmediatamente que

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega). \quad (58.7)$$

Separando en esta igualdad las partes real e imaginaria, obtendremos

$$\epsilon'(-\omega) = \epsilon'(\omega), \quad \epsilon''(-\omega) = -\epsilon''(\omega). \quad (58.8)$$

Así pues, ϵ' resulta ser función par de la frecuencia, y ϵ'' lo es impar.

Para frecuencias pequeñas (comparadas con la frecuencia límite a que empieza la dispersión), $\epsilon(\omega)$ se puede desarrollar en serie de potencias de ω . El desarrollo de la función par $\epsilon'(\omega)$ contiene solamente términos con potencias pares, mientras que en el de la función impar $\epsilon''(\omega)$ aparecen sólo términos de potencia impar. Cuando $\omega \rightarrow 0$, la función $\epsilon(\omega)$ tiende en los dieléctricos, naturalmente, a la constante dieléctrica electrostática (que designaremos aquí por ϵ_0). Por ello, en los die-

létricos, el desarrollo de $\epsilon'(\omega)$ comienza con un término constante ϵ_0 ; en cambio, el desarrollo de $\epsilon''(\omega)$ empieza, en general, con un término que es proporcional a ω .

La función $\epsilon(\omega)$ para pequeñas frecuencias se puede considerar también en los metales, si se conviene en definirla de modo que en el límite $\omega \rightarrow 0$ la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t$$

se transforma en la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}/c$$

que corresponde a un campo constante en conductores. Comparando ambas ecuaciones, vemos que cuando $\omega \rightarrow 0$ la derivada $\partial \mathbf{D} / \partial t$ debe convertirse en $4\pi\sigma\mathbf{E}$. Pero para un campo periódico $\partial \mathbf{D} / \partial t = -i\omega\epsilon\mathbf{E}$, con lo que llegamos a la siguiente expresión límite de $\epsilon(\omega)$ a bajas frecuencias:

$$\epsilon(\omega) = 4\pi\sigma/\omega. \quad (58.9)$$

Por lo tanto, en los conductores, el desarrollo de la función $\epsilon(\omega)$ comienza con un término imaginario, proporcional a $1/\omega$, que se expresa en función de la conductibilidad ordinaria σ correspondiente a corrientes constantes*. El término siguiente del desarrollo de $\epsilon(\omega)$ es una constante real. Sin embargo, esta constante no tiene en los metales el mismo sentido electrostático que posee en los dieléctricos**. Además, de nuevo es necesario indicar que este término del desarrollo puede carecer de sentido si los efectos de la no-homogeneidad espacial del campo de la onda electromagnética se manifiestan antes que los efectos de su periodicidad en el tiempo.

En los superconductores se tiene siempre una considerable heterogeneidad espacial debida a que en ellos la «profundidad de penetración» del campo magnético es pequeña. Todavía no está claro si, en relación con esto, tiene algún sentido la permitividad $\epsilon(\omega)$ en el caso de los superconductores.

§ 59. Permitividad para muy altas frecuencias

En el límite $\omega \rightarrow \infty$ la función $\epsilon(\omega)$ tiende a la unidad. Esto es ya evidente por simples consideraciones físicas: para una variación del campo suficientemente rápida, los procesos de polarización que conducen a que se establezca una diferencia entre \mathbf{E} y el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} no llegan a tener lugar.

Es posible establecer una forma límite de la función $\epsilon(\omega)$ para altas frecuencias válida para cuerpos cualesquiera (se trate de metales o de dieléctricos). En efecto,

* A veces se expresa la parte imaginaria de la función $\epsilon(\omega)$ para todas las frecuencias en la forma (58.9), lo que equivale a introducir en vez de $\epsilon''(\omega)$ una nueva función $\sigma(\omega)$; con este cambio de notación se pierde el significado físico de dicha función.

** Para evitar malentendidos, hay que señalar un cierto cambio de notación respecto de la adoptada en el § 56. En la ec. (56.10) para malos conductores, la magnitud $\epsilon(\omega)$ es la suma $\frac{4\pi i\sigma}{\omega} + \epsilon$.

la frecuencia del campo debe ser entonces grande comparada con las «frecuencias» del movimiento de todos (o, por lo menos, de la mayoría de) los electrones en los átomos de la substancia dada. Si se cumple esta condición, en el cálculo de la polarización de la materia cabe considerar los electrones como libres, prescindiendo de su interacción mutua y con los núcleos de los átomos.

Las velocidades v del movimiento de los electrones en los átomos son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Por ello, las distancias v/ω que recorren en el tiempo correspondiente a un período de la onda son pequeñas comparadas con la longitud de onda c/ω . Teniendo esto en cuenta, cabe considerar el campo de la onda electromagnética como homogéneo al determinar las velocidades que los electrones adquieren en el mismo.

La ecuación del movimiento se escribe:

$$m \, dv'/dt = eE = eE_0 e^{-i\omega t}$$

(e , m son la carga y la masa del electrón); de aquí se sigue $v' = ieE/m\omega$. Ahora bien, el desplazamiento r del electrón bajo la acción del campo está ligado con v' por $\dot{r} = v'$. En consecuencia, $r = -eE/m\omega^2$. La polarización P de la materia es el momento dipolar por unidad de volumen. Sumando respecto de todos los electrones, encontramos

$$P = \sum e r = -e^2 N E / m \omega^2,$$

donde N es el número de electrones en todos los átomos de la unidad de volumen de la substancia. Por otra parte, el desplazamiento eléctrico es, por definición, $D = \epsilon E = E + 4\pi P$. En consecuencia, obtenemos finalmente la siguiente fórmula:

$$\epsilon(\omega) = 1 - 4\pi N e^2 / m \omega^2. \quad (59.1)$$

El dominio efectivo de aplicabilidad de esta fórmula comienza en el ultravioleta lejano en los elementos más ligeros, y en las frecuencias de rayos X, en los elementos más pesados*.

§ 60. Dispersión de la permeabilidad

En contraste con $\epsilon(\omega)$, la permeabilidad $\mu(\omega)$ pierde relativamente pronto su significación física al aumentar la frecuencia. Tener en cuenta la diferencia entre $\mu(\omega)$ y la unidad sería entonces un refinamiento injustificado.

Para poner en claro esta cuestión, analicemos en qué medida se conserva en un campo variable el sentido físico de la magnitud $M = (B - H)/4\pi$ como imanación. Por definición, el momento magnético de un cuerpo es la integral

$$\frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \overline{\rho \mathbf{v}} \, dV. \quad (60.1)$$

* Para que la magnitud $\epsilon(\omega)$ conserve el sentido literal con que interviene en las ecuaciones de Maxwell, la frecuencia debe satisfacer aún la condición $\omega \ll c/a$. Sin embargo, veremos en lo que sigue (§ 97) que cabe atribuir a la expresión (59.1) un determinado sentido físico también para frecuencias más elevadas.

El valor medio de la densidad microscópica de corriente está ligado con el campo medio por la ecuación (56.7):

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (60.2)$$

Restando de ella miembro a miembro la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t,$$

obtendremos

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \text{ rot } \mathbf{M} + \partial \mathbf{P} / \partial t. \quad (60.3)$$

Conforme se probó en el § 27, la integral (60.1) se puede reducir a la forma $\int \mathbf{M} dV$ sólo si se cumple la condición $\overline{\rho \mathbf{v}} = c \text{ rot } \mathbf{M}$ (y $\mathbf{M} = 0$ fuera del cuerpo).

De esta manera, el significado físico de la magnitud \mathbf{M} (y con él también el de la susceptibilidad magnética) resulta estar ligado con la posibilidad de prescindir del término $\partial \mathbf{P} / \partial t$ en la fórmula (60.3). Veamos hasta qué punto se pueden cumplir las condiciones que permiten ignorar dicho término.

Para una frecuencia dada, las condiciones más favorables para medir la susceptibilidad exigen que las dimensiones del cuerpo sean lo más pequeñas posibles (para aumentar las derivadas espaciales en $\text{rot } \mathbf{M}$) y que el campo eléctrico sea lo más débil posible (para disminuir \mathbf{P}). El campo de una onda electromagnética no cumple esta última condición, puesto que en él $E \sim H$. Consideraremos por esto el campo magnético variable en, por ejemplo, un solenoide, colocando el cuerpo en estudio sobre su eje. El campo eléctrico aparece solamente como resultado de la inducción del campo magnético variable. El orden de magnitud de E dentro del cuerpo se puede obtener estimando los dos miembros de la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t,$$

de la que se sigue $E/l \sim \omega H/c$ o bien $E \sim (\omega l/c) H$, donde l caracteriza el tamaño del cuerpo. Haciendo ~ 1 , tendremos

$$\partial \mathbf{P} / \partial t \sim \omega \mathbf{E} \sim \omega^2 l \mathbf{H} / c.$$

En cuanto a las derivadas espaciales de la imanación, $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, se tiene

$$|c \text{ rot } \mathbf{M}| \sim c \chi H / l.$$

Comparando ambas expresiones, encontramos que la primera es pequeña frente a la segunda si

$$l^2 \ll \chi c^2 / \omega^2. \quad (60.4)$$

Está claro que el concepto de susceptibilidad magnética únicamente puede tener sentido si esta desigualdad admite (aunque no sea con un margen muy grande) que el cuerpo tenga dimensiones macroscópicas, es decir, si es compatible con la desigualdad $l \gg a$, donde a son las dimensiones atómicas. Esta condición se viola,

evidentemente, ya en el dominio de las frecuencias ópticas. En efecto, la susceptibilidad magnética para tales frecuencias es siempre del orden de v^2/c^2 * (v caracteriza las velocidades de los electrones en el átomo); las propias frecuencias ópticas, en cambio, son tales que $\omega \sim v/a$ y, en consecuencia, el segundo miembro de la desigualdad (60.4) es $\sim a^2$.

Así pues, es evidente que carece de sentido utilizar la permeabilidad magnética no bien se alcanza el dominio de las frecuencias ópticas, y al considerar los correspondientes fenómenos es necesario hacer $\mu = 1$. Distinguir entre \mathbf{B} y \mathbf{H} en dicho dominio equivaldría a excederse en la precisión aceptable. Es más, de hecho, tener en cuenta la diferencia entre μ y la unidad equivale a un exceso de precisión para la mayoría de los fenómenos incluso para frecuencias mucho más bajas que las ópticas.

§ 61. Energía del campo en los medios dispersores

La fórmula

$$\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi \quad (61.1)$$

para la densidad de flujo de energía conserva su validez en campos electromagnéticos variables cualesquiera, en particular incluso cuando existe dispersión. Esto es del todo evidente en virtud de los razonamientos desarrollados al final del § 29: teniendo en cuenta la continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} , la fórmula (61.1) se sigue unívocamente de la condición de continuidad de la componente normal de \mathbf{S} sobre la frontera del cuerpo y del hecho de que dicha fórmula es válida en el vacío fuera del mismo.

La variación (por segundo) de la energía referida a la unidad de volumen del cuerpo viene dada por $\text{div } \mathbf{S}$. Mediante las ecuaciones de Maxwell esta expresión se reduce a la forma

$$-\text{div } \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (61.2)$$

(véase (56.15)). En un medio dieléctrico sin dispersión, cuando ϵ y μ son cantidades constantes reales, cabe considerar esta magnitud como variación de la energía electromagnética

$$U = (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)/8\pi, \quad (61.3)$$

que tiene una significación termodinámica precisa: es la diferencia entre la energía interna por cm^3 de materia cuando existe el campo y la energía cuando el campo no existe, para valores fijos de la densidad y de la entropía.

Si hay dispersión, esta simple interpretación no es ya posible. Además, en el caso general de dispersión arbitraria resulta imposible cualquier definición razona-

* Los tiempos de relajación de procesos paramagnéticos o ferromagnéticos cualesquiera son ciertamente grandes comparados con los períodos ópticos.

ble de la energía electromagnética como magnitud termodinámica. Esto se debe a que la existencia de dispersión está vinculada, en general, con una disipación simultánea de energía: un medio dispersor resulta ser a la vez un absorbente.

Para determinar esta disipación, consideremos un campo electromagnético monocromático. Promediando respecto del tiempo la magnitud (61.2), encontramos la variación sistemática de la energía, que es también el valor medio de la cantidad de calor Q que se libera en 1 s y en 1 cm³ del medio.

Dado que la expresión (61.2) es cuadrática respecto del campo, al calcularla todas las magnitudes deben expresarse en forma real. Pero si se entiende por \mathbf{E} y \mathbf{H} , como resulta conveniente en el caso de un campo monocromático, las representaciones complejas de tales magnitudes, en (61.2) hay que substituir en vez de \mathbf{E} y $\partial\mathbf{D}/\partial t$ las expresiones

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(-i\omega\epsilon\mathbf{E} + i\omega\epsilon^*\mathbf{E}^*),$$

respectivamente, y análogamente para \mathbf{H} y $\partial\mathbf{B}/\partial t$. Al promediar respecto del tiempo, los productos $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ y $\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}^*$, que contienen los factores $e^{\mp 2i\omega t}$, se anulan; queda así:

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi}[(\epsilon^* - \epsilon)\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + (\mu^* - \mu)\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*] = \frac{\omega}{8\pi}(\epsilon''|\mathbf{E}|^2 + \mu''|\mathbf{H}|^2).$$

Esta expresión se puede escribir también en la forma

$$Q = \omega(\epsilon''\overline{\mathbf{E}^2} + \mu''\overline{\mathbf{H}^2})/4\pi, \quad (61.4)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{H} son las intensidades reales del campo y el trazo significa el promedio respecto del tiempo.

Esta importante fórmula muestra que la absorción (disipación) de energía viene determinada por las partes imaginarias de ϵ y μ ; los dos términos que aparecen en (61.4) se llaman, respectivamente, *pérdidas eléctricas* y *magnéticas*. En virtud de la ley de crecimiento de la entropía, estas pérdidas tienen un signo bien determinado: la disipación de energía va acompañada de liberación de calor, es decir, siempre es $Q > 0$. De la fórmula (61.4) se sigue, por esto, que las partes imaginarias de ϵ y μ son siempre positivas:

$$\epsilon'' > 0, \quad \mu'' > 0 \quad (61.5)$$

para todas las substancias y cualesquiera que sean las frecuencias*. En cambio, el signo de las partes reales de ϵ y μ (cuando $\omega \neq 0$) no viene limitado por ninguna condición física, de modo que ϵ' y μ' pueden ser tanto positivas como negativas.

* Estrictamente hablando, esta afirmación se refiere a cuerpos que se encuentran en estado de equilibrio termodinámico (en ausencia de campo variable), lo que aquí damos por supuesto. Si el cuerpo no se encuentra ya de suyo en equilibrio térmico, Q podría, en principio, ser negativo. La segunda ley de la termodinámica exige solamente el crecimiento total de la entropía, tanto bajo la influencia del campo electromagnético variable, como del desequilibrio termodinámico, que nada tiene que ver con la existencia de dicho campo. Un ejemplo en principio posible de un tal cuerpo puede ser una substancia en la que todos los átomos se han llevado artificialmente a estados excitados (es decir, no bajo la influencia de la excitación térmica espontánea).

Cualquier proceso no estacionario en la materia real es siempre, en mayor o menor grado, termodinámico irreversible. Por ello, las pérdidas eléctricas y magnéticas en un campo electromagnético variable existen siempre, aunque pueden ser muy pequeñas. En otras palabras, las funciones $\epsilon''(\omega)$ y $\mu''(\omega)$ no se anulan rigurosamente para ningún valor de la frecuencia diferente de cero. Veremos en el párrafo siguiente que esta afirmación es de fundamental importancia, aunque en cierta medida no se excluye la posibilidad de que existan intervalos de frecuencia tales en los que aquellas pérdidas pasan a ser relativamente muy pequeñas.

Las regiones de frecuencias en las que ϵ'' y μ'' son muy pequeñas (comparadas con ϵ' y μ') se llaman *regiones de transparencia* de la substancia. Prescindiendo de la absorción, en estas regiones es posible introducir el concepto de energía interna del cuerpo en un campo electromagnético con el mismo sentido que posee en el caso de un campo constante.

Para definir esta magnitud no basta considerar un campo puramente monocromático, puesto que, debido a su rigurosa periodicidad, en él no se produce ninguna acumulación sistemática de energía electromagnética. Por esto consideraremos un campo representado por un conjunto de componentes monocromáticas con frecuencias contenidas en un estrecho intervalo en torno de un cierto valor medio ω_0 . Las intensidades de este campo se pueden escribir en la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (61.6)$$

donde $\mathbf{E}_0(t)$, $\mathbf{H}_0(t)$ son funciones del tiempo que varían lentamente (comparadas con el factor $e^{-i\omega_0 t}$). Las partes reales de estas expresiones deben substituirse en el segundo miembro de (61.2), hecho lo cual se efectúa el cálculo del valor medio respecto del tiempo correspondiente al período $2\pi/\omega_0$, que es pequeño frente al tiempo de variación de los factores \mathbf{E}_0 y \mathbf{H}_0 .

El primer término en (61.2), después de pasar a la representación compleja de \mathbf{E} , toma la forma

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{D}}^*)/4\pi,$$

(y análogamente para el segundo término). Los productos $\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}$ y $\mathbf{E}^* \cdot \dot{\mathbf{D}}^*$ desaparecen al efectuar el promedio indicado respecto del tiempo y, en consecuencia, no tenemos por qué considerarlos. De esta manera queda solamente

$$\frac{1}{16\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (61.7)$$

Escribamos la derivada $\partial \mathbf{D} / \partial t$ en la forma $\hat{f} \mathbf{E}$, donde \hat{f} designa el operador

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \hat{\epsilon}$$

y veamos a qué resultado lleva la aplicación del mismo a una función del tipo (61.6). Si \mathbf{E}_0 fuese constante, tendríamos simplemente

$$\hat{f} \mathbf{E} = f(\omega) \mathbf{E},$$

donde

$$f(\omega) = -i\omega\epsilon(\omega).$$

Efectuemos en nuestro caso el desarrollo de Fourier de la función $E_0(t)$, representándola como superposición de componentes de la forma $E_{0\alpha}e^{-i\alpha t}$ con valores $E_{0\alpha}$ constantes. Que la variación de $E_0(t)$ sea lenta significa que en este desarrollo intervienen solamente las componentes con $\alpha \ll \omega_0$. Teniendo esto en cuenta, escribiremos

$$\begin{aligned} fE_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} &= f(\alpha + \omega_0)E_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} \\ &\cong f(\omega_0)E_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} + \alpha \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} E_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}. \end{aligned}$$

Sumando ahora las componentes de Fourier, obtendremos

$$fE_0(t)e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0)E_0e^{-i\omega_0 t} + i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \frac{\partial E_0}{\partial t} e^{-i\omega_0 t}.$$

Prescindiendo en lo que sigue del subíndice 0 en ω_0 , se tendrá así

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -i\omega\epsilon(\omega)E + \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \frac{\partial E_0}{\partial t} e^{-i\omega t}. \quad (61.8)$$

Substituyendo esta expresión en (61.7) y recordando que prescindimos de la parte imaginaria de la función $\epsilon(\omega)$, quedará

$$\frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \left(E_0^* \cdot \frac{\partial E_0}{\partial t} + E_0 \cdot \frac{\partial E_0^*}{\partial t} \right) = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (E \cdot E^*)$$

(el producto $E_0 \cdot E_0^*$ coincide con $E \cdot E^*$). Sumando la expresión análoga correspondiente al campo magnético, llegamos a la conclusión de que la velocidad de la variación sistemática de la energía de 1 cm³ del medio viene dada por la derivada $d\bar{U}/dt$, donde

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} E \cdot E^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} H \cdot H^* \right]. \quad (61.9)$$

Mediante las expresiones reales de E y H , esta igualdad se escribe en la forma

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \overline{E^2} + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \overline{H^2} \right]. \quad (61.10)$$

Éste es precisamente el resultado buscado: \bar{U} es el valor medio de la parte electromagnética de la energía interna de la unidad de volumen del medio transparente. Cuando no existe dispersión, ϵ y μ son constantes y (61.10) se transforma, como debía ser, en el valor medio de la expresión (61.3).

Si cesa la aportación de energía electromagnética al cuerpo desde el exterior, la absorción que de hecho existe siempre, aunque sea muy pequeña, lleva en defi-

nitiva a la transformación de toda la energía \bar{U} en calor. Dado que, según la ley de crecimiento de la entropía, este calor debe ser liberado, y no absorbido, ha de tenerse $\bar{U} > 0$. Según la fórmula (61.9) para ello deben cumplirse las desigualdades

$$d(\omega\epsilon)/d\omega > 0, d(\omega\mu)/d\omega > 0$$

En realidad, estas condiciones se cumplen automáticamente como consecuencia de desigualdades todavía más restrictivas a las que siempre satisfacen las funciones $\epsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$ en las regiones de transparencia. (Véase § 64)*.

Tiene considerable interés la determinación del valor medio (respecto del tiempo) del tensor de tensiones, que da las fuerzas que actúan sobre la materia en un campo electromagnético variable. Este problema tiene sentido tanto para un medio no absorbente como para un medio absorbente, en contraste con el problema de la energía interna, que sólo se puede formular cuando se prescinde de la absorción. Sin embargo, no se han hallado todavía las correspondientes fórmulas.

§ 62. Relación entre las partes real e imaginaria de $\epsilon(\omega)$

La función $f(\tau)$ en (58.3) es finita para valores cualesquiera de su argumento, en particular también para $\tau = 0$ ** . En los dieléctricos esta función tiende a cero cuando $\tau \rightarrow \infty$. Esta circunstancia expresa simplemente el hecho de que sobre el valor de $\mathbf{D}(t)$ en un instante dado no pueden influir de modo apreciable los valores de $\mathbf{E}(t)$ en instantes remotos. El mecanismo físico que se encuentra en la base de una dependencia integral de la forma (58.3) consiste en los procesos que dan lugar al establecimiento de la polarización eléctrica. Por ello, el intervalo de valores en el cual la función $f(\tau)$ difiere sensiblemente de cero es del orden de magnitud de los tiempos de relajación que caracterizan la velocidad de dichos procesos.

Lo que acabamos de decir vale también para los metales, con la única diferencia de que no es la propia función $f(\tau)$ la que tiende a cero para $\tau \rightarrow \infty$, sino la función $f(\tau) - 4\pi\sigma$. Este distinto comportamiento se debe a que el mero paso de una corriente estacionaria de conducción, si bien no lleva a ninguna variación real del estado físico del metal, con todo, en nuestras ecuaciones equivale formalmente a la aparición del desplazamiento eléctrico de acuerdo con $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma \mathbf{E}}{c}$ o bien

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^t 4\pi\sigma \mathbf{E}(\tau) d\tau = 4\pi\sigma \int_0^{\infty} \mathbf{E}(t - \tau) d\tau.$$

* Tomando la semisuma de las desigualdades (64.1) y (64.2) se encuentra que la derivada $d(\omega\epsilon)/d\omega$ no sólo es positiva, sino incluso mayor que la unidad.

** Precisamente con este fin, en la dependencia integral (58.3) se ha separado el término $\mathbf{E}(t)$; de no haberlo hecho, la función $f(\tau)$ tendría para $\tau = 0$ una singularidad del tipo de la función- δ .

Hemos definido la función $\epsilon(\omega)$ por

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\tau) d\tau. \quad (62.1)$$

Para esta función resulta posible obtener algunas relaciones generales muy importantes utilizando el formalismo matemático de la teoría de funciones de variable compleja. Para esto consideraremos ω como una variable compleja ($\omega = \omega' + i\omega''$) y determinaremos las propiedades de la función $\epsilon(\omega)$ en el semiplano superior de esta variable. De la definición (62.1) y de las propiedades de la función $f(\tau)$ indicadas más arriba se sigue que, en todo el semiplano superior, $\epsilon(\omega)$ es una función uniforme que en dicho semiplano carece de puntos singulares. En efecto, para $\omega'' > 0$, en el integrando de la fórmula (62.1) se tiene un factor que decrece exponencialmente $e^{-\omega''\tau}$ y dado que también la función $f(\tau)$ es finita en todo el intervalo de integración, la integral converge. La función $\epsilon(\omega)$ tampoco tiene singularidades sobre el propio eje real ($\omega'' = 0$) con excepción, quizá, del origen de coordenadas (en los metales $\epsilon(\omega)$ presenta en este punto un polo simple)*.

Es útil hacer notar el hecho de que la conclusión de que no existen puntos singulares de la función $\epsilon(\omega)$ en el semiplano superior es consecuencia, desde el punto de vista físico, del principio de causalidad. Este último se manifiesta en que la integración en (58.3) se lleva a cabo solamente para tiempos anteriores al instante dado t , como resultado de lo cual en la fórmula (62.1) el intervalo de integración se extiende precisamente desde 0 a ∞ (y no desde $-\infty$ a $+\infty$).

De la definición (62.1) resulta además, evidentemente, que

$$\epsilon(-\omega^*) = \epsilon^*(\omega). \quad (62.2)$$

Ésta es la generalización de la igualdad (58.7) que se refería a valores reales de ω . En particular, para valores puramente imaginarios de ω tenemos $\epsilon(i\omega'') = \epsilon^*(i\omega'')$, es decir, sobre el eje imaginario la función $\epsilon(\omega)$ es real:

$$\text{Im } \epsilon = 0 \quad \text{para } \omega = i\omega''. \quad (62.3)$$

Hay que subrayar que la propiedad (62.2) expresa simplemente el hecho de que la relación $\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}$ debe hacer que \mathbf{D} sea real cuando \mathbf{E} lo es. Si la función $\mathbf{E}(t)$ viene dada por la expresión real

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t}, \quad (62.4)$$

* En cambio, en el semiplano inferior la definición (62.1) no es aplicable, puesto que la integral diverge. Por ello, la función $\epsilon(\omega)$ en el semiplano inferior puede definirse solamente como prolongación analítica de la fórmula (62.1) a partir del semiplano superior. En este dominio la función $\epsilon(\omega)$ posee, en general, puntos singulares.

La función $\epsilon(\omega)$ en el semiplano superior no sólo tiene un sentido matemático formal, sino también físico: permite determinar la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} para campos de amplitud creciente (como $e^{\omega''t}$). Por el contrario, en el semiplano inferior esta interpretación física resulta imposible, si más no por el hecho de que la existencia de un campo amortiguado (como $e^{-|\omega''|t}$) presupone un valor infinito para $t \rightarrow -\infty$.

aplicando el operador \hat{e} a cada uno de los dos términos, obtendremos:

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \epsilon(-\omega^*)\mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t},$$

y la condición de que esta magnitud sea real coincide con (62.2).

Según los resultados del § 61, la parte imaginaria de $\epsilon(\omega)$ es positiva para valores $\omega = \omega'$ reales y positivos, es decir, sobre el semieje real positivo. Dado que, de acuerdo con (62.2), $\text{Im } \epsilon(-\omega') = -\text{Im } \epsilon(\omega')$, sobre el semieje real negativo la parte imaginaria de $\epsilon(\omega)$ es negativa. De esta manera,

$$\text{Im } \epsilon \geq 0 \text{ para } \omega = \omega' \geq 0. \quad (62.5)$$

En el punto $\omega = 0$ la función $\text{Im } \epsilon$ cambia de signo, bien sea anulándose (en los dieléctricos), bien sea pasando por el infinito (en los metales). Éste es el único punto sobre el eje real en que $\text{Im } \epsilon(\omega)$ puede anularse.

Cuando ω tiende a infinito siguiendo un camino arbitrario (en el semiplano superior), la función $\epsilon(\omega)$ tiende a la unidad. Señalamos ya esta circunstancia en el § 59 para el caso en que $\omega \rightarrow \infty$ a lo largo del eje real. En el caso general esto puede verse en la propia fórmula (62.1): si $\omega \rightarrow \infty$ de modo que $\omega'' \rightarrow \infty$, la integral en (62.1) tiende a cero gracias a la presencia en el integrando del factor $e^{-\omega''\tau}$; pero si ω'' se conserva finito, mientras que $|\omega'| \rightarrow \infty$, la tendencia de la integral a cero tiene lugar debido a la presencia del factor oscilante $e^{i\omega'\tau}$.

Las propiedades enumeradas de la función $\epsilon(\omega)$ bastan para demostrar el siguiente teorema: la función $\epsilon(\omega)$ no toma valores reales en ningún punto del semiplano superior a distancia finita, con la única excepción de los puntos del eje imaginario; sobre éste, $\epsilon(\omega)$ decrece con monotonía desde el valor $\epsilon_0 > 1$ (en los dieléctricos) o desde $+\infty$ (en los metales) para $\omega = i0$ hasta 1 para $\omega = i\infty$. De aquí se sigue, en particular, que la función $\epsilon(\omega)$ carece de ceros en el semiplano superior.

No nos detendremos aquí a probar este teorema porque coincide con un teorema general relativo a la «susceptibilidad generalizada» (y las propiedades de $\epsilon(\omega)$ que acabamos de citar presentan una analogía similar)*. Por la misma razón, la función $\epsilon(\omega)$ satisface las relaciones generales entre las partes real e imaginaria de la susceptibilidad generalizada. Repetiremos aquí la deducción de estas relaciones a fin de poner de relieve ciertas diferencias entre los dieléctricos y los metales.

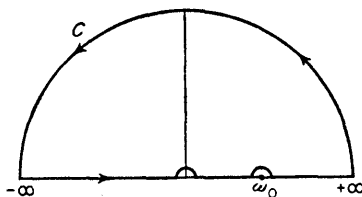


FIG. 29

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 125. La susceptibilidad generalizada $\alpha(\omega)$ que allí se introduce corresponde a $\epsilon(\omega) - 1$, que se anula cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Para ello elijamos un valor real cualquiera $\omega = \omega_0$ e integremos la expresión $(\epsilon - 1)/(\omega - \omega_0)$ a lo largo del contorno representado en la figura 29. Este contorno sigue el eje real, rodeando por arriba el punto $\omega = \omega_0 > 0$ y también el punto $\omega = 0$, si este último es (como en los metales) un polo de la función $\epsilon(\omega)$. El contorno se cierra por una semicircunferencia infinitamente alejada. En el infinito $\epsilon \rightarrow 1$, por lo que la función $(\epsilon - 1)/(\omega - \omega_0)$ tiende a cero más rápidamente que $1/\omega$. En consecuencia, la integral

$$\int_C \frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (62.6)$$

es convergente; pero dado que $\epsilon(\omega)$ carece de puntos singulares en el semiplano superior, mientras que el punto $\omega = \omega_0$ ha sido excluido del dominio de integración, la función $(\epsilon - 1)/(\omega - \omega_0)$ es analítica en toda la región interior al contorno C y aquella integral es igual a cero.

La integral a lo largo de la semicircunferencia infinitamente alejada se anula sin más. En cuanto al punto ω_0 , éste se evita siguiendo una semicircunferencia infinitesimal de radio $\rho \rightarrow 0$. El rodeo se efectúa en el sentido de las agujas de un reloj y proporciona una contribución a la integral igual a $-i\pi[\epsilon(\omega_0) - 1]$. Si se trata de la función $\epsilon(\omega)$ correspondiente a un dieléctrico, el desvío cerca del origen de coordenadas es innecesario y la integración a lo largo de todo el eje real da, de esta manera,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\rho + \omega_0} \frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\rho + \omega_0}^{\infty} \frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \right\} - i\pi[\epsilon(\omega_0) - 1] = 0.$$

El primer término es la integral desde $-\infty$ a $+\infty$ entendida en el sentido de valor principal. Poniendo de manifiesto esta circunstancia, como se suele hacer, anteponiendo la letra P al símbolo de integral, tenemos

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega - i\pi[\epsilon(\omega_0) - 1] = 0. \quad (62.7)$$

La variable de integración ω toma aquí solamente valores reales. Designémosla por la letra x , mientras que designamos por ω el valor real dado ω_0 ; escribamos también la función $\epsilon(\omega)$ de la variable real ω , al igual que en el § 58, en la forma $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$. Separando en (62.7) las partes real e imaginaria, encontramos finalmente las dos fórmulas siguientes:

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx, \quad (62.8)$$

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx. \quad (62.9)$$

Los primeros en hallarlas fueron H. A. Kramers y R. de L. Kronig (1927). Hay que recalcar que la única propiedad esencial de la función $\epsilon(\omega)$ utilizada en la deducción de estas fórmulas es la ausencia de puntos singulares en el semiplano superior*. Cabe decir por esto que las fórmulas de Kramers-Kronig (como también la propiedad indicada de $\epsilon(\omega)$) son consecuencia directa del principio físico de causalidad.

Valiéndonos de que $\epsilon''(x)$ es una función impar, (62.8) puede también escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\epsilon'(\omega) - 1 &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x + \omega} dx \\ &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx.\end{aligned}\quad (62.10)$$

Si se trata de un metal, la función $\epsilon(\omega)$ presenta un polo en el punto $\omega = 0$, cerca del cual $\epsilon = 4\pi\sigma i/\omega$ (58.9). Rodear este polo a lo largo de una semicircunferencia da en la integral un término real complementario $-(4\pi\sigma/\omega_0)\pi$ que debe añadirse al segundo miembro de la igualdad (62.7). En consecuencia, este mismo término aparece también en la fórmula (62.9):

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx + \frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad (62.11)$$

las fórmulas (62.8) y (62.10), en cambio, no varían. Además, acerca del caso de los metales hay que hacer aún la siguiente observación. Al final del § 58 se señaló que en los metales pueden existir intervalos de frecuencias en los que la función $\epsilon(\omega)$ pierde su significado físico debido a los efectos de heterogeneidad espacial del campo. En las fórmulas consideradas aquí, en cambio, la integración debe extenderse a todas las frecuencias. En tales casos hay que entender por $\epsilon(\omega)$, en los correspondientes dominios de frecuencia, la función que se obtiene como resultado de resolver formalmente el problema del comportamiento del cuerpo en un campo eléctrico ficticio periódico y espacialmente homogéneo (y no en el campo, necesariamente no homogéneo, de la onda electromagnética).

La fórmula (62.10) es particularmente importante. Nos ofrece la posibilidad de calcular la función $\epsilon'(\omega)$ si se conoce, aunque sólo sea aproximadamente (por ejemplo, por vía experimental), la función $\epsilon''(\omega)$ para el cuerpo dado. Es esencial para ello que, cualquiera que sea la función $\epsilon''(\omega)$ que satisfaga la condición físicamente necesaria $\epsilon'' > 0$ para $\omega > 0$, la fórmula (62.10) dé una función $\epsilon'(\omega)$ que no contradiga ninguna de las condiciones físicas necesarias, es decir, una función que

* En lo que concierne a la propiedad $\epsilon \rightarrow 1$ para $\omega \rightarrow \infty$, ésta carece de importancia: si el límite $\epsilon(\infty)$ fuese diferente de 1, sería necesario simplemente considerar $\epsilon - \epsilon(\infty)$ en vez de la diferencia $\epsilon - 1$, con la correspondiente modificación evidente de las fórmulas (62.8) y (62.9).

sea en principio posible (el signo de ϵ' no viene limitado por ninguna condición física general). Esta circunstancia permite también utilizar la fórmula (62.10) incluso para una función $\epsilon''(\omega)$ aproximada. Por el contrario, la fórmula (62.9) no da (en el caso general de una función $\epsilon'(\omega)$ arbitraria) una función $\epsilon''(\omega)$ físicamente posible, ya que no permite asegurar de manera automática el que esta última sea positiva.

En la teoría de la dispersión se suele escribir la expresión de $\epsilon'(\omega)$ en la forma

$$\epsilon'(\omega) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{m} P \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2} dx, \quad (62.12)$$

donde e , m son la carga y la masa del electrón y $f(\omega) d\omega$ recibe el nombre de *fuerza de los osciladores* (o «número de electrones de dispersión») en el intervalo de frecuencia $d\omega$. Según (62.10) esta magnitud está ligada con $\epsilon''(\omega)$ por

$$f(\omega) = \frac{m}{2\pi^2 e^2} \omega \epsilon''(\omega). \quad (62.13)$$

En los metales $f(\omega)$ tiende a un límite finito cuando $\omega \rightarrow 0$.

Para valores suficientemente grandes de ω , en el integrando de (62.10) puede prescindirse de x^2 frente a ω^2 . Entonces

$$\epsilon'(\omega) - 1 = -\frac{2}{\pi \omega^2} \int_0^{\infty} x \epsilon''(x) dx.$$

Por otra parte, para la constante dieléctrica correspondiente a altas frecuencias tenemos la fórmula (59.1). La comparación de ambas expresiones conduce a la fórmula

$$\frac{m}{2\pi^2 e^2} \int_0^{\infty} \omega \epsilon''(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega = N, \quad (62.14)$$

donde N es el número total de electrones por unidad de volumen de materia.

Si $\epsilon''(\omega)$ no es singular en $\omega = 0$, es posible pasar al límite $\omega \rightarrow 0$ en la fórmula (62.10), con lo que se obtiene

$$\epsilon'(0) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x} dx. \quad (62.15)$$

Pero si el punto $\omega = 0$ es singular para la función $\epsilon''(\omega)$ (como en los metales), el límite a que tiende la integral (62.10) cuando $\omega \rightarrow 0$ no coincide con el valor que se obtiene suprimiendo simplemente ω en ella. Para calcular dicho límite es necesario substituir previamente en el integrando la expresión $\epsilon''(x)$ por

$$\epsilon''(x) - 4\pi\sigma/x;$$

esta substitución no altera el valor de la integral, ya que se tiene idénticamente

$$P \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \omega^2} \equiv 0.$$

Para los dieléctricos, la fórmula (62.15) puede escribirse también en la forma

$$\epsilon_0 - 1 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \overline{\omega^{-2}}, \quad (62.16)$$

donde el trazo horizontal indica el promedio según el «número de osciladores»:

$$\overline{\omega^{-2}} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega^2} d\omega.$$

Esta expresión puede ser útil para diversas estimaciones de las cantidades ϵ_0 .

La fórmula que sigue* expresa los valores de $\epsilon(\omega)$ sobre el semieje imaginario positivo en función de los valores de $\epsilon''(\omega)$ sobre el eje real:

$$\epsilon(i\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\epsilon''(x)}{x^2 + \omega^2} dx. \quad (62.17)$$

Si se integran ambos miembros de esta igualdad respecto de $d\omega$, se obtiene

$$\int_0^{\infty} [\epsilon(i\omega) - 1] d\omega = \int_0^{\infty} \epsilon''(\omega) d\omega. \quad (62.18)$$

Todos los resultados que acabamos de presentar (con sólo pequeños cambios de forma) son también aplicables a la permeabilidad $\mu(\omega)$. La diferencia se debe ante todo a que, al aumentar la frecuencia, la función $\mu(\omega)$ pierde su significado físico relativamente pronto. En consecuencia, para aplicar, por ejemplo, las fórmulas de Kramers-Kronig a $\mu(\omega)$ hay que proceder como sigue. En vez de un intervalo infinito de valores de ω , consideramos un intervalo finito (de 0 a ω_1) que se extiende hasta aquellas frecuencias para las que μ tiene todavía sentido, a pesar de que ya deja de ser variable, de modo que su parte imaginaria puede considerarse como igual a cero; el correspondiente valor real $\mu(\omega_1)$ lo designaremos por μ_1 . Entonces la fórmula (62.10) puede escribirse en la forma

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\omega_1} \frac{x\mu''(x)}{x^2 - \omega^2} dx. \quad (62.19)$$

En contraste con ϵ_0 , el valor $\mu_0 = \mu(0)$ lo mismo puede ser mayor que menor que 1.

* Véase vol. V, *Física estadística*, ec. (125.19).

En cuanto a la variación de $\mu(\omega)$, a lo largo del eje imaginario, ésta es monótona decreciente como antes, si bien ahora de μ_0 a $\mu_1 < \mu_0$.

§ 63. Onda monocromática plana

Las ecuaciones (58.2) para un campo monocromático se escriben:

$$i\omega\mu(\omega)\mathbf{H} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E} = -c \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (63.1)$$

Estas ecuaciones constituyen por sí solas un sistema completo, puesto que las ecuaciones (58.1) se siguen de ellas automáticamente y, por consiguiente, no es necesario considerarlas separadamente. Suponiendo que el medio es homogéneo y eliminando de estas ecuaciones \mathbf{H} (o \mathbf{E}) obtendremos la ecuación de segundo orden

$$\Delta \mathbf{E} + \epsilon\mu(\omega^2/c^2)\mathbf{E} = 0 \quad (63.2)$$

(y la misma ecuación para \mathbf{H}).

Consideremos una onda electromagnética plana que se propaga en un medio homogéneo ilimitado. En una onda plana en el vacío la dependencia del campo respecto de las coordenadas viene dada por un factor de la forma $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ con un vector de onda \mathbf{k} real. Ahora bien, al considerar la propagación de las ondas en los medios materiales en general, resulta necesario introducir también valores complejos:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'',$$

donde \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' son vectores reales.

Suponiendo \mathbf{E} y \mathbf{H} proporcionales a $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ y efectuando en las ecuaciones (63.1) la derivación respecto de las coordenadas, obtendremos

$$\omega\mu\mathbf{H} = c\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \omega\epsilon\mathbf{E} = -c\mathbf{k} \times \mathbf{H}. \quad (63.3)$$

Eliminando entre estas dos relaciones \mathbf{E} o \mathbf{H} , se encuentra la siguiente expresión para el cuadrado del «vector de onda»:

$$k^2 \equiv k'^2 - k''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = \epsilon\mu\omega^2/c^2. \quad (63.4)$$

Vemos que \mathbf{k} puede ser real sólo si ϵ y μ son reales y positivos. Pero incluso en este caso cabe que, a pesar de todo, \mathbf{k} sea complejo, con tal que $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = 0$ (encontraremos este caso al estudiar la reflexión total; véase § 66).

No hay que perder de vista que, en el caso general de \mathbf{k} complejo, la onda puede llamarse «plana» sólo en un sentido convencional. Escribiendo

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} e^{-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}},$$

se advierte que los planos perpendiculares al vector \mathbf{k}' son planos de fase constante. En cambio, los planos de amplitud constante son planos perpendiculares al vector \mathbf{k}'' en cuya dirección se produce el amortiguamiento de la onda. En lo que con-

cierte a las superficies de valor constante del propio campo, éstas no serán en general planas. Tales ondas se llaman *ondas planas no-homogéneas* para distinguirlas de las ondas planas «homogéneas».

La relación entre las componentes de los campos eléctrico y magnético viene dada en el caso general por las fórmulas (63.3). En particular, multiplicando estas fórmulas escalarmente por \mathbf{k} , obtendremos

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (63.5)$$

y elevando al cuadrado cualquiera de ellas y utilizando (63.4), se encuentra

$$\mathbf{E}^2 = \mu \mathbf{H}^2 / \epsilon. \quad (63.6)$$

Hay que recordar, sin embargo, que dado el carácter complejo de los tres vectores \mathbf{k} , \mathbf{E} y \mathbf{H} estas relaciones no tienen, en general, el mismo sentido intuitivo que poseían en el caso en que eran reales.

Sin detenernos a considerar las engorrosas relaciones que se obtienen en el caso general, examinemos los más importantes casos particulares.

Resultados especialmente simples se obtienen para una onda que se propaga sin amortiguarse en un medio homogéneo no absorbente (transparente). El vector de onda es real en este caso y su módulo vale

$$k = \sqrt{(\epsilon\mu)}\omega/c = n\omega/c, \quad (63.7)$$

donde $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ es el llamado *índice de refracción* del medio. Tanto el campo eléctrico como el magnético se encuentran en un plano perpendicular al vector \mathbf{k} (onda transversal pura), siendo perpendiculares entre sí y están ligados por la relación

$$\mathbf{H} = \sqrt{(\epsilon/\mu)} \mathbf{l} \times \mathbf{E} \quad (63.8)$$

(\mathbf{l} es el versor del vector \mathbf{k}). Se sigue de aquí que $\epsilon E^2 = \mu H^2$; esto, sin embargo, no significa que sean iguales las energías eléctrica y magnética en la onda (como en ausencia de dispersión), puesto que estas últimas vienen dadas por otras expresiones (los dos términos en la fórmula (61.10)).

La velocidad u de propagación de la onda en el medio viene determinada por la conocida expresión de la velocidad de grupo*:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}. \quad (63.9)$$

Es fácil comprobar que la velocidad

$$u = \bar{S}/\bar{U}, \quad (63.10)$$

de acuerdo con su significado de velocidad de transporte de energía en un paquete

* Cuando existe absorción apreciable, es del todo imposible introducir el concepto de velocidad de grupo, puesto que en un medio absorbente los paquetes de onda no se propagan, sino que experimentan una rápida «difuminación».

de ondas; \bar{U} es aquí la densidad de energía dada por (61.9), y

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (63.11)$$

es el valor medio del vector de Poynting. En ausencia de dispersión, cuando el índice de refracción no depende de la frecuencia, las expresiones (63.9) se reducen simplemente a c/n (cf. (56.13)).

Consideremos ahora el caso, más general, de propagación de una onda electromagnética en un medio absorbente en la que el vector de onda tiene una dirección determinada, es decir \mathbf{k}' y \mathbf{k}'' son paralelos entre sí. Dicha onda es plana en el sentido literal de la palabra, ya que las superficies en que los valores del campo son constantes resultan ser planos perpendiculares a la dirección de propagación (*onda plana homogénea*).

En este caso puede introducirse la «longitud» k del vector de onda definida por $\mathbf{k} = k\mathbf{l}$ (donde \mathbf{l} es el versor de los vectores \mathbf{k}' y \mathbf{k}'') y de (63.4) se sigue $k = \sqrt{\epsilon\mu} \omega/c$. La cantidad compleja $\sqrt{\epsilon\mu}$ se escribe a menudo en la forma $n + i\kappa$, con n y κ reales, de modo que

$$k = \sqrt{(\epsilon\mu)\omega/c} = (n + i\kappa)\omega/c. \quad (63.12)$$

La magnitud n se llama *índice de refracción*, y κ , *coeficiente de absorción* del medio; este último coeficiente determina la rapidez de amortiguamiento de la onda a medida que se propaga. Subrayaremos, sin embargo, que el amortiguamiento de la onda no está necesariamente ligado con la existencia de una verdadera absorción; la disipación de energía tiene lugar solamente cuando ϵ y μ son complejos, mientras que el coeficiente κ es diferente de cero para ϵ y μ reales y de signos opuestos.

Expresemos las magnitudes n y κ en función de las partes real e imaginaria de la constante dieléctrica, suponiendo que $\mu = 1$. De la igualdad $n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa = \epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ se deduce $n^2 - \kappa^2 = \epsilon'$, $2n\kappa = \epsilon''$. Resolviendo estas ecuaciones respecto de n y κ , obtendremos*

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{1}{2}[\epsilon' + \sqrt{(\epsilon'^2 + \epsilon''^2)}]}, \\ \kappa &= \sqrt{\frac{1}{2}[-\epsilon' + \sqrt{(\epsilon'^2 + \epsilon''^2)}]}. \end{aligned} \quad (63.13)$$

En particular, para los metales y en la región de frecuencias en la que es válida la fórmula (58.9), la parte imaginaria de ϵ es grande comparada con la parte real y está ligada con la conductibilidad por $\epsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$; prescindiendo de ϵ' frente a ϵ'' , se encuentra que n y κ coinciden y son iguales a:

$$n = \kappa = \sqrt{(2\pi\sigma/\omega)}. \quad (63.14)$$

* Dado que $\epsilon'' > 0$, los signos de n y κ deben ser idénticos, de acuerdo con el hecho de que la onda se amortigua en el sentido en que se propaga. La elección en (63.13) de signos positivos corresponde a una onda que se propaga en el sentido del eje x .

Para la relación entre los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en la onda plana homogénea considerada se obtiene de nuevo la fórmula (63.8), pero sólo con ϵ y μ complejos. Una vez más, dicha fórmula muestra que ambos campos son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda. Si $\mu = 1$, escribiendo $\sqrt{\epsilon}$ en la forma

$$\sqrt{\epsilon} = \sqrt{(n^2 + \kappa^2)} \exp[i \operatorname{arctg} (\kappa/n)],$$

vemos que el campo magnético supera en módulo al campo eléctrico en el factor $\sqrt{n^2 + \kappa^2}$, mientras que la fase viene retrasada respecto de la de éste en el ángulo $\operatorname{arctg} (\kappa/n)$; en particular, el desplazamiento de fase en el caso (63.14) es igual a $\pi/4$.

PROBLEMA

En un instante dado ($t = 0$) en cierta región del espacio se tiene una perturbación electromagnética. No siendo mantenida por fuentes, esta perturbación se amortiguará con el tiempo. Hallar las condiciones que determinan el correspondiente decremento.

Solución. Desarrollemos la perturbación inicial en integral de Fourier respecto de las coordenadas y consideremos una componente cualquiera con vector de onda \mathbf{k} (vector real!). Su dependencia respecto del tiempo viene dada (para un valor de t suficientemente grande) por el factor $e^{-i\omega t}$ con una «frecuencia» compleja ω que hay que determinar; el coeficiente de amortiguamiento es $-\operatorname{Im} \omega$.

De las ecuaciones

$$-\dot{\mathbf{H}}/c = \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \dot{\mathbf{D}}/c = \operatorname{rot} \mathbf{H} = i\mathbf{k} \times \mathbf{H}$$

se tiene, eliminando \mathbf{H} ,

$$\ddot{\mathbf{D}}/c^2 = \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}).$$

Tomemos como eje x el determinado por \mathbf{k} . Para la parte «longitudinal» de la perturbación se sigue de aquí que $\ddot{D}_x = 0$ y también, por lo tanto, $D_x = 0$.

Por otra parte, la relación entre D_x y E_x se establece mediante un operador integral de la forma

$$E_x(t) = \epsilon^{-1} D_x = \int_{-\infty}^t F(t-\tau) D_x(\tau) d\tau \quad (2)$$

(véase § 58). Dado que en el presente caso $D_x(\tau) = 0$ cuando $\tau > 0$, se tendrá

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^0 F(t-\tau) D_x(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Está claro por esto que para valores de t grandes la dependencia temporal de E_x viene determinada fundamentalmente por la dependencia de la función $F(t)$ respecto del tiempo.

Si se trata de un campo monocromático, se tiene, en virtud de (2),

$$\frac{1}{\epsilon(\omega)} = \int_0^{\infty} F(x) e^{i\omega x} dx,$$

y, recíprocamente,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Para estimar esta integral, supuesto que los valores de t sean grandes, desplazaremos el camino de integración hacia el semiplano inferior de ω , donde el integrando disminuye rápidamente. Al hacerlo hay que evitar todos los puntos singulares de la función $1/\epsilon(\omega)$, es decir, los ceros de la función

$\epsilon(\omega)$ y sus puntos de ramificación. En definitiva, la integral será esencialmente proporcional a $e^{-i\omega_0 t}$, donde ω_0 es, de los puntos singulares indicados, el más próximo al eje real. Con esto queda resuelta la cuestión planteada acerca de la parte longitudinal de la perturbación.

Para las componentes transversales, de (1) se deduce

$$\ddot{D}_{y,z}/c^2 + k^2 E_{y,z} = 0.$$

Un análisis análogo conduce a la conclusión de que la «frecuencia» buscada ω_0 es en este caso el cero o el punto de ramificación de la función $\omega^2 \epsilon(\omega) - c^2 k^2$ más próximo al eje real.

§ 64. Medios transparentes

Aplicaremos las fórmulas generales obtenidas en el § 62 a medios débilmente absorbentes (en el intervalo de frecuencias dado), es decir, supondremos que para estas frecuencias se puede prescindir de la parte imaginaria de la permitividad.

En tal caso sobra el signo de valor principal que aparece en la fórmula (62.10), puesto que el punto $x = \omega$ desaparece de hecho del dominio de integración. En estas condiciones, la integral se puede derivar respecto del parámetro ω como una integral ordinaria que carece de singularidades en el integrando. Efectuando dicha derivación, obtendremos

$$\frac{d\epsilon}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\epsilon''(x)}{(\omega^2 - x^2)^2} dx.$$

Dado que el integrando es positivo a lo largo de todo el intervalo de integración, llegamos a la conclusión de que

$$d\epsilon(\omega)/d\omega > 0, \quad (64.1)$$

es decir, en un dominio en que no existe absorción, la permitividad es función monótona creciente de la frecuencia.

De manera análoga, en el mismo intervalo de frecuencias se obtiene todavía una desigualdad más:

$$\frac{d}{d\omega}[\omega^2(\epsilon - 1)] = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^3 \epsilon''(x)}{(x^2 - \omega^2)^2} dx > 0,$$

o bien

$$d\epsilon/d\omega > 2(1 - \epsilon)/\omega. \quad (64.2)$$

Si $\epsilon < 1$, esta desigualdad es más restrictiva que la (64.1).

Obsérvese que las desigualdades (64.1) y (64.2) (y las análogas para $\mu(\omega)$) garantizan automáticamente que se cumpla la desigualdad $u < c$ para la velocidad de propagación de las ondas. Así, cuando $\mu = 1$ se tiene $n = \sqrt{\epsilon}$ e introduciendo n en vez de ϵ en (64.1) y (64.2), se obtendrá

$$d(n\omega)/d\omega > n, \quad d(n\omega)/d\omega > 1/n. \quad (64.3)$$

En consecuencia, para la velocidad u (63.9) se obtienen dos desigualdades: $u < c/n$ y $u < cn$, de donde se sigue evidentemente que $u < c$ tanto para $n > 1$ como para $n < 1$. Estas desigualdades demuestran también que $u > 0$, es decir, la velocidad de grupo está dirigida en el mismo sentido que el vector de onda. Esta propiedad es completamente natural, aunque desde un punto de vista puramente lógico no tendría por qué darse necesariamente.

Supongamos que el dominio de absorción débil se extiende a lo largo de un amplio intervalo de frecuencias, desde ω_1 a ω_2 (siendo $\omega_2 \gg \omega_1$), y consideremos aquellas frecuencias ω tales que $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. El dominio de integración en (62.10) se descompone en dos partes: $x < \omega_1$ y $x > \omega_2$. En la primera de ellas se puede prescindir en el denominador del integrando de x frente a ω , y en el segundo, de ω frente a x :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} \epsilon''(x) \frac{dx}{x} - \frac{2}{\pi \omega^2} \int_0^{\omega_1} x \epsilon''(x) dx, \quad (64.4)$$

es decir, en el intervalo considerado la función $\epsilon(\omega)$ tiene la forma $a - b/\omega^2$, donde a y b son constantes positivas. La segunda de ellas se puede expresar en función del «número de electrones de dispersión» N_1 , que son los responsables de la absorción en el intervalo desde 0 hasta ω_1 (véase (62.14)) y entonces

$$\epsilon(\omega) = a - 4\pi N_1 e^2 / m \omega^2. \quad (64.5)$$

De esta expresión se sigue, en particular, que en un intervalo suficientemente amplio de absorción débil, la permitividad, en general, pasa por el valor cero. Recordemos en relación con esto que, en el sentido literal de la palabra, es transparente un medio en el que $\epsilon(\omega)$ no sólo es real, sino también positivo; para un valor negativo de ϵ la onda se amortigua al penetrar en el medio, aunque en él no tiene lugar una verdadera disipación de energía.

Para una frecuencia en la que $\epsilon = 0$, el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} se anula idénticamente y las ecuaciones de Maxwell admiten como solución un campo eléctrico variable que satisface únicamente la condición $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, con un campo magnético igual a cero. En otras palabras, en este caso es posible que existan ondas eléctricas longitudinales. Para determinar la velocidad de su propagación es necesario tener en cuenta la dispersión de la permitividad no sólo respecto de la frecuencia, sino también respecto del vector de onda. Función de este último pasa a serlo también el valor de ω para el cual $\epsilon = 0$. Si el medio es isótropo, el primer término no nulo del desarrollo de la función escalar $\omega(\mathbf{k})$ es proporcional a k^2 :

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha k^2.$$

Por consiguiente, la velocidad de propagación

$$\mathbf{u} = \partial \omega / \partial \mathbf{k} = \alpha \mathbf{k},$$

es proporcional a la primera potencia del vector de onda.

PROBLEMA

Sobre la frontera del semiespacio $x > 0$ ocupado por un medio transparente (con $\mu = 1$), incide normalmente una onda electromagnética plana con un frente perfectamente definido. Determinar la estructura del frente de onda que penetra en el interior del medio (A. Sommerfeld y L. Brillouin, 1914).

Solución. Supongamos que la onda incide sobre el medio en el instante $t = 0$, de modo que para $x = 0$ el campo de la onda incidente (E o H) es

$$E = 0 \text{ para } t < 0, E \sim e^{-i\omega_0 t} \text{ para } t > 0.$$

Desarrollando este campo en integral de Fourier respecto del tiempo, el problema se reduce al de la incidencia de ondas de extensión infinita, cuyas frecuencias son diferentes, sobre la superficie de separación. La amplitud de la componente de Fourier de frecuencia ω es proporcional a

$$\int_0^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau.$$

Para una onda incidente de frecuencia ω , la onda que penetra en el medio tiene la forma

$$a(\omega) e^{-i\omega t + i\omega n x/c},$$

donde la amplitud $a(\omega)$ es una función lentamente variable de la frecuencia. Por ello, en este caso el campo de la onda en el medio es

$$E \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\omega a(\omega) e^{-i\omega t + i\omega n x/c} \int_0^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau.$$

En una región cercana al frente de onda, los valores de ω que representan un cierto papel en este intervalo son los próximos a ω_0 . Tomando como nueva variable $\xi = \omega - \omega_0$, substituyamos $a(\omega)$ por $a(\omega_0)$ y desarrollemos el exponente en potencias de ξ . Prescindiendo de todas las constantes y factores de fase que no son esenciales, se obtendrá

$$E \sim \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\xi\left(\tau - t + \frac{x}{u}\right) - \frac{1}{2}i\xi^2 x \frac{u'}{u^2}\right\} d\xi d\tau,$$

donde $u = u(\omega_0)$ es la velocidad de propagación (63.9) y $u' = [du/d\omega]_{\omega=\omega_0}$. Efectuando la integración respecto de ξ , es fácil reducir E a la forma siguiente:

$$E \sim \int_w^{\infty} e^{\mp i\eta^2} d\eta, \quad w = (x - ut)/\sqrt{(2x|u'|)}$$

(el signo del exponente depende del de u'). En cuanto a la intensidad de la onda cerca de su frente, su distribución se ajusta a la ley

$$I \sim \left| \int_w^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \right|^2.$$

Esta fórmula coincide formalmente con la que determina la distribución de intensidad cerca del límite de sombra en la difracción de Fresnel*. Cuando $w > 0$, la intensidad disminuye con monotonía al aumentar w , pero si $w < 0$, se producen oscilaciones, con disminución de la amplitud, en torno de un valor constante al que tiende para $w \rightarrow -\infty$ **.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 60.

** A grandes distancias por delante del frente considerado, se producen los llamados «premonitores» que se propagan con la velocidad c . Éstos corresponden a las componentes de Fourier con altas frecuencias, para las que $\epsilon \rightarrow 1$.

CAPÍTULO X

PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 65. Óptica geométrica

La condición de aplicabilidad de la óptica geométrica* supone, como es sabido, que la longitud de onda λ sea pequeña comparada con las dimensiones características del problema, l . El enlace entre la óptica geométrica y la ondulatoria se establece por el hecho de que, para $\lambda \ll l$, cualquier magnitud ϕ que describe el campo de la onda (cualquiera de las componentes de \mathbf{E} o de \mathbf{H}) se expresa por una fórmula del tipo

$$\phi = ae^{i\psi},$$

donde la amplitud a es una función lentamente variable de las coordenadas y del tiempo y la fase ψ es una cantidad grande que resulta ser función «casi lineal» de las coordenadas y del tiempo. Esta función se llama en óptica geométrica *iconal* y representa en ella un papel de gran importancia. Su derivada respecto del tiempo determina la frecuencia de la onda:

$$\partial\psi/\partial t = -\omega, \quad (65.1)$$

y las derivadas respecto de las coordenadas, el vector de onda:

$$\text{grad } \psi = \mathbf{k}, \quad (65.2)$$

y con ello la dirección de los rayos en cada punto del espacio.

Para una onda monocromática en condiciones estacionarias la frecuencia es una cantidad constante y la dependencia del iconal respecto del tiempo viene dada por un término $-\omega t$. Introduzcamos entonces en vez de ψ otra función ψ_1 (que llamaremos también iconal) mediante la igualdad

$$\psi = -\omega t + (\omega/c)\psi_1(x, y, z). \quad (65.3)$$

ψ_1 es función solamente de las coordenadas, y su gradiente es tal que

$$\text{grad } \psi_1 = \mathbf{n}, \quad (65.4)$$

donde \mathbf{n} es un vector ligado con \mathbf{k} por

$$\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}/c. \quad (65.5)$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 53.

El módulo del vector \mathbf{n} es igual al índice de refracción n del medio*. En consecuencia, la ecuación del iconal para la propagación de los rayos en un medio con índice de refracción $n(x, y, z)$, que es función dada de las coordenadas, es

$$|\text{grad } \psi_1|^2 \equiv \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)^2 = n^2. \quad (65.6)$$

La ecuación de propagación de los rayos (en condiciones estacionarias) puede obtenerse también a partir del *principio de Fermat*, según el cual para la trayectoria de un rayo entre dos puntos dados del espacio A y B , es mínima la integral $\int_A^B \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l}$, o bien, lo que es lo mismo, la integral

$$\psi_1 = \int \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l} = \int n dl.$$

Igualando a cero la variación de esta integral, tenemos

$$\delta \psi_1 = \int_A^B (\delta n dl + n \delta dl) = 0.$$

Sea $\delta \mathbf{r}$ el desplazamiento de la trayectoria del rayo en la variación. Se tiene entonces

$$\delta n = \delta \mathbf{r} \cdot \text{grad } n, \quad \delta dl = \mathbf{l} \cdot d\delta \mathbf{r},$$

donde \mathbf{l} es el vector unitario tangente al rayo. Substituyendo en $\delta \psi_1$ e integrando por partes el segundo término (teniendo en cuenta que en los puntos A y B es $\delta \mathbf{r} = 0$), obtendremos

$$\begin{aligned} \delta \psi_1 &= \int_A^B \delta \mathbf{r} \cdot \text{grad } n dl + \int_A^B n \mathbf{l} \cdot d\delta \mathbf{r} \\ &= \int_A^B \left(\text{grad } n - \frac{d(n\mathbf{l})}{dl} \right) \cdot \delta \mathbf{r} dl = 0. \end{aligned}$$

De aquí se sigue

$$d(n\mathbf{l})/dl = \text{grad } n. \quad (65.7)$$

Efectuando la derivación y haciendo $dn/dl = \mathbf{l} \cdot \nabla n$, escribiremos esta ecuación en la forma

$$\frac{d\mathbf{l}}{dl} = \frac{1}{n} [\text{grad } n - \mathbf{l}(\mathbf{l} \cdot \text{grad } n)]. \quad (65.8)$$

Ésta es precisamente la ecuación que determina la forma de los rayos.

Como es sabido por geometría diferencial, la derivada $d\mathbf{l}/dl$ a lo largo de un rayo es igual a \mathbf{N}/R , donde \mathbf{N} es el versor de la normal principal y R el radio de

* En la óptica geométrica se estudian solamente medios transparentes.

curvatura del rayo. Multiplicando los dos miembros de la ecuación (65.8) por N y teniendo en cuenta que N y l son perpendiculares entre sí, se obtendrá

$$\frac{1}{R} = N \cdot \frac{\text{grad } n}{n}; \quad (65.9)$$

el rayo se curva hacia donde aumenta el índice de refracción.

La velocidad de propagación de los rayos en la óptica geométrica está dirigida a lo largo de l y viene dada por la derivada

$$u = \partial\omega/\partial k. \quad (65.10)$$

Esta velocidad se llama también *velocidad de grupo*, y la razón ω/k , *velocidad de fase*. Sin embargo, no hay que perder de vista que esta última no corresponde a la velocidad de la propagación física real de magnitud alguna.

Es fácil escribir también la ecuación que determina el cambio de intensidad de la luz a lo largo de un rayo. La intensidad I representa el valor absoluto del valor medio del vector de Poynting respecto del tiempo. Dicho vector está dirigido, junto con la velocidad de grupo, a lo largo de l :

$$\mathbf{S} = Il.$$

En condiciones estacionarias, la densidad media de energía del campo en cada punto del espacio no cambia con el tiempo. Por consiguiente, la ecuación de conservación de la energía nos dice que $\text{div } \mathbf{S} = 0$, o bien

$$\text{div}(Il) = 0. \quad (65.11)$$

Ésta es la ecuación buscada.

Finalmente consideremos la cuestión de cómo varía a lo largo de un rayo la dirección de polarización de la luz polarizada linealmente (*S. M. Rytov*, 1938).

Como es sabido por geometría diferencial, una curva en el espacio (en este caso, un rayo) se caracteriza en cada uno de sus puntos por tres vectores unitarios perpendiculares dos a dos, a saber, el tangente l , el normal principal N y el binormal b (que constituyen el llamado *triedro natural*). En virtud del carácter transversal de las ondas electromagnéticas, el vector E (o el H) se encuentra siempre en el plano normal, o sea, el determinado por N , b .

Supongamos que en un cierto punto del rayo la dirección de E coincide con la de N , es decir, que E se encuentra en el plano tangente (plano N , l). Como es sabido, la separación de la curva respecto del plano tangente asociada con una longitud dl es un infinitésimo de orden superior (de tercer orden). Por ello es posible afirmar que, en un desplazamiento dl a lo largo del rayo, el vector E se mantiene en el plano tangente inicial. Por otra parte, el plano tangente gira respecto del antiguo un ángulo $d\phi = dl/T$, donde T es el radio de torsión de la curva. A este mismo será igual, por consiguiente, el ángulo que habrá girado el vector E respecto del vector N en el plano normal. Así pues, en un desplazamiento a lo largo del rayo, la dirección de polarización gira en el plano normal de modo que el ángulo que forma con la

normal principal varía de acuerdo con la ecuación

$$d\phi/dl = 1/T. \quad (65.12)$$

En particular, si no existe torsión, es decir, cuando el rayo es una curva plana, la dirección del vector \mathbf{E} en el plano normal se mantiene constante, lo que era evidente a priori por consideraciones de simetría.

PROBLEMA

Determinar la velocidad de propagación de la luz en un medio en movimiento (respecto del observador).

Solución. Sean ω y \mathbf{k} la frecuencia y el vector de onda de la onda luminosa en el sistema de referencia en reposo K , ω' , \mathbf{k}' estas mismas cantidades en el sistema K' que se mueve respecto del K junto con el medio material (por ejemplo, un líquido) con velocidad \mathbf{v} . En la aproximación de primer orden respecto de \mathbf{v}/c que consideramos a continuación, el movimiento en una dirección perpendicular a \mathbf{k} no se refleja en la propagación de la luz; por ello, sin limitar la generalidad, podemos suponer que las direcciones de \mathbf{v} y \mathbf{k} coinciden.

En el sistema K' el líquido se encuentra en reposo, por lo que ω' y \mathbf{k}' están ligados por la igualdad

$$ck' = \omega' n(\omega'). \quad (1)$$

Según las conocidas fórmulas de transformación relativistas*, tenemos, con una precisión que alcanza el primer orden respecto de \mathbf{v}/c ,

$$\omega' = \omega - k\mathbf{v}, \quad k' = k - \omega\mathbf{v}/c^2.$$

Substituyendo estas expresiones en (1) y desarrollando la función $n(\omega')$, obtendremos con la misma precisión

$$k = n \frac{\omega}{c} + \frac{v\omega}{c^2} \left(1 - n \frac{d(n\omega)}{d\omega} \right), \quad (2)$$

donde $n = n(\omega)$. Para la velocidad de propagación (velocidad de grupo) se sigue de aquí

$$u = u_0 + v \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2} \right) - \frac{vn\omega}{c} \frac{du_0}{d\omega}, \quad (3)$$

donde $u_0 = c[d(n\omega)/d\omega]^{-1}$ es la velocidad de propagación en el medio en reposo. En cuanto a la velocidad de fase, se tiene

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Los dos primeros términos en (3) pueden obtenerse simplemente mediante aplicación de la fórmula relativista de composición de velocidades, mientras que el tercero representa un efecto de dispersión (estudiado por H. A. Lorentz).

§ 66. Reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas

Consideremos la reflexión y la refracción de una onda electromagnética plana monocromática sobre la superficie plana de separación entre dos medios homogéneos**. La incidencia se produce a partir de un medio transparente (medio 1);

* Véase *Teoría clásica de los campos*, § 48.

** Admitimos que en ambos medios se tiene $\mu = 1$.

en cuanto al segundo medio, no supondremos por el momento que sea transparente. Designaremos las magnitudes relativas a las ondas incidente y reflejada por los índices 0 y 1, y las relativas a la onda refractada por el índice 2 (fig. 30). Como sentido positivo de la normal al plano de separación se elige el que lleva del medio 1 al medio 2 y con él haremos coincidir el del eje z .

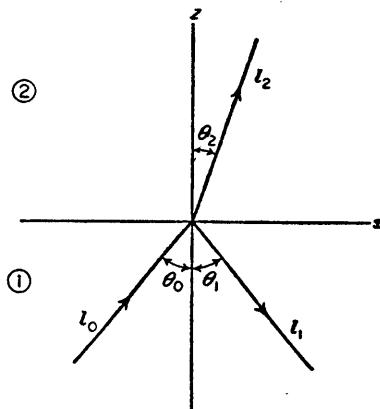


FIG. 30

Teniendo en cuenta la completa homogeneidad en el plano xy , la dependencia de la solución de las ecuaciones del campo respecto de estas coordenadas debe ser la misma en todo el espacio. Esto significa que las componentes k_x , k_y del vector de onda son las mismas para las tres ondas. De aquí se sigue, ante todo, que las direcciones de propagación de las tres ondas se encuentran en el mismo plano; elijámoslo como plano xz .

De las igualdades

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \quad (66.1)$$

se sigue para la componente z de estos vectores:

$$\begin{aligned} k_{1z} &= -k_{0z} = -(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0, \\ k_{2z} &= \sqrt{[(\omega/c)^2 \epsilon_2 - k_{0x}^2]} = (\omega/c)\sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}. \end{aligned} \quad (66.2)$$

El vector \mathbf{k}_0 , por definición, es real. Con él lo es también \mathbf{k}_1 . En cambio, la magnitud k_{2z} en el medio absorbente es compleja, debiéndose elegir el signo de la raíz de tal manera que sea $\text{Im } k_{2z} > 0$, de acuerdo con el hecho de que la onda refractada se amortigua a medida que penetra en el medio 2.

Si ambos medios son transparentes, de las igualdades (66.1) se siguen las conocidas leyes de la reflexión y de la refracción

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (66.3)$$

Para determinar la amplitud de las ondas reflejada y refractada hay que acudir a las condiciones de contorno sobre la superficie de separación ($z = 0$). Al hacerlo consideraremos por separado dos casos: cuando el campo eléctrico \mathbf{E}_0 se encuentra en el plano de incidencia y cuando es perpendicular al mismo; de esta manera consideraremos también el caso general, en el que \mathbf{E}_0 puede descomponerse en dos vectores componentes de uno y otro tipo.

Supondremos primero que \mathbf{E}_0 es perpendicular al plano de incidencia; por razones de simetría es evidente que igual ocurrirá para los campos \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 de las ondas reflejada y refractada. El vector \mathbf{H} , en cambio, se encuentra en el plano x, z . Las condiciones de contorno exigen la continuidad de $E_y = E$ y H_x ; según (63.3) $H_x = -\frac{c}{\omega} k_z E_y$.

El campo en el medio 1 es suma de los campos de las ondas incidente y reflejada; de modo que obtenemos dos ecuaciones:

$$E_0 + E_1 = E_2, \quad k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{2z}E_2.$$

Los factores exponenciales E se reducen entre sí en ambos miembros de la igualdad, puesto que k_x es el mismo (y también la frecuencia ω) en las tres ondas; a continuación entenderemos por E siempre las amplitudes complejas de las ondas. La solución de estas ecuaciones conduce a las llamadas *fórmulas de Fresnel*:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} E_0, \\ E_2 &= \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0 = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} E_0. \end{aligned} \quad (66.4)$$

Si ambos medios son transparentes, estas fórmulas pueden representarse mediante las relaciones (66.3) en la forma

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \\ E_2 &= \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0. \end{aligned} \quad (66.5)$$

De manera análoga se puede estudiar el caso en que \mathbf{E} se encuentra en el plano de incidencia; entonces conviene efectuar el cálculo para el campo magnético, que es perpendicular al plano de incidencia. Se obtienen como resultado dos fórmulas de Fresnel más:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\epsilon_2 k_{0z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{0z} + \epsilon_1 k_{2z}} H_0 = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_0 - \sqrt{(\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta_0)}}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta_0)}} H_0, \\ H_2 &= \frac{2\epsilon_2 k_{0z}}{\epsilon_2 k_{0z} + \epsilon_1 k_{2z}} H_0 = \frac{2\epsilon_2 \cos \theta_0}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta_0)}} H_0. \end{aligned} \quad (66.6)$$

* Las condiciones de contorno para las componentes normales de \mathbf{B} y \mathbf{D} no proporcionan nada nuevo en este caso, debido a que las ecuaciones $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\text{div } \mathbf{D} = 0$ resultan ser consecuencia de las ecuaciones (63.1).

Si los dos medios son transparentes, estas fórmulas se convierten en las

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \\ H_2 &= \frac{\operatorname{sen} 2\theta_0}{\operatorname{sen}(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \end{aligned} \quad (66.7)$$

El *coeficiente de reflexión* R se define como razón del flujo de energía medio (respecto del tiempo) reflejado por la superficie al flujo incidente. Cada uno de estos flujos viene dado por el valor medio de la componente z del vector de Poynting (63.11) de la correspondiente onda:

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 |\mathbf{E}_1|^2}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 |\mathbf{E}_0|^2} = \frac{|\mathbf{E}_1|^2}{|\mathbf{E}_0|^2}.$$

Para incidencia normal ($\theta_0 = 0$) los dos casos de polarización son equivalentes y el coeficiente de reflexión se obtiene por la fórmula

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2. \quad (66.8)$$

Esta es válida tanto para un medio reflector transparente como para un medio absorbente. Si se introducen n_2 y κ_2 de acuerdo con $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 + i\kappa_2$, se obtendrá, por ejemplo, para luz que incide desde el vacío ($\epsilon_1 = 1$)

$$R = \frac{(n_2 - 1)^2 + \kappa_2^2}{(n_2 + 1)^2 + \kappa_2^2}. \quad (66.9)$$

Las consideraciones que siguen acerca de las fórmulas obtenidas se referirán al caso en que ambos medios son transparentes. Antes haremos la siguiente observación general. La frontera de separación entre dos medios diferentes es, en realidad, no una superficie geométrica, sino una delgada capa de transición. La validez de las fórmulas (66.1) no está ligada con ninguna hipótesis acerca del carácter de esta capa. Sin embargo, las fórmulas de Fresnel se han deducido basándonos en la aplicación de las condiciones de contorno sobre la superficie de separación y suponen que la capa de transición tiene un grosor δ que es pequeño comparado con la longitud de onda λ . De ordinario el grosor δ es comparable con las distancias interatómicas, en cualquier caso pequeñas comparadas con λ (de lo contrario, sería del todo imposible la descripción macroscópica del campo); por ello, también la condición $\lambda \gg \delta$ se cumple ordinariamente. Ahora bien, en el caso límite opuesto, el fenómeno de la refracción tendría un carácter por completo diferente. Cuando $\delta \gg \lambda$ se cumplen las condiciones de aplicabilidad de la óptica geométrica (λ pequeña comparada con

las dimensiones de las heterogeneidades del medio). Por consiguiente, en el presente caso sería posible considerar la propagación de la onda como la propagación de rayos que experimentan refracción en la capa de transición, pero que la atraviesan sin ser reflejados. En otras palabras, el coeficiente de reflexión sería igual a cero.

Volvamos a las fórmulas de Fresnel. En la reflexión por un medio transparente, los coeficientes de proporcionalidad entre E_1 , E_2 y E_0 en dichas fórmulas son reales*. Esto significa que la fase de la onda o bien no varía, o bien experimenta un salto igual a π , según sea el signo de estos coeficientes. En particular, la fase de la onda refractada coincide siempre con la de la onda incidente. La reflexión, en cambio, puede ir acompañada de un cambio de fase**. Así, en la incidencia normal, la fase de la onda no varía si $\epsilon_1 > \epsilon_2$. Pero si $\epsilon_2 > \epsilon_1$, los vectores E_1 y E_0 tienen signos opuestos, es decir, se produce un cambio de la fase de la onda igual a π .

Los coeficientes de reflexión para incidencia oblicua vienen dados, según (66.5) y (66.7), por las fórmulas

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)}. \quad (66.10)$$

Aquí y en lo que sigue, los índices \perp y \parallel designan los casos en que el campo E es, respectivamente, perpendicular o paralelo al plano de incidencia. Haremos notar la siguiente simetría: las expresiones (66.10) no cambian si se permutan entre sí θ_2 y θ_0 (en cambio, las fases de las ondas reflejadas, de acuerdo con las fórmulas (66.5) y (66.7), varían en π). En otras palabras, el coeficiente de reflexión de una onda que incide desde el medio 1 formando un ángulo θ_0 , es igual al coeficiente de reflexión de una onda que incide desde el medio 2 formando el ángulo θ_2 .

La luz reflejada que incide formando un ángulo θ_0 tal que $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$ (con lo que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí) posee una notable propiedad. Designemos este valor por θ_p ; haciendo $\sin \theta_p = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \cos \theta_2$ y utilizando la ley de refracción (66.3), obtendremos:

$$\operatorname{tg} \theta_p = \sqrt{(\epsilon_2/\epsilon_1)}. \quad (66.11)$$

Cuando $\theta_0 = \theta_p$, tenemos $\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2) = \infty$ y R_{\parallel} se anula. En consecuencia, para una dirección arbitraria de polarización de la luz que incide formando este ángulo, la luz reflejada estará polarizada de tal modo que el campo eléctrico en ella es perpendicular al plano de incidencia. Esta misma polarización poseerá también la luz reflejada cuando la incidente es luz natural; ninguna componente cuya polarización no sea precisamente ésta será reflejada. El ángulo θ_p se llama *ángulo de polarización total* o *ángulo de Brewster*. Hay que hacer notar que mientras la reflexión puede

* Dejamos a un lado por el momento el caso de la llamada reflexión total (véase más adelante).

** La reflexión por un medio absorbente conduce, en general, a que se produzca la polarización elíptica. Las expresiones explícitas para las relaciones de las amplitudes y de las fases entre las tres ondas son en tal caso muy complicadas. Se pueden encontrar en el libro de J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, capítulo IX.

conducir a la polarización total de la luz natural, en la luz refractada no se consigue la polarización total, cualquiera que sea el ángulo de incidencia.

La reflexión y refracción de la luz polarizada conduce siempre de nuevo a luz polarizada linealmente, pero con una dirección de polarización que, en general, no coincide con la de la luz incidente. Sea γ_0 el ángulo formado por E_0 y el plano de incidencia, y γ_1 y γ_2 los ángulos análogos para las ondas reflejadas y refractada. Mediante las fórmulas (66.5) y (66.7) es fácil obtener las relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= -\frac{\cos(\theta_0 - \theta_2)}{\cos(\theta_0 + \theta_2)} \operatorname{tg} \gamma_0, \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= \cos(\theta_0 - \theta_2) \operatorname{tg} \gamma_0. \end{aligned} \quad (66.12)$$

Los ángulos γ_0 , γ_1 , γ_2 coinciden para todos los ángulos de incidencia tan sólo en los casos evidentes en que $\gamma_0 = 0$ y $\gamma_0 = \pi/2$; coinciden también para las incidencias normal ($\theta_0 = \theta_2 = 0$) y tangencial ($\theta_0 = \pi/2$), si bien en el último caso no existe onda refractada. En todos los demás casos, de (66.12) se siguen (teniendo en cuenta que $0 < \theta_0, \theta_2 < \pi/2$ y suponiendo que $0 < \gamma_0 < \pi/2$, $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \pi$) las desigualdades

$$\gamma_1 > \gamma_0, \gamma_2 < \gamma_0.$$

Así pues, en la reflexión, la dirección de E se aparta del plano de incidencia, y en la refracción se acerca a él.

La comparación de las dos fórmulas (66.10) pone de manifiesto que, cualquiera que sea el ángulo de incidencia (con las únicas excepciones de $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi/2$), se tendrá

$$R_{\parallel} < R_{\perp}.$$

En consecuencia, por ejemplo, cuando incide luz natural la luz reflejada está polarizada parcialmente, predominando la dirección del campo eléctrico que es perpendicular al plano de incidencia. También la luz refractada estará polarizada en parte, si bien en este caso prepondera la dirección de E en el plano de incidencia.

El carácter de la dependencia de R_{\parallel} y R_{\perp} respecto del ángulo de incidencia es esencialmente distinto. El coeficiente R_{\perp} crece con monotonía al crecer θ_0 , partiendo del valor (66.8) para $\theta_0 = 0$. En cuanto al coeficiente R_{\parallel} , que toma el mismo valor (66.8) para $\theta_0 = 0$, al aumentar θ_0 decrece al principio, se anula para $\theta_0 = \theta_p$ y tan sólo a partir de este punto empieza a crecer con monotonía.

En todo esto hay que distinguir dos casos esencialmente distintos. Si la reflexión se produce, como suele decirse, sobre el medio «ópticamente más denso», es decir, si $\epsilon_2 > \epsilon_1$, el crecimiento de R_{\parallel} y R_{\perp} se mantiene hasta el valor $\theta_0 = \pi/2$ («incidencia tangencial»), cuando ambos alcanzan el valor 1. Pero si el medio reflector es el «ópticamente menos denso», $\epsilon_2 < \epsilon_1$, ambos coeficientes toman el valor 1 ya para el ángulo de incidencia $\theta_0 = \theta_r$, donde θ_r se determina por la igualdad

$$\operatorname{sen} \theta_r = \sqrt{(\epsilon_2/\epsilon_1)} = n_2/n_1 \quad (66.13)$$

y se llama *ángulo de reflexión total*. Cuando $\theta_0 = \theta_r$, el ángulo de reflexión $\theta_2 = \pi/2$, la onda refractada se propaga paralelamente a la superficie de separación.

La reflexión para ángulos $\theta_0 > \theta_r$ sobre el medio ópticamente menos denso exige un análisis particular. En este caso k_{2z} (véase (66.2)) es puramente imaginario, es decir, el campo en el medio refractor se amortigua. El amortiguamiento de la onda a medida que penetra en el medio, cuando no existe en él una verdadera absorción (es decir, una disipación de energía), significa que el flujo de energía del primer medio al segundo es nulo en promedio (por un simple cálculo es fácil comprobar que el vector \vec{S} del flujo promedio de energía en el segundo medio tiene, en efecto, tan sólo la componente x). En otras palabras, toda la energía que incide sobre la superficie de separación se refleja de nuevo hacia el primer medio, es decir, los coeficientes de reflexión son

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = 1.$$

Este fenómeno se llama *reflexión total**. Esta última igualdad para R_{\perp} y R_{\parallel} puede obtenerse también directamente, claro está, mediante las fórmulas de Fresnel (66.4) y (66.6).

Cuando $\theta_0 > \theta_r$, los coeficientes de proporcionalidad entre E_1 y E_0 pasan a ser cantidades complejas de la forma $(a-ib)/(a+ib)$. Las magnitudes R_{\perp} y R_{\parallel} , en cambio, vienen dadas por los cuadrados de los módulos de estos coeficientes, que son iguales a la unidad. Estas fórmulas, sin embargo, permiten determinar no sólo la razón de los valores absolutos del campo en las ondas reflejada e incidente, sino también la diferencia entre sus fases. Para ello hay que representar dichos campos en la forma

$$E_{1\perp} = e^{-i\delta_{\perp}} E_{0\perp}, \quad E_{1\parallel} = e^{-i\delta_{\parallel}} E_{0\parallel}.$$

Tenemos**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta_{\perp} &= \sqrt{(\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2)/\epsilon_1} \cos \theta_0, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta_{\parallel} &= \sqrt{(\epsilon_1^2 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_1 \epsilon_2)/\epsilon_2} \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (66.14)$$

Así pues, la reflexión total va acompañada de un cambio de fase de la onda que es diferente, en general, para componentes del campo paralela y perpendicular al plano de incidencia. Por ello, en la reflexión de una onda polarizada en un plano que no coincide con el plano de incidencia, la onda reflejada estará polarizada elípticamente. Para la diferencia de fases $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$ se obtiene fácilmente la expresión

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{\cos \theta_0 \sqrt{(\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2)}}{\sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta_0}}. \quad (66.15)$$

* Recordaremos que el coeficiente de reflexión es siempre igual a la unidad en la reflexión por un medio con valor de ϵ real, pero negativo. Tampoco en un tal medio se produce verdadera absorción, pero la onda no puede penetrar en él.

** Si $(a-ib)/(a+ib) = e^{-i\delta}$, se tendrá $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = b/a$.

Esta diferencia se anula solamente cuando $\theta_0 = \theta_r$ o cuando $\theta_0 = \pi/2$.

PROBLEMAS

1. Hallar la ley según la cual el coeficiente de reflexión tiende a 1 cerca del ángulo de reflexión total.

Solución. Supongamos $\theta_0 = \theta_r - \delta$, donde δ es una cantidad pequeña, y desarrollemos en las fórmulas (66.10) sen θ_0 y cos θ_0 en potencias de δ . El resultado que se obtiene es:

$$R_{\perp} = 1 - 4\sqrt{(2\delta)}(n^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$R_{\parallel} = 1 - 4\sqrt{(2\delta)}n^2(n^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

donde $n^2 = \epsilon_1/\epsilon_2 > 1$. Las derivadas $dR/d\delta$ tienden a infinito como $\delta^{-\frac{1}{2}}$ cuando $\delta \rightarrow 0$.

2. Hallar el coeficiente de reflexión para la luz que incide casi tangencialmente desde el vacío sobre la superficie de un cuerpo con un valor de ϵ próximo a 1.

Solución. Las fórmulas (66.10) dan el mismo coeficiente de reflexión:

$$R_{\perp} \cong R_{\parallel} \cong [\phi_0 - \sqrt{(\phi_0^2 + \epsilon - 1)}]^4/(\epsilon - 1)^2,$$

donde $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$.

3. Determinar el coeficiente de reflexión para una onda que incide desde el vacío sobre la frontera de un medio cuyos valores de ϵ y μ son diferentes de la unidad.

Solución. Cálculos por completo análogos a los efectuados en el texto conducen al resultado

$$R_{\perp} = \left| \frac{\mu \cos \theta_0 - \sqrt{(\epsilon\mu - \sin^2 \theta_0)}}{\mu \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon\mu - \sin^2 \theta_0)}} \right|^2,$$

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\epsilon \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon\mu - \sin^2 \theta_0)}}{\epsilon \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon\mu - \sin^2 \theta_0)}} \right|^2.$$

4. Una capa planoparalela de substancia 2 se encuentra entre el vacío (medio 1) y un medio arbitrario 3. Desde el vacío incide sobre dicha capa luz polarizada en el plano de incidencia (o perpendicularmente al mismo). Expresar el coeficiente de reflexión R de la capa en función del coeficiente de reflexión correspondiente a incidencia de la luz sobre el medio semiinfinito 2 o 3.

Solución. Designemos por A_0 y A_1 las amplitudes del campo (E o H según cuál de estos dos vectores sea paralelo al plano de la capa) en las ondas incidente y reflejada. El campo en la capa se compone de una onda refractada (amplitud A_2) y de una onda reflejada en la superficie de separación 2-3 (amplitud A'_2). La condición de contorno sobre la superficie 1-2 da una igualdad de la forma

$$A'_2 = a(A_1 - r_{12}A_0) \quad (1)$$

donde a y r_{12} son constantes. En la reflexión por el medio semiinfinito 2 no existe la onda A'_2 , de modo que (1) da $r_{12} = A_1/A_0$, es decir, r_{12} es la amplitud de reflexión para este caso. Una ecuación más puede obtenerse a partir de (1) permutando entre sí A_1 y A_0 y substituyendo A'_2 por A_2 , lo que corresponde simplemente a cambiar el signo de la componente z del vector de onda:

$$A = a(A_0 - r_{12}A_1). \quad (2)$$

En el medio 3 se tiene tan sólo la onda transmitida. Para su amplitud se tienen las condiciones

$$A_2 e^{i\psi} = aA_3, \quad A'_2 e^{-i\psi} = -ar_{32}A_3 \quad (3)$$

(análogas a las condiciones (1), (2) con $A_1 = 0$); los factores exponenciales tienen en cuenta el cambio de fase de la onda al atravesar el espesor h de la capa, siendo

$$\psi = (\omega h/c)\sqrt{(\epsilon_2 - \sin^2 \theta_0)}. \quad (4)$$

Eliminando en (3) A_3 , tenemos

$$A_2' e^{-i\psi} = r_{23} A_2 e^{i\psi}, \quad (5)$$

$$(r_{23} = -r_{32}).$$

A partir de las ecuaciones (1), (2), (5) se encuentra la amplitud reflejada por la capa:

$$r = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_{12} e^{-2i\psi} + r_{23}}{e^{-2i\psi} + r_{12} r_{23}}, \quad (6)$$

(el coeficiente de reflexión es $R = |r|^2$). El sentido de la constante r_{23} se sigue del hecho de que, para $h = 0$, r debe coincidir con la amplitud de reflexión r_{13} determinada por el medio semiinfinito (3); de aquí se deduce

$$r_{23} = (r_{12} - r_{13}) / (r_{12} r_{13} - 1). \quad (7)$$

Las fórmulas (6), (7) resuelven el problema planteado. Subrayaremos que al deducirlas no hemos hecho hipótesis alguna acerca de las propiedades de los medios 2 y 3, que pueden ser transparentes o absorbentes.

Si los medios 2 y 3 son transparentes, todas las magnitudes ψ , r_{12} , r_{13} son reales y r_{23} representa la amplitud de reflexión sobre la superficie de separación entre los medios semiinfinitos 2 y 3. De (6) se sigue entonces

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \psi}{(r_{12}r_{23} + 1)^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \psi}. \quad (8)$$

Al variar ψ , esta magnitud varía entre los límites

$$[(r_{12} + r_{23}) / (r_{12}r_{23} + 1)]^2 \text{ y } [(r_{12} - r_{23}) / (r_{12}r_{23} - 1)]^2.$$

En el caso en que la luz incide normalmente es $r_{12} = (n_1 - n_2) / (n_1 + n_2)$, y relaciones análogas se tienen entre r_{13} y r_{23} . Si $n_2^2 = n_1 n_3$, será $r_{12} = r_{23}$ y mediante una elección adecuada del grosor de la capa puede anularse R .

Si el medio 3 es el vacío, se tendrá $r_{13} = 0$, $r_{23} = -r_{12}$ y de (6) se sigue

$$r = \frac{r_{12}(e^{-2i\psi} - 1)}{e^{-2i\psi} - r_{12}^2} = - \frac{\sinh i\psi}{\sinh [i\psi + \ln(-r_{12})]}. \quad (9)$$

Si también el medio 2 es transparente,

$$R = \frac{4R_{12} \sin^2 \psi}{(1 - R_{12})^2 + 4R_{12} \sin^2 \psi}.$$

El coeficiente de transmisión D a través de la capa (desde el vacío hasta el vacío) coincide con $1 - R$ tan sólo si el medio 2 es transparente. En caso contrario, para calcular D hay que partir de las ecuaciones (1)-(3), haciendo en ellas $r_{32} = r_{12}$. La «amplitud de transmisión» d es igual a:

$$d = \frac{A_3}{A_0} = \frac{1 - r_{12}^2}{e^{-i\psi} - r_{12}^2 e^{i\psi}}, \quad (10)$$

y el coeficiente de transmisión $D = |d|^2$.

5. Determinar los coeficientes de reflexión y transmisión para luz que incide normalmente sobre una placa con una permitividad compleja ϵ muy grande.

Solución. En este caso

$$r_{12} = (1 - \sqrt{\epsilon}) / (1 + \sqrt{\epsilon}) \approx -(1 - 2/\sqrt{\epsilon}),$$

y según la fórmula (9) del problema anterior

$$r = -[1 - (2/\sqrt{\epsilon}) \operatorname{ctgh} i\psi]^{-1}, \quad \psi = \omega h \sqrt{\epsilon}/c.$$

Si la placa es tan delgada que $h\omega/c \ll 1/|\sqrt{\epsilon}|$, se puede escribir

$$r = -[1 + 2ic/\epsilon\omega h]^{-1}.$$

Entonces cabe todavía distinguir dos casos:

$$\text{para } 1/|\epsilon| \ll \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\epsilon|}, \quad R = 1 - 4c\epsilon''/\omega h|\epsilon|^2,$$

$$\text{para } \omega h/c \ll 1/|\epsilon|, \quad R = \omega^2 h^2 |\epsilon|^2 / 4c^2.$$

Para el coeficiente de transmisión tenemos, según la fórmula (10),

$$\begin{aligned} \text{para } \omega h/c \sim 1/\sqrt{|\epsilon|}, & \quad d = -2/\sqrt{\epsilon} \sinh i\psi, \\ \text{para } \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\epsilon|}, & \quad d = (1 - i\epsilon\omega h/2c)^{-1}. \end{aligned}$$

En el último caso, cabe de nuevo distinguir

$$\begin{aligned} \text{y} \quad \text{para } 1/|\epsilon| \ll \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\epsilon|}, & \quad D = 4c^2/\omega^2 h^2 |\epsilon|^2, \\ \text{para } \omega h/c \ll 1/|\epsilon|, & \quad D = 1 - \epsilon''\omega h/c. \end{aligned}$$

§ 67. Impedancia superficial de los metales

La permitividad de los metales es, en valor absoluto, grande comparada con 1 para frecuencias no demasiado elevadas (cuando $\omega \rightarrow 0$ tiende a infinito como $1/\omega$). En estas condiciones, la «longitud de onda» $\delta \sim c/\omega\sqrt{|\epsilon|}$ en un metal* es pequeña comparada con la longitud de onda $\lambda \sim c/\omega$ en el vacío. Si además δ (pero no necesariamente λ) es también pequeña comparada con los radios de curvatura de la superficie del metal, cabe valerse de esta circunstancia para simplificar considerablemente el problema de la reflexión de ondas electromagnéticas arbitrarias por un metal.

Que δ sea pequeña significa que las derivadas de las componentes del campo en el interior del metal en la dirección de la normal a la superficie son grandes comparadas con las derivadas relativas a las direcciones tangenciales. El campo dentro del metal cerca de la superficie se puede considerar, por lo tanto, como el campo de una onda plana y, en consecuencia, los campos \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t están ligados entre sí por la relación

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{(\mu/\epsilon)} \mathbf{H}_t \times \mathbf{n}, \quad (67.1)$$

donde \mathbf{n} es la normal a la superficie orientada hacia el interior del metal. Dado que, por otra parte, \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t son continuos, esa misma relación debe ligar los valores del campo fuera del metal sobre su superficie. La igualdad (67.1) puede utilizarse (según probó M. A. Leontovich, 1948) como condición de contorno para determinar el campo fuera del conductor. De esta manera el problema electromagnético exterior puede resolverse sin necesidad alguna de considerar el campo dentro del metal.

La magnitud $\sqrt{\mu/\epsilon}$ se llama *impedancia superficial* del metal; la designaremos por $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ **:

$$\zeta = \sqrt{(\mu/\epsilon)}. \quad (67.2)$$

* Los valores de $\sqrt{\epsilon(\omega)}$ grandes casi siempre resultan ser complejos. En estas condiciones, el campo electromagnético se amortigua al penetrar en el cuerpo, de modo que la «longitud de onda» en él es a la vez la «profundidad de penetración» del campo. Si $\epsilon(\omega)$ se expresa en función de la conductibilidad σ (según (58.9)), δ coincide con la profundidad de penetración introducida en el § 45.

** De ordinario se llama impedancia superficial a una magnitud que difiere de ζ en el factor $4\pi/c$; sin embargo, consideramos inconveniente esta designación.

En el dominio de frecuencias para las que ϵ se expresa en función de la conductibilidad del metal ordinaria, tenemos

$$\zeta = (1 - i)\sqrt{(\omega\mu/8\pi\sigma)}. \quad (67.3)$$

El valor medio (respecto del tiempo) del flujo de energía a través de la superficie del metal es

$$\bar{S} = (c/8\pi)\text{Re}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) = c\zeta'|\mathbf{H}_t|^2\mathbf{n}/8\pi. \quad (67.4)$$

Este flujo representa la energía que penetra en el interior del mismo y se disipa en él. Se ve por esto, en particular, que debe tenerse

$$\zeta' > 0. \quad (67.5)$$

Esta desigualdad fija el signo de la raíz en (67.2).

Al aumentar la frecuencia, la profundidad de penetración δ es comparable en orden de magnitud con la longitud del libre camino medio l de los electrones de conductibilidad*. En tal caso la heterogeneidad espacial del campo hace imposible su descripción macroscópica mediante la permitividad ϵ (la existencia de fenómenos debidos a este hecho fue indicada ya por *H. London*, 1940). Es curioso que no se viola con esto todavía la condición $v/l \gg \omega$ (v es la velocidad de los electrones de conductibilidad) que garantiza la ausencia de dispersión de la conductibilidad, la cual conserva su valor σ correspondiente a campo constante.

Es muy importante notar que una condición de contorno de la forma

$$\mathbf{E}_t = \zeta\mathbf{H}_t \times \mathbf{n} \quad (67.6)$$

es también válida para tales frecuencias. Además, el campo dentro del metal y cerca de su superficie se puede considerar de nuevo como una onda plana, si bien no cabe describirlo ahora por las ecuaciones macroscópicas de Maxwell ordinarias. En dicha onda los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} deben estar ligados entre sí por una relación lineal, y la única forma posible de relación de este tipo entre el vector axial \mathbf{H} y el vector polar \mathbf{E} es la (67.6). El coeficiente ζ en esta relación es la única cantidad, característica de las propiedades del metal, que hay que conocer para obtener la solución del problema electromagnético exterior.

Si la frecuencia sigue aumentando (de ordinario en la región del infrarrojo), nuevamente pasa a ser posible una descripción macroscópica del campo y cobra otra vez sentido el concepto de ϵ . La causa de este fenómeno consiste en que al absorber un cuanto $\hbar\omega$ grande, un electrón de conductibilidad adquiere una gran energía, con lo cual disminuye la longitud de su libre camino medio, de forma que de nuevo se cumpla la desigualdad $l \ll \delta$. La impedancia ζ vuelve a ser una mag-

* El libre camino medio depende fundamentalmente de la temperatura del metal. De hecho se trata casi siempre de temperaturas muy bajas, en el dominio del helio, mientras que los fenómenos considerados se manifiestan en el intervalo de las ondas de radio ultracortas.

nitud inversamente proporcional a $\sqrt{\epsilon}^*$. En esta región de frecuencias, $\epsilon(\omega)$ tiene una parte real y negativa grande y una parte imaginaria pequeña. La desigualdad $l \ll \delta$ es la condición para que tengan sentido macroscópico las dos magnitudes ϵ' y ϵ'' . Sin embargo, para que tuviera un sentido macroscópico únicamente la cantidad grande ϵ' , basta que se cumpla la condición más débil $v/\omega \ll \delta$, donde v es la velocidad de los electrones de conductibilidad en el metal (el hecho de que se cumpla permite prescindir de la heterogeneidad espacial del campo al considerar el movimiento de los electrones).

La desigualdad $\zeta' > 0$ es válida para la parte real de la impedancia en cualquier caso. Pero si se cumple la fórmula (67.2), es posible llegar a alguna conclusión acerca del signo de la parte imaginaria ζ'' . Así, si la dispersión de ϵ es más importante que la de μ (es decir, si μ se puede considerar como una magnitud real), de $\epsilon'' > 0$ se sigue que $\zeta'\zeta'' < 0$, y dado que siempre se tiene $\zeta' > 0$, necesariamente será

$$\zeta'' < 0.$$

Éste es el caso más general. Pero si la dispersión de ζ viene determinada por la dispersión de μ , siguiendo el mismo camino se halla que $\zeta'' > 0$.

El concepto de impedancia puede aplicarse también a los superconductores. Característica fundamental de estos últimos es la existencia en ellos de una profundidad de penetración δ pequeña incluso en el caso estático ($\omega = 0$). Cuando las frecuencias no son muy elevadas, cabe admitir que la distribución del campo magnético coincide con la del campo estático. Para determinar el campo eléctrico escribiremos la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c,$$

Dirijamos el eje z en el sentido de la normal exterior a la superficie del superconductor. Prescindiendo de las derivadas en las direcciones tangenciales frente a las derivadas respecto de z , que son grandes, tenemos

$$\partial E_x / \partial z = i\omega H_y / c,$$

(y análogamente para E_y). Integrando esta igualdad con relación a z en el interior del cuerpo, resulta

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^0 H_y dz.$$

* Sin embargo, hay que recordar que solamente es posible valerse de la igualdad (67.6) como condición de contorno en tanto $|\epsilon|$ sea grande (es decir, ζ pequeño); esta condición, en cualquier caso, deja de cumplirse ya para las frecuencias ópticas. Suponemos que es $\mu \sim 1$; entonces a valores $|\epsilon|$ grandes corresponden valores ζ pequeños. Si $\mu \gg 1$, la desigualdad $\delta \ll \lambda$ necesaria para la aplicabilidad de la condición de contorno (67.6) significa que debe ser $\sqrt{\mu\epsilon} \gg 1$; entonces puede muy bien ocurrir que $\zeta = \sqrt{\mu\epsilon}$ no sea pequeño.

$E_x(0)$ es el valor de E_x para $z = 0$, es decir, sobre la superficie del cuerpo. Definiremos cuantitativamente la profundidad de penetración de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^0 H_y dz = \delta H_y(0). \quad (67.7)$$

Entonces

$$E_x(0) = i\omega\delta H_y(0)/c.$$

Comparando con la condición de contorno (67.6), se encuentra que la impedancia de un superconductor (en el intervalo considerado de frecuencias no demasiado elevadas*) viene dada por la fórmula

$$\zeta = -i\omega\delta/c. \quad (67.8)$$

Esta expresión representa el primer término del desarrollo de $\zeta(\omega)$ en serie de potencias de la frecuencia, desarrollo que, por consiguiente, comienza en los superconductores con un término proporcional a ω . El término siguiente del desarrollo es proporcional a ω^2 y real; éste es precisamente el primer término del desarrollo de ζ' .

La impedancia $\zeta(\omega)$, considerada como función de la variable compleja ω , posee propiedades en buena medida análogas a las de la función $\epsilon(\omega)$ (V. L. Ginzburg, 1954). La condición de contorno que para una onda monocromática tiene la forma (67.6), en el caso general hay que interpretarla como relación funcional

$$\mathbf{E}_t = \zeta \mathbf{H}_t \times \mathbf{n}, \quad (67.9)$$

que expresa el valor de \mathbf{E}_t en determinado instante en función de los valores de \mathbf{H}_t en todos los instantes anteriores (véase § 58). Al igual que en el § 62, de aquí se sigue que la función $\zeta(\omega)$ carece de puntos singulares en el semiplano superior de ω , incluido el eje real (salvo únicamente el punto $\omega = 0$). Además, la condición de que \mathbf{E}_t sea real cuando lo es \mathbf{H}_t conduce a la relación

$$\zeta(-\omega^*) = \zeta^*(\omega).$$

Finalmente, dado que la disipación de la energía viene determinada por la parte real de la función $\zeta(\omega)$ (y no por la imaginaria, como en el caso de $\epsilon(\omega)$), $\zeta'(\omega)$ será positiva y no se anula para ningún valor real de ω , con la única excepción del valor $\omega = 0$. Argumentos análogos a los presentados en el § 62, permiten así llegar a la conclusión de que

$$\operatorname{Re} \zeta(\omega) > 0$$

también en todo el semiplano superior. De esto se sigue, en particular, que $\zeta(\omega)$ carece de ceros en el semiplano superior.

El hecho de que $\zeta(\omega)$ carezca de puntos singulares en el semiplano superior conduce de nuevo a las fórmulas de Kramers-Kronig. Una fórmula particularmente

* Se trata en la práctica de frecuencias que llegan hasta la región de las ondas de radio centimétricas.

importante en este caso es

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta'(x) - 1}{x - \omega} dx.$$

Utilizando la propiedad de que la función $\zeta'(x)$ es par, esta fórmula puede escribirse también en la forma

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x) - 1}{x - \omega} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x) - 1}{x + \omega} dx$$

o bien

$$\zeta''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (67.10)$$

(se puede prescindir de la unidad en el numerador del integrando, dado que el valor principal de la integral de $1/(x^2 - \omega^2)$ es en cualquier caso igual a cero).

Todo lo dicho acerca de la función $\zeta(\omega)$ vale también, claro está, para la función recíproca $1/\zeta(\omega)$; el operador ζ^{-1} expresa $\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}$ en función de \mathbf{E}_t . En particular, en vez de (67.10) tendremos

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2 - \omega^2} dx. \quad (67.11)$$

Para valores de ζ pequeños esta fórmula puede resultar de manejo más cómodo que la (67.10). Tal como la hemos escrito, sin embargo, no es aplicable a los superconductores, en los que ζ^{-1} tiene, según (67.8), un polo en $\omega = 0$. Un simple cambio formal del razonamiento (véase el paso de (62.9) a (62.11)) conduce en tal caso a la fórmula

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2 - \omega^2} dx + \frac{c}{\omega\delta}. \quad (67.12)$$

Para terminar este párrafo, y como ejemplo de aplicación del concepto de impedancia, consideraremos la reflexión de una onda electromagnética plana que incide desde el vacío sobre la superficie plana de un metal cuya impedancia superficial es ζ . Si el vector \mathbf{E} está polarizado perpendicularmente al plano de incidencia, la condición de contorno (67.6) da

$$E_0 + E_1 = \zeta(H_0 - H_1) \cos \theta_0 = \zeta(E_0 - E_1) \cos \theta_0$$

(los símbolos son los mismos que en el § 66). De aquí se deduce, teniendo en cuenta que ζ es pequeño,

$$E_1/E_0 = -(1 - 2\zeta \cos \theta_0),$$

como también el coeficiente de reflexión

$$R_{\perp} = 1 - 4\zeta' \cos \theta_0. \quad (67.13)$$

Pero si \mathbf{E}_0 se encuentra en el plano de incidencia, la condición de contorno la escribiremos en la forma $\zeta \mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_t$, es decir,

$$\zeta(H_0 + H_1) = (E_0 - E_1) \cos \theta_0 = (H_0 - H_1) \cos \theta_0,$$

de donde se deduce el coeficiente de reflexión

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\cos \theta_0 - \zeta}{\cos \theta_0 + \zeta} \right|^2. \quad (67.14)$$

Para ángulos de incidencia no demasiado próximos al valor $\pi/2$, es

$$R_{\parallel} = 1 - 4\zeta' \sec \theta_0. \quad (67.15)$$

En cambio, si el ángulo $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \ll 1$, entonces

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\phi_0 - \zeta}{\phi_0 + \zeta} \right|^2. \quad (67.16)$$

Esta expresión presenta para $\phi_0 = |\zeta|$ un mínimo igual a

$$(|\zeta| - \zeta')/(|\zeta| + \zeta').$$

Salvo el caso particular (67.16), el coeficiente de reflexión por una superficie con un valor de ζ pequeño es próximo a la unidad. Una superficie para la que $\zeta \rightarrow 0$ (o, como suele decirse, una superficie «conductora perfecta») es a la vez un «reflector perfecto». La condición de contorno sobre una tal superficie se escribe simplemente $\mathbf{E}_t = 0$, análoga a la condición para el campo electrostático sobre la superficie de un conductor. Pero a diferencia del caso de un campo constante, en un campo variable esta condición trae consigo automáticamente el que el campo magnético cumpla también una determinada condición. A saber, en virtud de la ecuación $(i\omega/c)\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E}$, de la ecuación $\mathbf{E}_t = 0$ sobre la superficie se sigue la igualdad $H_n = 0$. Así pues, sobre una superficie «conductora perfecta» en un campo electromagnético variable se anula la componente normal del campo magnético. En este sentido dicha superficie es similar a la superficie de un superconductor en un campo magnético constante.

PROBLEMA

Determinar la intensidad de la radiación térmica (de frecuencia dada) emitida por una superficie plana de pequeña impedancia.

Solución. Según la ley de Kirchhoff, la intensidad dI de radiación térmica emitida (en el elemento de ángulo sólido $d\omega$) por una superficie arbitraria, está ligada con la intensidad de la radiación emitida por la superficie de un cuerpo absolutamente negro dI_0 por la relación $dI = (1 - R) dI_0$, donde R es el

coeficiente de reflexión de la superficie dada correspondiente a la luz natural. Calculando $R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel})$ mediante las fórmulas (67.13) y (67.14) y teniendo en cuenta la isotropía de la radiación que emite la superficie de un cuerpo negro ($dI_0 = I_0 d\Omega/2\pi$), obtendremos

$$I = 2I_0 \zeta' \int_0^{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{\cos^2 \theta + 2\zeta' \cos \theta + \zeta'^2 + \zeta''^2} \right\} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Efectuando la integración y prescindiendo de los términos de orden superior respecto de ζ , se encuentra

$$\frac{I}{I_0} = \zeta' \left[\ln \frac{1}{\zeta'^2 + \zeta''^2} + 1 - \frac{2\zeta'}{\zeta''} \operatorname{arctg} \frac{\zeta''}{\zeta'} \right]$$

En particular, para un metal con una impedancia determinada por la fórmula (67.3), se tiene ($\mu = 1$)

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \left[\ln \frac{4\pi\sigma}{\omega} + 1 - \frac{1}{2}\pi \right].$$

§ 68. Propagación de las ondas en un medio no homogéneo

Consideremos la propagación de las ondas electromagnéticas en un medio eléctricamente no homogéneo (pero isótropo). En las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\epsilon\omega \mathbf{E}/c$$

(suponemos en todo lo que sigue $\mu = 1$), ϵ es una función de las coordenadas del punto. Substituyendo \mathbf{H} dado por la primera ecuación en la segunda, obtendremos para \mathbf{E} la ecuación

$$\Delta \mathbf{E} + (\epsilon\omega^2/c^2)\mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (68.1)$$

En cambio, eliminando \mathbf{E} , se obtiene para \mathbf{H} la ecuación

$$\Delta \mathbf{H} + (\epsilon\omega^2/c^2)\mathbf{H} + (1/\epsilon) \operatorname{grad} \epsilon \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (68.2)$$

Estas ecuaciones se simplifican notablemente en el caso «unidimensional», en el que ϵ cambia solamente en una dirección en el espacio. Elijamos el eje z de modo que coincida con ésta y consideremos una onda cuya dirección de propagación se encuentra en el plano xz . En un campo de estas características, ninguna magnitud depende de la coordenada y , mientras que, dada la homogeneidad del espacio a lo largo del eje x , se puede considerar que la dependencia respecto de x viene dada por el factor $e^{i\kappa x}$, en el que κ es una constante. Para $\kappa = 0$ el campo depende solamente de z , es decir, se trata de una onda que pasa *normalmente* a través de una capa de materia en la que $\epsilon = \epsilon(z)$. Pero si $\kappa \neq 0$, se dice que la onda pasa *oblicuamente*.

Además, hay que distinguir (cuando $\kappa \neq 0$) dos casos de polarización independientes. En uno de ellos el vector \mathbf{E} es perpendicular al plano de propagación de la onda (es decir, está dirigido a lo largo del eje y), mientras que el campo magnético

se encuentra, por consiguiente, en este plano. La ecuación (68.1) toma la forma

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\epsilon \omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right) E = 0. \quad (68.3)$$

En el otro caso, el campo \mathbf{H} está dirigido en el sentido del eje y , y \mathbf{E} se encuentra en el plano de propagación. Conviene más entonces partir de la ecuación (68.2), que da

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\kappa^2}{\epsilon} \right) H = 0. \quad (68.4)$$

Convendremos en llamar a estos dos tipos de ondas *ondas-E* y *ondas-H*, respectivamente.

Las ecuaciones pueden resolverse de forma general en el importante caso en que las condiciones de propagación difieren poco de las correspondientes a la óptica geométrica; en lo que sigue supondremos que la función $\epsilon(z)$ es real*. En la ecuación (68.3) la magnitud $2\pi/\sqrt{f}$, en la cual

$$f(z) = \epsilon k^2 - \kappa^2,$$

representa el papel de «longitud de onda» en la dirección del eje z . La aproximación de la óptica geométrica corresponde a la desigualdad

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{f}} \ll 1, \quad (68.5)$$

y la ecuación (68.3) admite dos soluciones independientes que son de la forma

$$\frac{\text{constante}}{f^{\frac{1}{4}}} e^{\pm i \int \sqrt{f} dz}. \quad (68.6)$$

La condición (68.5) deja de cumplirse, evidentemente, cerca del punto en el que $f = 0$, si éste existe. Supongamos que se trata del punto $z = 0$, con $f > 0$ para $z < 0$ y $f < 0$ para $z > 0$. A distancias suficientemente grandes a uno y otro lado del punto $z = 0$ la solución de la ecuación (68.3) tiene la forma (68.6), mas para establecer la correspondencia entre los coeficientes de esta solución en los dominios $z > 0$ y $z < 0$, hay que investigar la solución exacta de la ecuación (68.3) cerca de $z = 0$. En la vecindad de este punto cabe desarrollar la función $f(z)$ en potencias de z y representarla en la forma $f = -\alpha z$. La solución de la ecuación

$$d^2 E / dz^2 - \alpha z E = 0$$

que es finita para todo z , es

$$E = (A/\alpha^{1/6}) \Phi(\alpha^{1/3} z), \quad (68.7)$$

* La ecuación (68.3) muestra un parecido formal con la ecuación de Schrödinger para el movimiento unidimensional de una partícula en mecánica cuántica, y a la aproximación de la óptica geométrica corresponde el caso cuasiclásico. Más adelante se dan los resultados finales, remitiendo para su deducción al curso de mecánica cuántica (véase vol. III, *Mecánica cuántica*, cap. 7).

donde

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}u^3 + u\xi\right) du$$

es la llamada *función de Airy* (en E se ha prescindido del factor $e^{-i\omega t + i\kappa z}$). En cuanto a la solución asintótica de la ecuación (68.3) para valores de $|z|$ grandes, se tiene

$$E = \frac{A}{f^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\int_0^z \sqrt{f} dz + \frac{1}{4}\pi\right) \text{ para } z < 0, \quad (68.8)$$

$$E = \frac{A}{2|f|^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\int_0^z \sqrt{|f|} dz\right) \text{ para } z > 0,$$

con el mismo coeficiente A que en (68.7). La primera de estas expresiones representa una onda estacionaria que se obtiene como resultado de superponer la onda incidente (en el sentido positivo del eje z) y la reflejada por el plano $z = 0$. Las amplitudes de estas ondas son las mismas (e iguales a $A/2f^{1/4}$), es decir, el coeficiente de reflexión es igual a la unidad. En el dominio $z > 0$ penetra sólo un campo amortiguado exponencialmente.

Al acercarse al punto de reflexión, la amplitud de la onda crece, como muestra ya la presencia de $f^{1/4}$ en el denominador de (68.8). Para determinar la intensidad del campo en la inmediata vecindad de este punto es necesario, sin embargo, utilizar la expresión (68.7). Esta función decrece con monotonía al penetrar en el dominio $z > 0$, mientras posee un carácter oscilatorio en el dominio $z < 0$, disminuyendo progresivamente el valor de los máximos de $|E|$. El primero, el mayor de ellos, se alcanza para $\alpha^{1/3}z = -1,02$ y es igual a

$$E = 0,949A\alpha^{-1/6}.$$

Hasta aquí hemos escrito las soluciones para las ondas- E . Es fácil ver que en la aproximación de la óptica geométrica se pueden escribir fórmulas completamente análogas también para las ondas- H . Si en la ecuación (68.4) se substituye $H = u\sqrt{\epsilon}$, las derivadas de ϵ aparecen multiplicadas solamente por u (pero no por u'); prescindiendo por ello de los términos que contienen estas derivadas (que son pequeños en virtud de la condición (68.5)), se obtendrá para la función $u(z)$ la ecuación

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{\epsilon\omega^2}{c^2} - \kappa^2\right)u = 0,$$

que coincide con la ecuación (68.3). En consecuencia, todas las fórmulas correspondientes a H difieren de las fórmulas (68.6) a (68.8) tan sólo en el factor $\sqrt{\epsilon}$.

Una curiosa diferencia en el comportamiento de los dos tipos de ondas se manifiesta en la reflexión de una onda que incide oblicuamente ($\kappa \neq 0$) sobre una capa de materia en la que $\epsilon(z)$ pasa por el valor cero. La reflexión se produce en tal caso

sobre un plano en el que $f(z) = \epsilon k^2 - \kappa^2 = 0$, es decir, «sin alcanzar» la onda el plano en que $\epsilon = 0$. La onda- E penetra más allá de aquel plano tan sólo en forma de campo que se amortigua exponencialmente. En cambio, en la reflexión de una onda- H , sobre este campo amortiguado como fondo se superpone un intenso campo local cerca del plano en que $\epsilon = 0$ (véase problema 1 de este párrafo)*

PROBLEMAS

1. Determinar el campo eléctrico cerca de un punto en el que $\epsilon = 0$ para la reflexión de una onda- H que incide oblicuamente ($\kappa \neq 0$).

Solución. Supongamos que $\epsilon = 0$ en el punto $z = 0$. Cerca de este punto se tiene $\epsilon = az$ y la ecuación (68.4) toma la forma

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{dH}{dz} + (ak^2 z - \kappa^2)H = 0.$$

Según la teoría general de las ecuaciones diferenciales lineales, una de las soluciones de esta ecuación (llamémosla $H_1(z)$) carece de singularidades en $z = 0$ y su desarrollo en potencias de z comienza con el término z^2 :

$$H_1(z) = z^2 + \frac{1}{8}\kappa^2 z^4 - \frac{1}{15}ak^2 z^5 + \dots$$

Una segunda solución independiente posee una singularidad logarítmica, y su desarrollo es de la forma:

$$H_2(z) = H_1(z) \ln \kappa z + \frac{2}{\kappa^2} - \frac{2k^2 a}{3\kappa^2} z^3 + \dots$$

El campo $H(z)$ es el resultante de estas dos soluciones y, por consiguiente, tiende a una constante (llamémosla H_0) cuando $z \rightarrow 0$. En cambio, los términos principales en las componentes del campo eléctrico son

$$E_x = -\frac{i}{\epsilon k} \frac{\partial H}{\partial z} \cong -\frac{i\kappa^2 H_0}{ak} \ln \kappa z,$$

$$E_z = \frac{i}{\epsilon k} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\kappa}{\epsilon k} H \cong -\frac{\kappa H_0}{akz},$$

es decir, tienden a infinito cuando $z \rightarrow 0$. En realidad, claro está, debido a la inevitable presencia de una absorción en el medio, por pequeña que sea (es decir, de una parte imaginaria de ϵ que no se anula), el campo alcanza solamente valores relativamente altos (comparados con el fondo débil de las regiones vecinas), pero con todo finitos.

2. Por la «superficie» de separación entre dos medios con permitividades positiva y negativa (ϵ_1 y $-\epsilon_2$), respectivamente, puede propagarse una onda- H «superficial» que se amortigua al penetrar en uno y otro medio. Determinar la relación entre su frecuencia y el vector de onda.

Solución. Elijamos la frontera como plano xy y supongamos que la onda se propaga a lo largo del eje x , mientras el campo H es paralelo al eje y . Sea $z > 0$ el semiespacio ocupado por el medio

* Hay que hacer notar que este punto es una singularidad de la ecuación (68.4), y, por lo tanto, cerca de él deja de ser aplicable la aproximación de la óptica geométrica a pesar de que $f(z)$ no se anula y de que la condición (68.5) acaso se cumpla.

con permitividad positiva (ϵ_1) y $z < 0$ el semiespacio en el que es negativa (ϵ_2). Busquemos para el campo en la onda que se amortigua, cuando $z \rightarrow \pm\infty$, expresiones de la forma

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 e^{ikz - \kappa_1 z}, & \kappa_1 &= \sqrt{(k^2 - \omega^2 \epsilon_1 / c^2)} & \text{para } z > 0, \\ H_2 &= H_0 e^{ikz + \kappa_2 z}, & \kappa_2 &= \sqrt{(k^2 + \omega^2 |\epsilon_2| / c^2)} & \text{para } z < 0, \end{aligned}$$

donde k , κ_1 , κ_2 son reales. La condición de contorno que impone la continuidad de $H_y = H$ queda satisfecha, y la de la continuidad de E_x da

$$(1/\epsilon_1) \partial H_1 / \partial z = (1/\epsilon_2) \partial H_2 / \partial z \quad \text{para } z = 0,$$

o bien $\kappa_1 / \epsilon_1 = \kappa_2 / |\epsilon_2|$. Esta igualdad puede cumplirse solamente si queda satisfecha la condición $\epsilon_1 < |\epsilon_2|$

(y si $\epsilon_1 \epsilon_2 < 0$, como hemos supuesto). La relación entre k y ω es

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_1 |\epsilon_2| / c^2 (|\epsilon_2| - \epsilon_1).$$

En cuanto a la propagación de las ondas- E «superficiales», es fácil ver que resulta totalmente imposible.

§ 69. Principio de reciprocidad

La radiación de ondas electromagnéticas monocromáticas por una fuente constituida por un alambre delgado situado en un medio arbitrario, se describe por las ecuaciones

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}/c, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}/c + 4\pi \mathbf{j}_{\text{ex}}/c, \quad (69.1)$$

donde \mathbf{j}_{ex} es la densidad de las corrientes periódicas «extrañas» (respecto del medio) que circulan por el conductor.

Supongamos que en el medio se encuentran dos fuentes diferentes (de igual frecuencia); designaremos por los índices 1 y 2 los campos que crean estas dos fuentes separadamente. El medio puede ser no homogéneo y anisótropo, de manera arbitraria. Lo único que se supone en lo que sigue acerca de sus propiedades son las relaciones lineales $D_i = \epsilon_{ik} E_k$, $B_i = \mu_{ik} H_k$, con tensores simétricos ϵ_{ik} y μ_{ik} . En estas condiciones, es posible obtener una determinada relación que liga entre sí los campos de ambas fuentes y las corrientes extrañas que circulan por ellas. Multipliquemos las dos ecuaciones

$$\text{rot } \mathbf{E}_1 = ik \mathbf{B}_1, \quad \text{rot } \mathbf{H}_1 = -ik \mathbf{D}_1 + 4\pi \mathbf{j}_{\text{ex},1}/c$$

por \mathbf{H}_2 y \mathbf{E}_2 , respectivamente, y las mismas ecuaciones para los campos \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 , por $-\mathbf{H}_1$ y $-\mathbf{E}_1$. Sumando miembro a miembro todas estas ecuaciones, se obtendrá:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{H}_2 \cdot \text{rot } \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2 \cdot \text{rot } \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{E}_2) \\ &= (i\omega/c)(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2) + (i\omega/c)(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2) + \\ &\quad + (4\pi/c)(\mathbf{j}_{\text{ex},1} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{ex},2} \cdot \mathbf{E}_1). \end{aligned}$$

Pero $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2 = \mu_{ik} H_{1k} H_{2i} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2$, $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2$, de modo que los dos primeros términos en el segundo miembro de la igualdad se anulan. En cuanto al primer

miembro, lo transformaremos aplicando una conocida fórmula de análisis vectorial, y se encuentra así

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1] = (4\pi/c)(\mathbf{j}_{\text{ex},1} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{ex},2} \cdot \mathbf{E}_1).$$

Integremos esta igualdad en todo el espacio; la integral del primer miembro se convierte en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada y se anula. Obtendremos por ello

$$\int \mathbf{j}_{\text{ex},1} \cdot \mathbf{E}_2 dV_1 = \int \mathbf{j}_{\text{ex},2} \cdot \mathbf{E}_1 dV_2. \quad (69.2)$$

Las integrales en uno y otro miembro se extienden, respectivamente, tan sólo a los volúmenes de la primera y de la segunda fuente, dado que solamente en ellas son diferentes de cero las corrientes $\mathbf{j}_{\text{ex}}^{(1)}$ y $\mathbf{j}_{\text{ex}}^{(2)}$. Visto que los conductores son hilos delgados, cabe prescindir de la influencia de cada uno de ellos sobre el campo del otro y, por consiguiente, \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 en la fórmula (69.2) representan el campo de radiación de la primera y de la segunda fuente creado, cada uno de ellos, en el lugar en que se encuentra la otra como si ésta no existiera. La fórmula (69.2) es también la relación buscada y se conoce con el nombre de *teorema de reciprocidad*.

Si las dimensiones de las fuentes son pequeñas comparadas con la longitud de onda, al igual que con la distancia que las separa, la expresión del teorema de reciprocidad se puede simplificar. El campo de cada fuente varía poco para distancias que coinciden con las dimensiones de la otra fuente y en (69.2) se puede sacar \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 fuera del signo integral, escribiéndolos simplemente en la forma $\mathbf{E}_1(2)$ y $\mathbf{E}_2(1)$, donde 1 y 2 designan las posiciones en que se encuentran las fuentes:

$$\mathbf{E}_2(1) \cdot \int \mathbf{j}_{\text{ex},1} dV_1 = \mathbf{E}_1(2) \cdot \int \mathbf{j}_{\text{ex},2} dV_2.$$

La integral $\int \mathbf{j}_{\text{ex}} dV$ no es sino la derivada respecto del tiempo del momento dipolar total de la fuente, \mathcal{P} . Puesto que $\mathcal{P} = -i\omega\mathcal{P}$, tenemos en definitiva

$$\mathbf{E}_2(1) \cdot \mathcal{P}_1 = \mathbf{E}_1(2) \cdot \mathcal{P}_2. \quad (69.3)$$

Esta forma del teorema de reciprocidad es aplicable, naturalmente, tan sólo a la radiación dipolar. Pero si el momento dipolar de una fuente es igual a cero (o es excepcionalmente pequeño), la aproximación que se hizo al pasar de la fórmula general (69.2) a la (69.3) es insuficiente (véase el problema 1 de este párrafo).

PROBLEMAS

1. Deducir el teorema de reciprocidad para las radiaciones cuadrupolar y dipolar magnética.

Solución. Si $\int \mathbf{j}_{\text{ex}} dV = 0$, en las integrales (69.2) hay que tomar los términos siguientes del desarrollo:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV_1 &\cong \frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} \int x_{kj1i} dV_1 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) \int (x_{kj1i} + x_{ij1k}) dV_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} - \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) \int (x_{kj1i} - x_{ij1k}) dV_1; \end{aligned}$$

(para abreviar prescindimos del subíndice «ex» en \mathbf{j}). Introduciremos el tensor momento cuadrupolar y el vector momento magnético de acuerdo con

$$\begin{aligned} \dot{D}_{ik} &= -i\omega D_{ik} = \int [3(x_{ij}x_{k} + x_{kj}x_i) - 2\delta_{ik}\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}] dV, \\ \mathcal{M} &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV. \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación $\text{rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}$ y teniendo en cuenta que cerca de las fuentes es $\epsilon = \text{const}$ (en virtud de lo cual $\text{div } \mathbf{E} = 0$), se obtendrá

$$\int \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV = -\frac{i\omega}{12} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) D_{1,ik} + i\omega \mathbf{B}_2(1) \cdot \mathcal{M}_1.$$

Queda claro así que para los emisores cuadrupolares el teorema de reciprocidad se escribe:

$$\left(\frac{\partial E_{2i}^{(1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}^{(1)}}{\partial x_i} \right) D_{1,ik} = \left(\frac{\partial E_{1i}^{(2)}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{1k}^{(2)}}{\partial x_i} \right) D_{2,ik},$$

y para los dipolares magnéticos,

$$\mathbf{B}_2(1) \cdot \mathcal{M}_1 = \mathbf{B}_1(2) \cdot \mathcal{M}_2.$$

2. Determinar la intensidad de la radiación de una fuente dipolar situada en un medio homogéneo isótropo en función de la permitividad ϵ y la permeabilidad μ del mismo.

Solución. Como resultado de las substituciones

$$\mathbf{E} = \sqrt{(\mu/\epsilon)} \mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}', \quad \omega = \omega'/\sqrt{(\epsilon\mu)},$$

las ecuaciones (69.1) toman la forma

$$\text{rot } \mathbf{E}' = i\omega' \mathbf{H}'/c, \quad \text{rot } \mathbf{H}' = -i\omega' \mathbf{E}'/c + 4\pi \mathbf{j}_{\text{ex}}/c,$$

que no contienen ni ϵ ni μ . La solución de estas ecuaciones para la radiación dipolar conduce a un potencial vector del campo en la zona de ondas*

$$\mathbf{A}' = (1/cR_0) \int \mathbf{j}_{\text{ex}} dV$$

(R_0 es la distancia a partir de la fuente; aquí y en lo que sigue prescindimos de los factores de fase, carentes de importancia para el cálculo de la intensidad). De aquí se sigue, evidentemente, que para un \mathbf{j}_{ex} dado se puede escribir $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_0$, donde el subíndice 0 designa el campo de la fuente en el vacío. Para las magnitudes \mathbf{H}' , \mathbf{E}' tenemos:

$$\mathbf{H}' = i\mathbf{k}' \times \mathbf{A}' = i\sqrt{(\epsilon\mu)} \mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 = \sqrt{(\epsilon\mu)} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{H}'.$$

En consecuencia

$$\mathbf{H} = \sqrt{(\epsilon\mu)} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E} = \mu \mathbf{E}_0$$

y para la intensidad se obtiene $I = I_0 \mu^{3/2} \epsilon^{1/2}$ con lo que queda resuelto el problema planteado.

§ 70. Oscilaciones electromagnéticas en resonadores huecos

Consideremos el campo eléctrico en un espacio vacío limitado por paredes de un conductor perfecto. Las ecuaciones de un campo monocromático en el vacío se escriben:

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{E}/c. \quad (70.1)$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 67.

Por otra parte, las condiciones de contorno sobre la superficie de un cuerpo conductor perfecto (es decir, un cuerpo con impedancia $\zeta = 0$) nos dan:

$$E_t = 0, \quad H_n = 0. \quad (70.2)$$

Para resolver el problema basta considerar una de las magnitudes \mathbf{E} o \mathbf{H} . Eliminando, por ejemplo, \mathbf{H} entre las ecuaciones (70.1), obtenemos para \mathbf{E} la ecuación de onda

$$\Delta \mathbf{E} + (\omega^2/c^2)\mathbf{E} = 0, \quad (70.3)$$

a la que hay que añadir también la ecuación

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad (70.4)$$

que no es consecuencia de (70.3). Resolviendo estas ecuaciones con la condición de contorno $E_t = 0$, determinaremos el campo \mathbf{E} , hecho lo cual se calcula \mathbf{H} inmediatamente a partir de la primera de las ecuaciones (70.1), quedando además automáticamente satisfecha la condición de contorno $H_n = 0$.

Para una forma y dimensiones dadas de la cavidad, las ecuaciones (70.3) y (70.4) poseen solución tan sólo para un determinado conjunto de valores de ω . Estos valores se llaman *frecuencias propias* de las oscilaciones electromagnéticas del resonador en cuestión*. Cuando $\zeta = 0$ el campo electromagnético no penetra en el metal y en él no se producen pérdidas. Por ello, todas las oscilaciones propias son no amortiguadas, es decir, todas las frecuencias propias son reales. El número de frecuencias propias del resonador diferentes es infinito. El orden de magnitud de la menor de ellas, ω_1 , es c/l donde l son las dimensiones lineales de la cavidad. Esto resulta ya evidente por consideraciones de dimensionalidad, puesto que l es el único parámetro con dimensiones que caracteriza las condiciones del problema (para una forma del resonador dada). Por otra parte, las frecuencias propias altas ($\omega \gg c/l$) son muy próximas entre sí y el número de ellas por unidad de intervalo de valores de ω es igual a

$$V\omega^2/2\pi^2c^3;$$

este número depende solamente del volumen del resonador V , pero no de su forma**.

Los valores medios (respecto del tiempo) de la energía eléctrica y magnética del campo en el resonador vienen dados, respectivamente, por las integrales

$$\frac{1}{2} \int (|\mathbf{E}|^2/8\pi) dV \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \int (|\mathbf{H}|^2/8\pi) dV.$$

* Todas las fórmulas para un resonador cuya cavidad está ocupada por un medio dieléctrico no absorbente con valores de ϵ y μ diferentes de 1, se obtienen a partir de las fórmulas correspondientes a un resonador vacío substituyendo en éstas las magnitudes ω , \mathbf{E} , \mathbf{H} por $\omega\sqrt{\epsilon\mu}$, $\sqrt{\epsilon}\mathbf{E}$, $\sqrt{\mu}\mathbf{H}$, respectivamente. Está claro que es así en virtud de que, con esta transformación, las ecuaciones (70.1) se convierten en las ecuaciones de Maxwell correctas en un tal medio:

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}/c, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}/c.$$

En particular, la existencia de un medio material disminuye todas las frecuencias propias, dividiéndolas por $\sqrt{\epsilon\mu}$.

** Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 52.

Estas dos cantidades son iguales entre sí. En efecto, la primera de las ecuaciones (70.1) permite escribir

$$\int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV = (c^2/\omega^2) \int \text{rot } \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{E}^* dV.$$

La segunda integral la transformaremos por partes:

$$\int \text{rot } \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{E}^* dV = \oint \text{rot } \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{f} \times \mathbf{E} + \int \mathbf{E} \cdot \text{rot rot } \mathbf{E}^* dV.$$

Dado que sobre la frontera del volumen es $\mathbf{E}_t = 0$, la integral de superficie se anula y queda

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{H}|^2 dV &= \frac{c^2}{\omega^2} \int \mathbf{E} \cdot \text{rot rot } \mathbf{E}^* dV \\ &= - (c^2/\omega^2) \int \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{E}^* dV \end{aligned}$$

o bien, teniendo en cuenta (70.3),

$$\int |\mathbf{H}|^2 dV = \int |\mathbf{E}|^2 dV \quad (70.5)$$

que es lo que se trataba de demostrar*.

Las oscilaciones no amortiguadas en un resonador se obtienen partiendo de la hipótesis de que la impedancia de sus paredes es igual a cero. Veamos ahora cómo influye sobre las frecuencias propias el hecho de que las paredes posean una impedancia pequeña, pero en todo caso no nula.

Se puede calcular la energía media (respecto del tiempo) disipada en 1 s en las paredes del resonador como flujo de energía que incide sobre las paredes procedente del campo electromagnético en la cavidad. Teniendo en cuenta la condición de contorno (67.6) sobre la superficie de un cuerpo cuya impedancia es ζ , escribiremos la componente normal de la densidad de flujo de energía en la forma:

$$\mathcal{S}_n = (c/8\pi) \text{Re}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) = c\zeta' |\mathbf{H}_t|^2 / 8\pi$$

(ζ' es la parte real de ζ). En esta expresión, que contiene ya el pequeño factor ζ' , en primera aproximación cabe interpretar \mathbf{H} como el campo que se obtiene al resolver el problema con $\zeta = 0$. La energía total que se disipa viene dada por la integral

$$\frac{c}{8\pi} \oint \zeta' |\mathbf{H}|^2 df, \quad (70.6)$$

extendida a toda la superficie interior del resonador. El coeficiente de amortiguamiento de la amplitud del campo con el tiempo se obtiene dividiendo esta cantidad por el doble de la energía total del campo, que es igual a

$$\frac{1}{2} \int (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) dV / 8\pi = \int |\mathbf{H}|^2 dV / 8\pi.$$

* En todo esto entendemos por \mathbf{E} y \mathbf{H} las intensidades que corresponden a una determinada frecuencia propia. No resulta tampoco difícil demostrar que los campos correspondientes a dos frecuencias propias diferentes ω_a y ω_b satisfacen la relación de ortogonalidad:

$$\int \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b^* dV = \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b^* dV = 0.$$

El coeficiente de amortiguamiento se determina por la parte imaginaria $|\omega''|$ de la frecuencia compleja $\omega = \omega' + i\omega''$ *. Escribiendo la fórmula en forma compleja:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{1}{2}ic \frac{\oint \zeta |\mathbf{H}|^2 df}{\int |\mathbf{H}|^2 dV} \quad (70.7)$$

(ω y ω_0 son los valores de la frecuencia cuando se tiene en cuenta ζ y cuando ésta se supone igual a cero), podemos determinar no sólo el coeficiente de amortiguamiento, sino también los desplazamientos de las frecuencias propias. Éstos, como vemos, vienen determinados por la parte imaginaria de ζ . En el § 67 se demostró que, de ordinario, se tiene $\zeta'' < 0$; en consecuencia, el desplazamiento de las frecuencias propias se produce en el sentido de su disminución.

En la práctica puede ser más conveniente al efectuar los cálculos transformar la integral de volumen que aparece en el denominador de (70.7) en una integral de superficie. El resultado de la transformación es**:

$$\int |\mathbf{H}|^2 dV = \frac{1}{2} \oint (|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{E}|^2) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}. \quad (70.8)$$

PROBLEMAS

1. Determinar las frecuencias propias de las oscilaciones en un resonador cuyas paredes constituyen un conductor perfecto y que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular.

Solución. Elijamos los ejes x, y, z de modo que coincidan con tres aristas del paralelepípedo, cuyas longitudes son a_1, a_2, a_3 . Las soluciones de las ecuaciones (70.3) y (70.4) que satisfacen la condición de contorno $E_t = 0$ son:

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t} \quad (1)$$

y análogamente para E_y, E_z , donde

$$k_x = n_1 \pi / a_1, \quad k_y = n_2 \pi / a_2, \quad k_z = n_3 \pi / a_3 \quad (2)$$

(n_1, n_2, n_3 son números enteros), las constantes A_1, A_2, A_3 están ligadas por la relación

$$A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0, \quad (3)$$

* En radiotécnica se suele introducir, en vez del coeficiente de amortiguamiento $|\omega''|$, la llamada *calidad* del resonador, definida por la razón $\omega' / 2|\omega''|$.

** Dado que el vector \mathbf{H} es tangente a la superficie, puede escribirse

$$\oint (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) = \oint (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) - \oint (\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{f}) - \oint (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}).$$

Las integrales que aparecen en el segundo miembro se transforman en integrales de volumen mediante el cambio $d\mathbf{f} \rightarrow dV \cdot \nabla$; utilizando además las ecuaciones (70.1), se obtendrá

$$\oint (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) = ik \int \mathbf{r} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}^* - \mathbf{H}^* \times \mathbf{E}) dV + \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV.$$

Análogamente, teniendo en cuenta la identidad $\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times d\mathbf{f}) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) d\mathbf{f} = 0$ (que es consecuencia de la condición de contorno $E_t = 0$), tenemos

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) &= - \oint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) + \oint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{f}) + \oint (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}) \\ &= ik \int \mathbf{r} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}^* - \mathbf{H}^* \times \mathbf{E}) dV - \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV. \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro las dos igualdades obtenidas y teniendo en cuenta (70.5), resulta la fórmula (70.8).

y las frecuencias propias vienen dadas por

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

El campo magnético se calcula a partir de (1):

$$H_x = -(ic/\omega)(A_3k_y - A_2k_z) \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t},$$

y análogamente para H_y , H_z .

Si los tres números n_1, n_2, n_3 , o dos de ellos, son iguales a cero, se tiene $E = 0$. Por consiguiente, a la primera frecuencia (la menor) corresponde una oscilación en la que uno de estos números es igual a cero, y los otros dos, iguales a la unidad.

Dada la existencia de la relación (3), la solución (1) (con valores dados de n_1, n_2, n_3 diferentes de cero) contiene tan sólo dos constantes arbitrarias independientes, es decir, cada frecuencia propia es doblemente degenerada. En cambio, las frecuencias para las que uno de los números n_1, n_2, n_3 es igual a cero no son degeneradas.

2. Determinar las frecuencias de las oscilaciones dipolar-eléctricas y dipolar-magnéticas en un resonador esférico (de radio a).

Solución. En una onda esférica estacionaria del tipo dipolar-eléctrico los campos E y H tienen la forma*

$$E = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right), \quad H = -ike^{-i\omega t} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right),$$

donde \mathbf{b} es un vector constante y $k = \omega/c$. La condición de contorno $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ para $r = a$ conduce a la ecuación

$$\operatorname{ctg} ka = (ka)^{-1} - ka.$$

Su raíz mínima es $ka = 2,74$. La frecuencia $\omega = 2,74 c/a$ es la menor de todas las frecuencias propias del resonador esférico.

En una onda esférica estacionaria del tipo dipolar-magnético,

$$E = ike^{-i\omega t} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right), \quad H = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right).$$

La condición de contorno para E conduce a la ecuación

$$\operatorname{tg} ka = ka.$$

Su primera raíz es $ka = 4,49$.

§ 71. Propagación de las ondas electromagnéticas en las guías de onda

En contraste con los resonadores que hemos estudiado en el párrafo que precede, cuyos volúmenes son finitos, las *guías de onda* constituyen una cavidad de longitud infinita, es decir, un tubo vacío infinitamente largo**. Mientras que las oscilaciones propias en un resonador son ondas estacionarias, en una guía de onda ésta es «estacionaria» tan sólo en las direcciones transversales, mientras que en la dirección a lo largo de la longitud del tubo es posible la propagación de ondas móviles.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 72.

** En lo que sigue escribimos todas las fórmulas para una guía de onda vacía. El paso a las fórmulas para una guía de onda que contiene en su interior un dieléctrico no absorbente, se lleva a cabo mediante la transformación indicada en la nota de la pág. 344.

Consideremos una guía de onda recta cuya sección transversal tiene una forma arbitraria (pero simplemente conexa) que no varía a lo largo de su longitud. Supondremos primero que las paredes de la guía constituyen un conductor perfecto. Tomaremos el eje z en la misma dirección que las generatrices de la guía de onda. En una onda que se propaga a lo largo del eje z , la dependencia de todas las magnitudes respecto de z viene dada por un factor de la forma $e^{(ik_z z)}$ con k_z constante.

Todas las ondas electromagnéticas posibles en una tal guía de onda se pueden clasificar en dos tipos: en uno de ellos es $H_z = 0$, mientras que en el otro se tiene $E_z = 0$ (Rayleigh, 1897). Las ondas del primer tipo, con un campo magnético puramente transversal, se llaman *ondas de tipo eléctrico* u *ondas-E*. En cambio, las ondas con un campo eléctrico puramente transversal, reciben el nombre de *ondas de tipo magnético* u *ondas-H**.

Consideremos en primer lugar las ondas-E; las componentes x e y de las ecuaciones (70.1) dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y &= i\frac{\omega}{c} H_x, & -\frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x &= i\frac{\omega}{c} H_y, \\ ik_z H_y &= i\frac{\omega}{c} E_x, & ik_z H_x &= -i\frac{\omega}{c} E_y.\end{aligned}$$

De aquí se sigue

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, & H_y &= \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x},\end{aligned}\tag{71.1}$$

donde se ha introducido la notación

$$\kappa^2 = (\omega^2/c^2) - k_z^2.$$

De esta manera, en una onda-E todas las componentes transversales de \mathbf{E} y \mathbf{H} se pueden expresar en función de la componente longitudinal del campo eléctrico. Ésta, sin embargo, debe determinarse resolviendo una ecuación de onda que se reduce a la ecuación en dos dimensiones

$$\Delta_2 E_z + \kappa^2 E_z = 0\tag{71.2}$$

(Δ_2 es el operador bidimensional de Laplace). Las condiciones de contorno que se asocian a esta ecuación suponen la anulación de las componentes tangenciales de \mathbf{E} sobre la pared de la guía. Para ello basta exigir que

$$E_z = 0 \text{ sobre el contorno de la sección transversal.}\tag{71.3}$$

* Las ondas-E y las ondas-H se llaman también, respectivamente, ondas *TM* y *TE* (transversales magnéticas y transversales eléctricas).

Según las fórmulas (71.1), el vector bidimensional de componentes E_x , E_y es proporcional al gradiente en dos dimensiones de la magnitud E_z . Por ello, cuando se cumple la condición (71.3) se anula automáticamente también la componente tangencial de \mathbf{E} en el plano xy .

De manera análoga, en una onda- H las componentes transversales de \mathbf{E} y \mathbf{H} pueden expresarse en función de la componente longitudinal del campo magnético de acuerdo con las fórmulas:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_x &= \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, & E_y &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (71.4)$$

En cuanto al campo longitudinal H_z , éste viene dado por las soluciones de la ecuación

$$\Delta_2 H_z + \kappa^2 H_z = 0 \quad (71.5)$$

con la condición de contorno

$$\partial H_z / \partial n = 0 \text{ sobre el contorno de la sección transversal.} \quad (71.6)$$

Esta condición permite asegurar, según las fórmulas (71.4), la anulación de la componente normal de \mathbf{H} .

Así pues, el problema de determinar el campo electromagnético en una guía de ondas se reduce a hallar las soluciones de una ecuación de onda bidimensional de la forma $\Delta_2 f + \kappa^2 f = 0$ con la condición en los límites $f = 0$ o $\partial f / \partial n = 0$ sobre el contorno de la sección. Para un contorno dado, tales soluciones existen tan sólo para valores «propios» completamente determinados del parámetro κ^2 .

A cada valor propio κ^2 corresponde la dependencia

$$\omega^2 = c^2(k_z^2 + \kappa^2) \quad (71.7)$$

entre la frecuencia ω y el «vector de onda» k_z de la onda. La velocidad de propagación en el sentido longitudinal de la guía viene dada por la derivada

$$u_z = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{k_z^2 + \kappa^2}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}. \quad (71.8)$$

Para un κ dado, u_z toma valores entre 0 y c cuando k_z varía entre 0 y ∞ .

La densidad media (respecto del tiempo) del flujo de energía a lo largo de la guía coincide con la componente z del vector de Poynting. Un cálculo simple, utilizando las fórmulas (71.1), da para una onda- E

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_z = \frac{\omega k_z}{8\pi \kappa^4} |\operatorname{grad}_2 E_z|^2.$$

El flujo total de energía q se obtiene integrando \bar{S}_z sobre la superficie sección de la guía de onda. Se tiene

$$\int |\text{grad}_2 E_z|^2 df = \oint E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int E_z^* \Delta_2 E_z df.$$

La primera integral se extiende al contorno de la sección, y resulta igual a cero en virtud de la condición de contorno $E_z = 0$. En la segunda integral substituiremos $\Delta_2 E_z$ por $-\kappa^2 E_z$ y obtenemos en definitiva

$$q = \frac{\omega k_z}{8\pi\kappa^2} \int |E_z|^2 df. \quad (71.9)$$

Para una onda- H se obtiene esta misma expresión con H_z en vez de E_z .

De manera análoga se puede calcular la densidad de energía electromagnética W (por unidad de longitud de la guía de onda). Sin embargo, es más fácil obtener W directamente a partir de q , puesto que debe tenerse $q = Wu_z$. Así, de (71.8) y (71.9) resulta

$$W = \frac{\omega^2}{8\pi\kappa^2 c^2} \int |E_z|^2 df. \quad (71.10)$$

De (71.7) se sigue que para cada tipo de ondas (que corresponden a un determinado valor de κ^2) existe un valor de la frecuencia, el mínimo posible, igual a $c\kappa$. Para frecuencias menores resulta imposible la propagación del tipo dado de ondas. Pero entre todos los valores propios κ hay uno, el κ_{\min} , que es el menor de todos y a la vez diferente de cero (véase más adelante). Por ello, llegamos a la conclusión de que existe un límite inferior para las frecuencias, $\omega_{\min} = c\kappa_{\min}$, por debajo del cual es totalmente imposible la propagación de las ondas, cualesquiera que sean, a lo largo de la guía. En orden de magnitud, es $\omega_{\min} \sim c/a$, donde a caracteriza las dimensiones transversales del tubo.

Lo que acabamos de afirmar, sin embargo, vale solamente para las guías de onda cuya sección transversal es simplemente conexa, las únicas que hemos considerado hasta ahora. La situación cambia totalmente cuando la sección transversal define un dominio múltiplemente conexo*. En tales guías, junto con las ondas- E y ondas- H descritas más arriba, resulta posible la propagación de un tipo más de ondas cuyas frecuencias no están limitadas por ninguna condición.

Este tipo de ondas, llamadas *ondas principales*, se caracteriza por la condición $k_z = k$ (es decir, $\kappa = 0$); su velocidad de propagación coincide con la velocidad de la luz c . Determinemos cuáles son las propiedades fundamentales de estas ondas; veremos al mismo tiempo por qué este tipo de ondas es imposible cuando la sección de la guía es simplemente conexa.

Todas las componentes del campo en una onda principal satisfacen la ecuación

* Puede tratarse tanto del espacio entre dos tubos, como del espacio exterior a dos conductores paralelos.

de Laplace en dos dimensiones $\Delta_2 f = 0$. Con la condición de contorno $f = 0$, la única solución de esta ecuación que es regular en todo el dominio (simplemente o múltiplemente conexo) es la $f \equiv 0$. Por consiguiente, en una onda principal se tiene $E_z = 0$.

En cambio, para la condición de contorno $\partial f / \partial n = 0$, la solución regular es la $f = \text{const}$. Sin embargo, es fácil ver que para $f = H_z$ esta constante sólo puede ser igual a cero (recordemos que const designa una cantidad que no depende ni de x ni de y ; la dependencia respecto de z y t viene dada, en cambio, por factor $e^{i(k_z z - \omega t)}$). En efecto, integrando la ecuación

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{i\omega}{c} H_z = 0$$

en el dominio de la sección, obtenemos

$$\oint H_n dl + (i\omega/c) \int H_z df = 0;$$

en virtud de la igualdad $H_n = 0$ sobre el contorno y de que H_z es constante en todo el dominio, se sigue que $H_z = 0$.

Así pues, una onda principal es puramente transversal. Cuando $E_z = H_z = 0$, las componentes x e y de las ecuaciones (70.1) dan

$$H_x = -E_y, \quad H_y = E_x, \quad (71.11)$$

es decir, los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son perpendiculares entre sí e iguales en módulo. Para determinar estos campos tenemos las ecuaciones

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{rot } \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0,$$

con la condición de contorno $E_t = 0$.

Vemos así que la dependencia de \mathbf{E} (y con él, también de \mathbf{H}) respecto de x, y , viene dada por la solución de un problema electrostático bidimensional: $\mathbf{E} = -\nabla_2 \phi$, donde el potencial ϕ satisface la ecuación $\Delta_2 \phi = 0$ con la condición de contorno $\phi = \text{const}$. En un dominio simplemente conexo esta condición de contorno conduce a $\phi = \text{const}$ (y por lo tanto $\mathbf{E} = 0$) como única solución regular en todo el dominio. Esto mismo prueba la imposibilidad de la propagación de este tipo de ondas por guías cuya sección transversal sea simplemente conexas. En un dominio múltiplemente conexo, en cambio, el valor const en la condición de contorno no tiene por qué ser necesariamente el mismo sobre los diferentes contornos y entonces la ecuación de Laplace posee soluciones no triviales. En tal caso la distribución del campo eléctrico en la sección transversal de la guía de onda coincide con la de un campo electrostático plano entre las armaduras de un condensador que se encuentran sometidas a una diferencia de potenciales dada.

Hasta aquí hemos supuesto que las paredes de la guía están constituidas por un conductor perfecto*. Ahora bien, que la pared presente una impedancia que es

* Obsérvese, en particular, que sólo en estas condiciones es posible una diferenciación rigurosa entre ondas con $E_z = 0$ y ondas con $H_z = 0$.

pequeña, pero con todo no nula, conduce a la aparición de pérdidas y, con ello, al amortiguamiento de la onda en su propagación a lo largo de la guía. El coeficiente de amortiguamiento puede calcularse de manera análoga a como se calculó en el párrafo precedente el amortiguamiento de las ondas electromagnéticas, con el tiempo, en un resonador.

La cantidad de energía disipada en 1 s en las paredes de la guía (por unidad de longitud de la misma) viene dada por la integral

$$(c/8\pi)\zeta'\oint|\mathbf{H}|^2 dL,$$

extendida a lo largo del contorno de la sección; \mathbf{H} es el campo magnético calculado en la hipótesis de que sea $\zeta = 0$. Dividiendo esta cantidad por el doble del flujo de energía q a lo largo de la guía, obtendremos el coeficiente de amortiguamiento buscado α . De acuerdo con esta definición, α da la rapidez de amortiguamiento de la onda, cuya amplitud disminuye a lo largo de la guía como $e^{-\alpha z}$.

Expresando todas las magnitudes en función de E_z o de H_z de acuerdo con las fórmulas (71.1) o (71.4), obtendremos las fórmulas siguientes para el coeficiente de absorción de una onda- E

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{2\kappa^2 k_z c} \frac{\oint |\text{grad}_2 E_z|^2 dL}{\int |E_z|^2 df} \quad (71.12)$$

y de una onda- H

$$\alpha = \frac{c\kappa^2\zeta'}{2k_z\omega} \frac{\oint \{|H_z|^2 + (k_z^2/\kappa^4)|\text{grad}_2 H_z|^2\} dL}{\int |H_z|^2 df}. \quad (71.13)$$

En la práctica, para efectuar el cálculo puede resultar conveniente transformar las integrales de superficie que aparecen en el denominador en integrales curvilíneas. A continuación damos las fórmulas que se obtienen de esta manera y que se deducen de modo análogo a como se obtuvo la fórmula (70.8):

$$\begin{aligned} \int |E_z|^2 df &= \frac{1}{2\kappa^2} \oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) |\text{grad}_2 E_z|^2 dL, \\ \int |H_z|^2 df &= \frac{1}{2\kappa^2} \oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \{\kappa^2 |H_z|^2 - |\text{grad}_2 H_z|^2\} dL. \end{aligned} \quad (71.14)$$

Cuando $k_z \rightarrow 0$ (es decir, cuando la frecuencia $\omega \rightarrow c\kappa$), las expresiones (71.12) y (71.13) tienden a infinito. Sin embargo, estas fórmulas dejan entonces de ser aplicables, ya que al deducirlas se supuso que κ es pequeño comparado con k_z .

Las fórmulas (71.12) y (71.13) no valen para una onda principal (en una guía de onda cuya sección transversal es múltiplemente conexa), en la cual son iguales a cero todas las cantidades E_z , H_z y κ . En este caso, todas las componentes del campo pueden expresarse en función de un potencial escalar ϕ . Teniendo en cuenta que, en una onda principal, los campos \mathbf{H} y $\mathbf{E} = -\nabla_2\phi$ son perpendiculares entre sí

y de igual módulo, obtendremos para su coeficiente de absorción la expresión que sigue:

$$\alpha = \frac{\zeta' \int |\text{grad}_2 \phi|^2 dl}{2 \int |\text{grad}_2 \phi|^2 df}. \quad (71.15)$$

La propagación de una onda principal a lo largo de la guía de onda puede estudiarse de manera relativamente simple también en aquellos casos en que su coeficiente de absorción no es pequeño (de modo que la fórmula (71,15) resulta inaplicable), con tal de que la longitud de onda c/ω sea grande comparada con las dimensiones transversales de la guía.

Como se indicó más arriba, el campo eléctrico transversal en una onda principal corresponde (en cada instante) al campo electrostático en el condensador formado por las paredes de la guía cargadas con cargas iguales y de signos contrarios. Designaremos estas cargas, referidas a la unidad de longitud de la guía, por $\pm e(z)$. Están ligadas con las corrientes $\pm J(z)$ que recorren las paredes de la guía por la «ecuación de continuidad»

$$\partial e / \partial t = - \partial J / \partial z,$$

o bien, para un campo monocromático,

$$i\omega e = \partial J / \partial z.$$

Sea, además, C la capacidad de la guía por unidad de longitud. La «diferencia de potenciales» entre sus paredes es $\phi_2 - \phi_1 = e/C$; derivándola respecto de z , obtendremos la f.e.m. que mantiene el paso de la corriente por las paredes (recordemos que cuando existe absorción el campo no es puramente transversal). Igualando la f.e.m. a ZJ (Z es la impedancia por unidad de longitud de la guía), tendremos

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e}{C} \right) = ZJ$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial J}{\partial z} \right) + i\omega ZJ = 0. \quad (71.16)$$

Substituyendo aquí $Z = R - i\omega L/c^2$ (donde R y L son la resistencia y la auto-inducción de la guía por unidad de longitud), podemos pasar de componentes monocromáticas de la corriente a una función arbitraria del tiempo. Admitiendo también que la capacidad C es constante a lo largo de la guía, se obtendrá la llamada *ecuación de los telegrafistas*:

$$\frac{1}{C} \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{L}{c^2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0. \quad (71.17)$$

Cuando no existe absorción ($R = 0$) esta ecuación, como debía ser, se reduce a la ecuación de onda correspondiente a una velocidad de propagación igual a $\sqrt{c^2/LC} = c^*$.

PROBLEMAS

1. Hallar los valores de κ para ondas que se propagan por una guía de sección rectangular (longitudes de los lados a , b). Hallar los coeficientes de amortiguamiento de estas ondas.

Solución. En las ondas- E^{**} es

$$E_z = \text{const} \times \sin k_x x \sin k_y y,$$

donde

$$k_x = n_1 \pi / a, \quad k_y = n_2 \pi / b,$$

y n_1 , n_2 son números enteros positivos. En las ondas- H ,

$$H_z = \text{const} \times \cos k_x x \cos k_y y,$$

pudiendo ser uno de los números n_1 , n_2 igual a cero. En ambos tipos de ondas

$$\kappa^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2).$$

El menor valor de κ corresponde a la onda H_{10} (los subíndices indican los valores de n_1 , n_2) y es igual a $\kappa_{\min} = \pi/a$ (supuesto que $a > b$).

Los coeficientes de amortiguamiento se calculan según las fórmulas (71.12) y (71.13); para las ondas- E son iguales a

$$\alpha = 2\zeta' \omega (k_x^2 b + k_y^2 a) / c \kappa^2 k_z a b,$$

para la onda $H_{n_1 0}$

$$\alpha = \frac{\zeta' \omega}{c k_z a b} \left(a + \frac{2\kappa^2}{k^2} b \right),$$

y para las ondas $H_{n_1 n_2}$ (n_1 , $n_2 \neq 0$)

$$\alpha = \frac{2c\kappa^2 \zeta'}{\omega k_z a b} \left[a + b + \frac{k_z^2}{\kappa^4} (k_x^2 a + k_y^2 b) \right].$$

2. Lo mismo para una guía de sección circular (de radio a).

Solución. Resolviendo la ecuación de onda en coordenadas polares r , ϕ , obtendremos en las ondas- E

$$E_z = \text{const} \times J_n(\kappa r) \frac{\sin n\phi}{\cos n\phi}$$

con la condición $J_n(\kappa a) = 0$, que determina los valores de κ . En las ondas- H , esta misma fórmula da H_z , pero los valores de κ se determinan por la condición $J'_n(\kappa a) = 0$. El menor valor κ lo posee la primera de las ondas H_1 ; es igual a $\kappa_{\min} = 1,84/a$.

El coeficiente de amortiguamiento se calcula mediante las fórmulas (71.12)-(71.14); para las ondas- E es igual a

$$\alpha = \omega \zeta' / c a k_z,$$

y para las H ,

$$\alpha = \frac{c \zeta' \kappa^2}{\omega k_z a} \left[1 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2 \kappa^2 (a^2 \kappa^2 - n^2)} \right].$$

* La igualdad $LC = 1$ se sigue de la equivalencia matemática del problema de determinar $1/C$ y L para una forma dada de la sección transversal. El campo eléctrico y magnético entre las superficies de conductores perfectos son perpendiculares en dirección e iguales en módulo (véase (71.11)) y el valor de éste sobre las propias superficies determina, en el primer caso, la densidad de carga, y en el segundo, la densidad de corriente. Por ello, coinciden también los coeficientes de proporcionalidad ($1/C$ y L) entre la energía del campo y los cuadrados de las cargas o corrientes, respectivamente.

** Prescindimos en todas las fórmulas del factor $\exp(ik_z z - i\omega t)$.

§ 72. Dispersión de las ondas electromagnéticas por pequeñas partículas

Consideremos la dispersión de las ondas electromagnéticas por partículas macroscópicas cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de la onda dispersada $\lambda \sim c/\omega$ (Rayleigh, 1871). Cuando se cumple esta condición, el campo electromagnético cerca de la partícula se puede considerar homogéneo. Al encontrarse en un campo periódico homogéneo, una partícula adquiere determinados momentos eléctrico y magnético \mathcal{P} y \mathcal{M} , cuya dependencia respecto del tiempo viene dada por factores $e^{-i\omega t}$. La onda dispersada puede describirse como radiación emitida por estos momentos variables. A grandes distancias R de la partícula (grandes comparadas con λ), en la zona de ondas, el campo de la onda dispersada viene dado por las fórmulas*

$$\begin{aligned}\mathbf{H}' &= \frac{\omega}{c^2 R} \{ \mathbf{n} \times \mathcal{P} + \mathbf{n} \times (\mathcal{M} \times \mathbf{n}) \}, \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{H}' \times \mathbf{n},\end{aligned}\tag{72.1}$$

donde el vector unitario \mathbf{n} define la dirección de dispersión y para los valores de \mathcal{P} y \mathcal{M} deben tomarse los correspondientes al instante $t - R/c$ (el campo de la onda dispersada lo designaremos por letras con apóstrofo, mientras que el de la onda incidente se representará por letras sin él). El valor medio (respecto del tiempo) de la intensidad de la radiación dispersada en el ángulo sólido $d\Omega$, es igual a

$$dI = \frac{1}{2} c |\mathbf{H}'|^2 R^2 d\Omega / 4\pi;$$

dividiendo por la densidad de flujo de energía en la onda incidente

$$c |\mathbf{H}|^2 / 8\pi = c |\mathbf{E}|^2 / 8\pi,$$

obtendremos la *sección eficaz de dispersión*.

El cálculo de \mathcal{P} y \mathcal{M} es particularmente simple si el tamaño de las partículas es pequeño no solamente comparado con λ , sino también respecto de la «longitud de onda» δ que corresponde a la frecuencia ω en el material de la partícula. En este caso, se puede calcular la polarizabilidad de la partícula mediante las fórmulas válidas para un campo estático homogéneo exterior, con la diferencia, claro está, de que para ϵ y μ hay que tomar no los valores estáticos, sino los valores correspondientes a la frecuencia dada ω . Si, como ocurre a menudo, μ difiere poco de la unidad, en la fórmula (72.1) cabe prescindir del término dipolar-magnético.

Así, para una partícula esférica de radio a tenemos (véase (8.9))

$$\mathcal{P} = V \alpha \mathbf{E}, \quad \alpha = 3(\epsilon - 1)/4\pi(\epsilon + 2),\tag{72.2}$$

y la sección eficaz de dispersión vale

$$d\sigma = (\omega/c)^4 |\alpha|^2 V^2 \sin^2 \theta d\Omega,\tag{72.3}$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 79.

donde θ es el ángulo formado por la dirección de dispersión \mathbf{n} y la del campo eléctrico \mathbf{E} de la onda incidente polarizada linealmente. La sección eficaz total es

$$\sigma = 8\pi|\alpha|^2\omega^4V^2/3c^4. \quad (72.4)$$

La dependencia de la sección eficaz respecto de la frecuencia se encuentra implícita tanto en el factor ω^4 , como en la polarizabilidad. Si las frecuencias son tan pequeñas que la dispersión de α no se manifiesta, dicha sección eficaz es proporcional a ω^4 . Obsérvese también que la sección eficaz es proporcional al cuadrado del volumen de la partícula.

Si la onda incidente no está polarizada (luz natural), para obtener la sección eficaz diferencial hay que promediar (72.3) respecto de todas las direcciones del vector \mathbf{E} en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda incidente (es decir, a su vector de onda \mathbf{k}). Designando por ϑ y ϕ el ángulo polar y el acimut de \mathbf{n} respecto de \mathbf{k} (contando ϕ a partir del plano \mathbf{k}, \mathbf{E}), tenemos $\cos \theta = \sin \vartheta \cos \phi$ (fig. 31), de modo que

$$d\sigma = (\omega/c)^4|\alpha|^2V^2(1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi) d\phi. \quad (72.5)$$

Promediando respecto de ϕ obtendremos la siguiente fórmula para la sección eficaz de dispersión de una onda no polarizada*:

$$d\sigma = \frac{1}{2}(\omega/c)^4|\alpha|^2V^2(1 + \cos^2 \vartheta) d\phi, \quad (72.6)$$

donde ϑ es el ángulo entre la dirección de incidencia y la de dispersión.

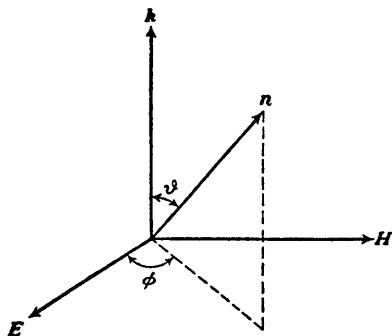


FIG. 31

De la fórmula (72.5) es fácil deducir también el grado de despolarización de la luz dispersada. Observemos, en efecto, que para una dirección dada de \mathbf{E} la dirección \mathbf{E}' se encuentra en el plano \mathbf{E}, \mathbf{n} . Por ello, la dirección del campo eléctrico \mathbf{E}' en la onda dispersada se encontrará en el plano \mathbf{k}, \mathbf{n} (*plano de dispersión*) o será perpendicular a él en los casos en que el acimut ϕ del vector \mathbf{E} respecto del plano \mathbf{k}, \mathbf{n} es igual a 0 o a $\pi/2$, respectivamente. Sean I_{\parallel} e I_{\perp} las intensidades de la radia-

* Para futuras referencias haremos notar la fórmula $\overline{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \vartheta)$.

ción dispersada con estas dos polarizaciones; el grado de despolarización se determina como razón de la menor de estas cantidades a la mayor. Según (72.5) obtenemos

$$I_{\parallel}/I_{\perp} = \cos^2 \vartheta. \quad (72.7)$$

Si la partícula dispersora posee una permitividad grande, se tendrá $\delta \sim c/\omega \sqrt{|\epsilon|} \ll \lambda$. El tamaño de la partícula puede entonces ser pequeño comparado con λ y a la vez no pequeño en relación con δ . En primera aproximación respecto de $1/\epsilon$, el momento eléctrico de la partícula se puede calcular en tal caso simplemente como momento de un conductor ($\epsilon \rightarrow \infty$) en un campo exterior constante homogéneo. En cambio, al calcular el momento magnético en estas condiciones, es esencial tener en cuenta las corrientes de inducción que aparecen en la partícula y el problema no queda reducido a un problema de estática; en vez de esto hay que buscar la solución de la ecuación (63.2)

$$\Delta \mathbf{H} + \epsilon \omega^2 \mathbf{H}/c^2 = 0 \quad (72.8)$$

(suponemos $\mu = 1$) que lejos de la partícula se reduce al campo de la onda incidente. Los momentos magnético y eléctrico resultan ser de igual orden de magnitud y en la fórmula (72.1) hay que conservar ambos términos. La distribución angular y el valor de la dispersión cambian en este caso fundamentalmente en comparación con el considerado más arriba (véase problema 2).

PROBLEMAS

1. Luz polarizada linealmente es dispersada por pequeñas partículas orientadas al azar cuyo tensor de polarizabilidad eléctrica posee tres valores principales distintos. Determinar el coeficiente de despolarización de la luz dispersada.

Solución. Prescindiendo, como en el texto, del momento magnético, de (72.1) se sigue

$$\mathbf{E}' = (\omega^2/c^2 R)(\mathbf{n} \times \mathcal{P}) \times \mathbf{n}.$$

El coeficiente de despolarización buscado se obtiene como razón de los valores principales del tensor bidimensional

$$I_{\alpha\beta} = \overline{E'_\alpha E'_\beta{}^*},$$

donde el trazo horizontal designa el promedio respecto de las orientaciones de las partículas dispersoras para una dirección de dispersión dada \mathbf{n} , y los índices α y β toman dos valores en un plano perpendicular a \mathbf{n}^* . Sin embargo, es más conveniente promediar el tensor tridimensional $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*$, y una vez hecho esto proyectarlo sobre un plano perpendicular a \mathbf{n} ; estas componentes del tensor $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*$ son proporcionales a las correspondientes componentes $I_{\alpha\beta}$.

Substituyendo $\mathcal{P}_i = \alpha_{ik} E_k$, tenemos

$$\overline{\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*} = \overline{\alpha_{ik} \alpha_{km}^*} E_l E_m^*.$$

Para efectuar el promedio nos valdremos de la fórmula

$$\overline{\alpha_{ik} \alpha_{lm}^*} = A \delta_{ik} \delta_{lm} + B(\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}).$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 50.*

Esta es la forma más general de un tensor de cuarto orden simétrico respecto de los pares de índices i, k y l, m y que contiene solamente constantes escalares. Estas últimas se determinan a partir de dos igualdades obtenidas contrayendo el tensor, una vez respecto del par $i = k, l = m$, y la otra vez respecto de $i = l, k = m$; dichas constantes son iguales a

$$A = \frac{2|\alpha_{ii}|^2 - |\alpha_{ik}|^2}{15} = \frac{1}{15}\{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + 4\operatorname{Re}(\alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1\alpha_3^* + \alpha_2\alpha_3^*)\},$$

$$B = \frac{3|\alpha_{ik}|^2 - |\alpha_{ii}|^2}{30} = \frac{1}{15}\{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - \operatorname{Re}(\alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1\alpha_3^* + \alpha_2\alpha_3^*)\},$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son los valores principales del tensor α_{ik} .

En una onda polarizada linealmente, la amplitud del campo $E^{(i)}$ (supondremos que se ha prescindido del factor temporal $e^{-i\omega t}$) puede siempre definirse como cantidad real. Se obtiene entonces

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^* = (A+B)E_i E_k + B\delta_{ik}E^2. \quad (1)$$

Supongamos que las direcciones de \mathbf{n} y del eje z coinciden y que el plano xz pasa por los vectores \mathbf{n} y \mathbf{E} ; estos ejes son ejes principales del tensor $I_{\alpha\beta}$. Tomando las componentes adecuadas del tensor (1), obtendremos el coeficiente de despolarización

$$I_y/I_x = B/[(A+B)\sin^2\theta + B]$$

(θ es el ángulo formado por \mathbf{E} y \mathbf{n}).

2. Determinar la sección eficaz de dispersión por una bolita (de radio a) que posee un valor de ϵ grande; se supone que $\lambda \gg a \sim \delta$.

Solución. El problema de calcular el momento magnético que adquiere una esferita con valor dado de ϵ (y $\mu = 1$) colocada en un campo magnético variable \mathbf{H} , coincide con el resuelto en el § 45 (problema 1), con la única diferencia de que en las fórmulas que allí se obtuvieron hay que hacer

$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$. Tenemos, por ello,

$$\mathcal{M} = -a^3\gamma\mathbf{H},$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{ka} \operatorname{ctg} ka - \frac{3}{(ka)^2}\right).$$

El momento eléctrico, en cambio, se calcula en primera aproximación respecto de $1/\epsilon$ simplemente como momento de una esfera conductora ($\epsilon \rightarrow \infty$) en un campo eléctrico homogéneo constante:

$$\mathcal{P} = a^3\mathbf{E}.$$

Teniendo en cuenta que \mathbf{E} y \mathbf{H} son perpendiculares entre sí, obtendremos después de un cálculo sencillo en el que se utiliza (72.1) la siguiente fórmula para la sección eficaz de dispersión:

$d\sigma = (a^6\omega^4/c^4)\{|\gamma|^2 \cos^2\phi + \sin^2\phi - (\gamma + \gamma^*) \cos\phi + \cos^2\phi \Im(\cos^2\phi + |\gamma|^2 \sin^2\phi)\}$ do,
donde ϕ y \Im son los ángulos indicados en la figura 31. En la dispersión de luz no polarizada,

$$d\sigma = (a^6\omega^4/c^4)\{\frac{1}{2}[1 + |\gamma|^2][1 + \cos^2\phi] - (\gamma + \gamma^*) \cos\phi\} \text{ do},$$

y el grado de despolarización de la luz dispersada vale

$$I_{\parallel}/I_{\perp} = |(\gamma - \cos\phi)/(1 - \gamma \cos\phi)|^2.$$

La sección eficaz total de dispersión es

$$\sigma = 8\pi a^6 \omega^4 (1 + |\gamma|^2) / 3c^4.$$

En el límite $ka \rightarrow \infty$ (es decir, cuando $\lambda \gg a \gg \delta$) tenemos $\gamma = 1/2$; este límite corresponde a la dispersión por una bolita perfectamente reflectora, en cuyo interior no penetran, en absoluto, ni el campo eléctrico ni el magnético.

§ 73. Absorción de las ondas electromagnéticas por pequeñas partículas

La dispersión de las ondas electromagnéticas va acompañada de su absorción simultánea por las partículas. La sección eficaz de este proceso viene dada por la razón de la energía media Q disipada en la partícula (por segundo) a la densidad de flujo de energía incidente. Para calcular Q puede utilizarse la fórmula

$$Q = -\mathcal{P} \cdot \mathcal{E} - \mathcal{M} \cdot \mathcal{H}, \quad (73.1)$$

donde \mathcal{P} y \mathcal{M} son los momentos totales eléctrico y magnético de la partícula, y el papel de campos externos \mathcal{E} y \mathcal{H} lo representan el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{H} de la onda dispersada (véase (45.21)).

Utilizando la representación compleja de las diferentes magnitudes, escribiremos (véase la nota de la pág. 227)

$$Q = -\frac{1}{2} \text{Re}(\mathcal{P} \cdot \dot{\mathbf{E}}^* + \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{H}}^*) = \frac{1}{2} \omega V(\alpha_e'' + \alpha_m'') |\mathbf{E}|^2,$$

donde α_e , α_m son las polarizabilidades eléctrica y magnética de la partícula. Dividiendo por el flujo incidente de energía, se obtiene

$$\sigma = 4\pi\omega V(\alpha_e'' + \alpha_m'')/c. \quad (73.2)$$

Apliquemos esta fórmula a la absorción por una bolita de radio a ($a \ll \lambda$), suponiéndola de un material no magnético ($\mu = 1$). El carácter de la absorción depende fundamentalmente del valor de la permitividad.

Si ϵ no es grande, junto con $a \ll \lambda$ tenemos también $a \ll \delta$. En este caso se puede prescindir de la polarizabilidad magnética comparada con la eléctrica. Tomando para ésta el valor que se deduce de (72.2), se obtendrá

$$\sigma = 12\pi\omega a^3 \epsilon''/c[(\epsilon' + 2)^2 + (\epsilon'')^2]. \quad (73.3)$$

Pero si $|\epsilon| \gg 1$, la parte eléctrica de la absorción pasa a ser pequeña y la absorción magnética puede cobrar importancia, incluso conservándose todavía $\delta \gg a$. Cuando $\delta \gg a$ (es decir, cuando $|ka| \ll 1$) la polarizabilidad magnética

$$\alpha_m = (ka)^2/40\pi = a^2\omega^2\epsilon/40\pi c^2$$

y la sección eficaz de absorción vale

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3 \epsilon''}{c} \left(\frac{1}{|\epsilon|^2} + \frac{\omega^2 a^2}{90c^2} \right). \quad (73.4)$$

Si ϵ sigue aumentando, la parte eléctrica de la absorción llega a ser pequeña comparada con la magnética. En el caso límite $\delta \ll a$ (es decir, $|ka| \gg 1$, $\text{ctg } ka \rightarrow -i$) tenemos

$$\alpha_m = 9i/8\pi ka = 9ic\zeta/8\pi\omega a,$$

donde $\zeta = 1/\sqrt{\epsilon}$ es la impedancia superficial de la bolita. De aquí se sigue

$$\sigma = 6\pi a^2 \zeta''. \quad (73.5)$$

Obsérvese que se podría obtener esta fórmula más directamente sin utilizar la expresión general de la polarizabilidad magnética de la esfera $\alpha_m(\omega)$. Cuando ζ es pequeño, la disipación de energía Q puede calcularse «por integración» del vector de Poynting promedio (67.4) sobre la superficie de la esfera, viniendo dada la distribución del campo magnético en dicha superficie por la solución (42.3) del problema correspondiente a una esfera superconductora ($\zeta = 0$) en un campo magnético homogéneo.

Conociendo la sección eficaz de absorción de la bolita, puede determinarse inmediatamente la intensidad de la radiación térmica emitida por la misma. Según la ley de Kirchhoff*, la intensidad dI (en el intervalo de frecuencia $d\omega$) se expresa mediante $\sigma(\omega)$ por la fórmula

$$dI = 4\pi c \sigma(\omega) e_0(\omega) d\omega,$$

donde

$$e_0(\omega) = \hbar \omega^3 / 4\pi^3 c^3 [\exp(\hbar \omega / T) - 1]$$

es la densidad espectral de radiación negra referida a la unidad de volumen y a la unidad de ángulo sólido.

§ 74. Difracción por una cuña

La aproximación ordinaria de la teoría de la difracción** se basa en la hipótesis de que las desviaciones respecto de la óptica geométrica son pequeñas. Con esto se supone, en primer lugar, que todas las dimensiones son grandes comparadas con la longitud de onda; esto vale tanto para el tamaño de los cuerpos (de las pantallas) o de las aberturas practicadas en ellos, como para las distancias de los cuerpos a los puntos de emisión y observación de la luz. En segundo lugar, se consideran solamente ángulos de difracción pequeños, es decir, la distribución de la luz se estudia para direcciones próximas a la dirección del límite geométrico de sombra. En estas condiciones, las propiedades ópticas concretas de la materia que forma los cuerpos carecen totalmente de importancia; sólo importa el propio hecho de la opacidad de las pantallas.

Ahora bien, si las condiciones indicadas no se cumplen, la resolución del problema de la difracción exige resolver exactamente la ecuación de onda teniendo en cuenta las adecuadas condiciones de contorno sobre las superficies de los cuerpos, condiciones que dependen de sus propiedades concretas. Hallar tales soluciones presenta dificultades matemáticas excepcionales y sólo es posible encontrarlas para un número relativamente pequeño de problemas. En tal caso, se suele introducir una hipótesis simplificadora relativa a las propiedades del cuerpo en el que se produce la difracción: se supone que se trata de un conductor perfecto (y que, por lo

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 60.

** Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, §§ 59-61.

tanto, desde el punto de vista óptico es un reflector perfecto).

En relación con esto haremos notar la siguiente circunstancia. Podría parecer natural resolver el problema de la difracción suponiendo que la superficie del cuerpo es «negra», es decir, que absorbe por completo la luz que incide sobre ella. En realidad, sin embargo, en el planteo del problema exacto de la difracción, tal hipótesis acerca de las propiedades del cuerpo resultaría intrínsecamente contradictoria. En efecto, si la propia substancia del cuerpo es fuertemente absorbente, el coeficiente de reflexión de su superficie no es pequeño, sino que, por el contrario, es próximo a la unidad (véase § 67). Por ello, el que el coeficiente de reflexión resulte realmente próximo a cero exige que la materia sea débilmente absorbente y que el grosor del cuerpo sea suficientemente grande (comparado con la longitud de onda). Ahora bien, en la teoría exacta de la difracción, inevitablemente representan un papel importantes partes de la superficie del cuerpo que son próximas a su borde (distancias del orden de la longitud de onda); pero el grosor del cuerpo cerca del borde es siempre pequeño, de modo que la hipótesis de que sea «negro» no será correcta en esta región, evidentemente.

Un importante interés teórico lo presenta la solución exacta del problema de la difracción de la luz por la arista de una cuña conductora perfecta limitada por dos semiplanos que se cortan en la misma (A. Sommerfeld, 1894, fue el primero en hallar esta solución). La exposición completa de esta teoría matemática muy complicada, que exige la aplicación de métodos matemáticos especiales, se sale de los límites del presente libro. Aquí presentaremos solamente como referencia los resultados finales*.

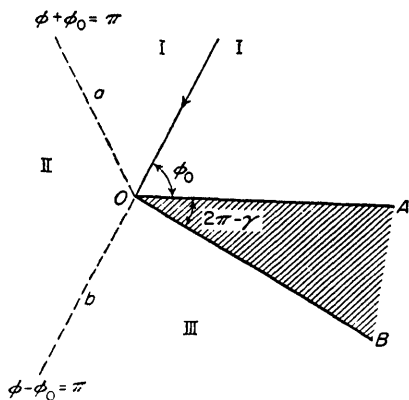


FIG. 32

* El cálculo detallado puede encontrarse en los libros de A. Sommerfeld «Optics», Academic Press, New York, 1954; P. Frank y R. von Mises, «Differential- und Integralgleichungen der Physik» parte 2, capítulo XX, 2.ª ed., Vieweg, Brunswick, 1935. Otro método de resolución, debido a M. I. Kontorovich y a N. N. Lebedev, se expone en el libro de G. A. Grinberg, «Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskij i magnitnyj iavlenij», cap. XXII, Izd. AN SSSR, 1948 («Problemas seleccionados de la teoría matemática de los fenómenos eléctricos y magnéticos»).

Una solución modificada para la difracción de una onda cilíndrica (emitida por una fuente lineal paralela a la arista de la cuña) la dio H. S. Carslaw (Proc. Lond. Math. Soc. 30, 121, 1899).

Elijamos la arista de la cuña como eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z . A la superficie anterior de la cuña (OA en la fig. 32) corresponde $\phi = 0$, y a la posterior (OB), $\phi = \gamma$, donde $2\pi - \gamma$ es el ángulo de la cuña; al dominio exterior a ella corresponden los ángulos $0 < \phi < \gamma$. Supongamos que una onda monocromática plana cuya amplitud es igual a la unidad incide en el plano $r\phi$ sobre la superficie anterior de la cuña formando con ella el ángulo ϕ_0 (dada la simetría de la cuña, basta considerar los valores $\phi_0 < \gamma/2$). Distinguiremos dos casos de polarización independientes de la onda incidente (y, con ello, también de la onda difractada): cuando la arista de la cuña (z) es paralela al vector \mathbf{E} y cuando lo es al vector \mathbf{H} . Con la letra u se designa en estos casos E_z o H_z , respectivamente.

El campo electromagnético en todo el espacio viene dado entonces por la fórmula (prescindiendo del factor temporal $e^{-i\omega t}$)

$$u(r, \phi) = v(r, \phi - \phi_0) \mp v(r, \phi + \phi_0), \quad (74.1)$$

donde los signos superior e inferior corresponden, respectivamente, a las polarizaciones con \mathbf{E} y \mathbf{H} a lo largo del eje z y la función $v(r, \psi)$ se determina por la integral compleja

$$v(r, \psi) = \frac{1}{2\gamma} \int_C e^{-ikr \cos \zeta} \frac{d\zeta}{1 - e^{-i\pi(\zeta + \psi)/\gamma}}, \quad (74.2)$$

($k = \omega/c$). El camino de integración $C = C_1 + C_2$ en el plano ζ se compone de dos lazos, representados en la figura 33. Los extremos de estos lazos se encuentran en el infinito de aquellas partes del plano ζ (rayadas en la fig. 33) en las que $\text{Im}(\cos \zeta) < 0$, y, en consecuencia, el factor $e^{-ikr \cos \zeta}$ tiende a cero en el infinito. El integrando

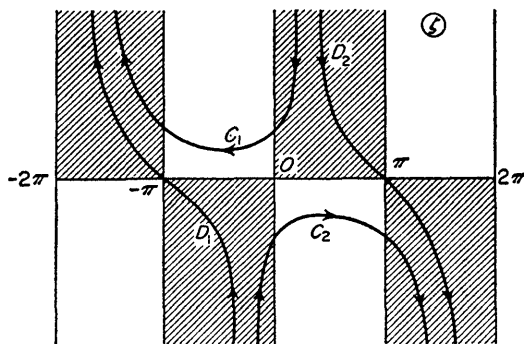


FIG. 33

en (74.2) tiene polos situados sobre el eje real ζ en los puntos $\zeta = -\psi + 2n\gamma$, donde n es un número entero. En vez del camino C se puede utilizar como camino de integración el $D = D_1 + D_2$ (fig. 33), añadiendo a la integral los residuos del integrando

en los polos situados sobre el segmento $-\pi \leq \zeta \leq \pi$, supuesto que existan. Representemos v en la forma

$$v(r, \psi) = v_0(r, \psi) + v_d(r, \psi), \quad (74.3)$$

donde v_d es la integral (74.2) calculada a lo largo del camino D y v_0 la contribución debida a los residuos en los polos antes indicados. Cada polo contribuye a v_0 con un término igual a

$$\exp [-ikr \cos (\psi - 2n\gamma)]$$

que representa bien la onda incidente, bien una cualquiera de las ondas reflejadas por la superficie de la cuña de acuerdo con las leyes de la óptica geométrica. La función v_d , en cambio, describe la distorsión de las ondas debida propiamente a la difracción. El campo a grandes distancias de la arista de la cuña (grandes en comparación con la longitud de onda) es del mayor interés. Para $kr \gg 1$ es válida la fórmula asintótica*

$$v_d(r, \psi) = \frac{\pi}{\gamma \sqrt{(2\pi kr)}} e^{i(kr + \frac{1}{2}\pi)} \frac{\sin(\pi^2/\gamma)}{\cos(\pi^2/\gamma) - \cos(\pi\psi/\gamma)} \quad (74.4)$$

con tal que el ángulo ψ satisfaga la condición

$$[\cos(\pi^2/\gamma) - \cos(\pi\psi/\gamma)]^2 \gg 1/kr. \quad (74.5)$$

La dependencia de la función v_d , y con ella también la del campo

$$u_d(r, \phi) = v_d(r, \phi - \phi_0) \mp v_d(r, \phi + \phi_0)$$

respecto de r viene dada por el factor e^{ikr}/\sqrt{r} , es decir, este campo se comporta como una onda cilíndrica emitida por la arista de la cuña.

Tal como las hemos escrito, las fórmulas (74.1) a (74.5) son válidas para valores cualesquiera de los ángulos γ y ϕ_0 . Un estudio más detenido de las mismas lo llevaremos a cabo, para concretar, suponiendo que entre los ángulos γ y ϕ_0 ($\gamma > \pi + \phi_0$) existe una relación tal que, en la aproximación de la óptica geométrica, se forman dos límites de sombra: el límite Ob de sombra total (región III en la fig. 32) y el límite Oa de «sombra» de la onda reflejada por la superficie OA **.

En las regiones I, II, III la función

$$u_0(r, \phi) = v_0(r, \phi - \phi_0) \mp v_0(r, \phi + \phi_0)$$

tiene la forma siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Región I: } u_0 = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)} \mp e^{-ikr \cos(\phi + \phi_0)}, \\ \text{Región II: } u_0 = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)}, \\ \text{Región III: } u_0 = 0. \end{array} \right\} \quad (74.6)$$

* Los términos siguientes de este desarrollo asintótico fueron calculados por *W. Pauli* (Phys. Rev., 54, 924, 1938).

** En la figura 32 es $\phi_0 < \pi/2$; pero si se tiene $\phi_0 > \pi/2$, el límite Oa se encuentra a la derecha de la dirección de la onda incidente.

Cuando $\gamma < \pi + \phi_0$, la región de sombra total no existe, en general, y la reflexión (simple o incluso múltiple) se produce en ambas caras de la cuña.

Estas expresiones, que no tienden a cero cuando $kr \rightarrow \infty$, describen la onda incidente (en la región II) o la incidente y la reflejada (en la región I) no deformadas por la difracción. La deformación del campo por difracción, en cambio, viene dada por la fórmula (74.4), pero la condición (74.5) deja de cumplirse para valores ψ demasiado próximas al valor π (cuando la diferencia $|\psi - \pi|$ deja de ser grande comparada con $1/\sqrt{kr}$).

Los valores $\psi = \pi$ corresponden a los límites de la sombra geométrica; cuando $\psi = \phi - \phi_0$ este límite es el de la sombra total, y para $\psi = \phi + \phi_0$, el de sombra de la onda reflejada. En la inmediata vecindad de estos valores hay que aplicar otra expresión asintótica, cuya validez exige solamente que se cumpla la desigualdad $|\psi - \pi| \ll 1$. Esta condición, junto con la condición $kr \gg 1$, garantiza precisamente la aplicabilidad de la aproximación ordinaria de la teoría de la difracción de Fresnel*. De acuerdo con ésta, cerca del límite *Ob* de sombra total se obtiene la siguiente expresión asintótica:

$$u(r, \phi) = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)} \frac{1-i}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta, \quad (74.7)$$

$$w = -(\phi - \phi_0 - \pi)\sqrt{\frac{1}{2}kr}.$$

Análogamente, cerca del límite *Oa* de «sombra» de la onda reflejada,

$$u(r, \phi) = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)} + e^{-ikr \cos(\phi + \phi_0)} \frac{1-i}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta, \quad (74.8)$$

$$w = -(\phi + \phi_0 - \pi)\sqrt{\frac{1}{2}kr}.$$

En esta aproximación la figura de difracción no depende de la dirección de polarización de la onda ni del ángulo de la cuña.

Los dominios de aplicabilidad de las fórmulas (74.4), (74.7) y (74.8) en parte se solapan. Así, cerca del límite de sombra total la región de aplicabilidad común viene dada por las desigualdades

$$1 \gg |\phi - \phi_0 - \pi| \gg 1/\sqrt{kr}$$

y en ella se tiene

$$u(r, \phi) = u_0(r, \phi) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi kr)}} e^{i(kr + \frac{1}{2}\pi)} \frac{1}{\phi - \phi_0 - \pi}, \quad (74.9)$$

(con u_0 dado por (74.6)). Esta expresión se obtiene a partir de (74.7) mediante las

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 60.

conocidas fórmulas asintóticas válidas para la integral de Fresnel cuando $|w|$ es grande:

$$\int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{1}{2}\pi} + e^{iw^2}/2iw \text{ para } w > 0,$$

$$\int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta = e^{iw^2}/2iw \text{ para } w < 0.$$

§ 75. Difracción por una pantalla plana

La fórmula exacta (74.2) para la difracción por una cuña puede llevarse a una forma relativamente simple en el caso particular de la difracción por un semiplano (al que corresponde $\gamma = 2\pi$) *. En efecto, la integral compleja en (74.2) puede reducirse a una integral de Fresnel:

$$v(r, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(kr \cos \psi + \frac{1}{2}\pi)} \int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta, \quad (75.1)$$

$$w = \sqrt{(2kr)} \cos \frac{1}{2}\psi.$$

Esta fórmula es válida para valores cualesquiera de r y ψ . Cuando $kr \gg 1$ y para ángulos $|\psi - \pi| \gg 1/\sqrt{kr}$ resulta útil la expresión asintótica

$$v_a(r, \psi) = - e^{i(kr + \frac{1}{2}\pi)} \frac{1}{2\sqrt{(2\pi kr)} \cos \frac{1}{2}\psi} \quad (75.2)$$

(la fórmula (74.4) con $\gamma = 2\pi$) **.

La fórmula (75.2) permite obtener, en forma finita, la solución del problema de la difracción por una pantalla conductora perfecta, plana y de forma arbitraria. Además, basta suponer que las dimensiones de la pantalla y las distancias a ella son grandes comparadas con la longitud de onda y que los ángulos de difracción no son demasiado pequeños (este dominio se solapa con el de ángulos pequeños en el que son aplicables las fórmulas ordinarias de la difracción de Fresnel). El resultado se expresa en forma de integral a lo largo del contorno de la pantalla de manera análoga a como el campo difractado se expresa, en la teoría aproximada ordinaria, en forma de integral extendida a una superficie que cierra la abertura en la pantalla. No nos detendremos aquí a desarrollar estos cálculos.

* Véase la bibliografía en la nota de la pág. 361.

** *Iu. V. Vandakurov* (ZhETF 26, 3, 1954), obtuvo la solución exacta del problema tridimensional de la difracción, por un semiplano, de las ondas electromagnéticas emitidas por un dipolo eléctrico o magnético, orientado arbitrariamente, que se encuentra a distancia finita del borde del semiplano.

En la teoría exacta de la difracción por pantallas planas constituidas por conductores perfectos cabe enunciar un teorema (debido a *L. I. Mandel'shtam* y *M. A. Leontovitch*) que, en cierto sentido, es análogo al teorema de Babinet en la teoría aproximada de la difracción.

Consideremos una pantalla plana con una abertura de forma arbitraria; elijamos el plano de la pantalla como plano $z = 0$ y supongamos que la onda electromagnética incide desde el semiespacio $z < 0$. Sea $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ el campo total de la onda incidente y de la onda reflejada por la pantalla (como si no existiera la abertura); imaginemos que este campo se prolonga al otro lado de la pantalla ($z > 0$). Dado que $H_z = 0, \mathbf{E}_t = 0$ cuando $z = 0$ (en virtud de las condiciones de contorno sobre una superficie conductora perfecta), los valores $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ para $z > 0$ y $z < 0$ estarán ligados por las relaciones

$$\begin{aligned} E_{0z}(x, y, z) &= E_{0z}(x, y, -z), & \mathbf{E}_{0t}(x, y, z) &= -\mathbf{E}_{0t}(x, y, -z), \\ H_{0z}(x, y, z) &= -H_{0z}(x, y, -z), & \mathbf{H}_{0t}(x, y, z) &= \mathbf{H}_{0t}(x, y, -z). \end{aligned} \quad (75.3)$$

Sea, además, \mathbf{E}' y \mathbf{H}' el campo que se obtendría colocando en el campo $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ una placa plana cuya forma, tamaño y posición coinciden con la abertura en la pantalla y que posee una permeabilidad $\mu = \infty$. Entonces la solución del problema de difracción por la abertura en la pantalla viene dada por las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'), & \mathbf{H} &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') \text{ para } z < 0, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'), & \mathbf{H} &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}') \text{ para } z > 0. \end{aligned} \quad (75.4)$$

Para demostrarlo, obsérvese que el campo \mathbf{E}', \mathbf{H}' posee la misma simetría (expresada por las fórmulas (75.3)) que el campo $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$. Por ello, sobre el plano $z = 0$ satisface las condiciones

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_t &= 0, & H'_z &= 0 & \text{fuera de la abertura,} \\ \mathbf{E}'_{z1} &= -\mathbf{E}'_{z2}, & H'_{z1} &= -H'_{z2} & \text{sobre la abertura} \end{aligned}$$

(los índices 1 y 2 corresponden a $z \rightarrow \pm 0$). Además, satisface las condiciones

$$\mathbf{E}'_z = 0, \quad \mathbf{H}'_t = 0 \quad \text{sobre la abertura,}$$

ya que las condiciones de contorno sobre la superficie de un cuerpo con $\mu = \infty$ son recíprocas (en el sentido de la substitución de \mathbf{E}, \mathbf{H} por \mathbf{H}, \mathbf{E}) de las condiciones correspondientes a una superficie perfectamente conductora ($\epsilon = \infty$). Está claro pues, que el campo (75.4) satisface las condiciones necesarias $\mathbf{E}_t = 0, H_z = 0$ sobre la superficie de la pantalla ($z \rightarrow -0$) fuera de la abertura y es continuo sobre la misma. Finalmente, dado que el campo \mathbf{E}', \mathbf{H}' tiende en el infinito a $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, el campo (75.4) tiende a $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ cuando $z \rightarrow -\infty$, y a cero cuando $z \rightarrow +\infty$. Satisface, por lo tanto, todas las condiciones del problema de difracción planteado, lo que demuestra el teorema.

Así pues, el problema de la difracción por una abertura en una pantalla con $\epsilon = \infty$ equivale al problema de la difracción por la pantalla complementaria con $\mu = \infty$.

PROBLEMAS

1. Una onda monocromática plana incide normalmente sobre una rendija, practicada en una pantalla plana de material conductor perfecto, cuya anchura $2a$ es grande comparada con la longitud de onda. Determinar la distribución de la intensidad luminosa al otro lado de la rendija y a grandes distancias de la misma para valores grandes del ángulo de difracción.

Solución. Cuando $a \gg \lambda$, el campo difractado al otro lado de la rendija se puede considerar como superposición de campos debidos a la difracción independiente por cada uno de los dos bordes de la rendija, campos que se determinan mediante la fórmula asintótica (75.2). Si las distancias $AP = r_1$ y $BP = r_2$ a los bordes de la rendija desde el punto de observación (fig. 34) son grandes comparadas con a , en los factores e^{ikr_1} y e^{ikr_2} escribiremos:

$$r_1 = r - a \sin \chi, \quad r_2 = r + a \sin \chi$$

en todos los demás términos, en cambio, supondremos que $r_1 \cong r_2 \cong r$ y que todos los ángulos formados por AP , OP , BP y el eje z son iguales a un mismo ángulo de difracción χ .

En definitiva se obtiene

$$u = \frac{e^{i(kr + \frac{1}{2}\pi)}}{\sqrt{(2\pi kr)}} \left\{ \frac{\sin(ka \sin \chi)}{\sin \frac{1}{2}\chi} \pm i \frac{\cos(ka \sin \chi)}{\cos \frac{1}{2}\chi} \right\}.$$

De aquí se sigue para la intensidad de la luz difractada en el intervalo angular $d\chi$ (referida a la intensidad total de la luz que incide sobre la rendija):

$$\begin{aligned} dI &= \frac{1}{4\pi ka} \left\{ \left[\frac{\sin(ka \sin \chi)}{\sin \frac{1}{2}\chi} \right]^2 + \left[\frac{\cos(ka \sin \chi)}{\cos \frac{1}{2}\chi} \right]^2 \right\} d\chi \\ &= \frac{ka}{\pi} \left\{ \left[\frac{\sin(ka \sin \chi)}{ka \sin \chi} \right]^2 \cos \chi + \frac{1}{[2ka \cos \frac{1}{2}\chi]^2} \right\} d\chi. \end{aligned}$$

Cuando los valores de χ son pequeños, esta expresión se convierte en la fórmula para la difracción de Fraunhofer por una rendija:

$$dI = \frac{1}{\pi ka} \frac{\sin^2 ka\chi}{\chi^2} d\chi.$$

2. Una onda plana incide sobre un plano conductor perfecto en el que se ha practicado una abertura de radio a que es pequeño comparado con la longitud de onda. Determinar la intensidad de la luz difractada que pasa por la abertura (Rayleigh, 1897).

Solución. De acuerdo con lo que se expuso en el texto, este problema se reduce al de la difracción por una placa circular con $\mu = \infty$ y, dado que $a \ll \lambda$, se trata de la dispersión por una pequeña partícula. Según el § 72, para resolver este problema de dispersión hay que determinar las polarizabilidades eléctrica y magnética estáticas del disco. El campo \mathbf{E}_0 es perpendicular al plano del disco y la condición de contorno $E'_z = 0$ coincide formalmente con la condición que se tendría en electrostática sobre la superficie de un cuerpo con $\epsilon = 0$. En cambio, el campo \mathbf{H}_0 es paralelo al disco y la condición de contorno $H'_t = 0$ corresponde al problema de magnetostática con $\mu = \infty$. Por ello, los momentos eléctrico y magnético del disco son (véase problema 4, § 4 y el problema del § 42):

$$\mathcal{P} = -2a^3 \mathbf{E}_0 / 3\pi, \quad \mathcal{M} = 4a^3 \mathbf{H}_0 / 3\pi.$$

Al pasar al problema de la difracción por una abertura, estas expresiones hay que multiplicarlas, de acuerdo con las fórmulas (75.4), por $1/2$ y sustituirlas luego en la fórmula de dispersión (72.1).

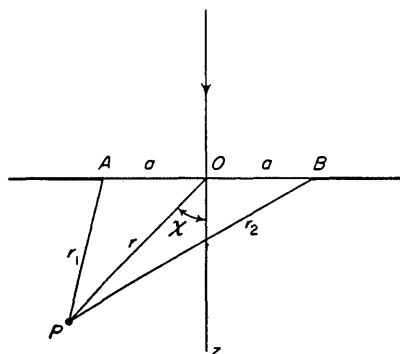


FIG. 34

Así pues, la intensidad de la radiación difractada en el ángulo sólido $d\omega$ es

$$\begin{aligned} dI &= \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4} \{ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 - 2\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}) \} d\omega \\ &= \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4} \{ (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0)^2 + 4(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0)^2 + 4\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0 \} d\omega. \end{aligned}$$

La intensidad total difractada se obtiene integrando sobre un hemisferio y resulta igual a

$$I = \frac{c}{4\pi} \frac{4\omega^4 a^6}{27\pi c^4} (E_0^2 + 4H_0^2).$$

La «sección eficaz de difracción» se determinará como razón de la intensidad de la radiación difractada al flujo total de energía en la onda incidente $cE^2/4\pi$ (las letras sin subíndice se refieren al campo de la onda incidente). Distinguiremos dos casos de polarización de la onda incidente:

a) el vector \mathbf{E} en la onda incidente es perpendicular al plano de incidencia (plano xz), es decir, paralelo al plano de la pantalla (plano xy). La suma de los campos de las ondas incidente y reflejada en la superficie de la pantalla vale

$$E_0 = 0, \quad H_{0x} = 2H \cos \alpha = 2E \cos \alpha$$

(α es el ángulo de incidencia). De aquí se deduce

$$d\sigma = \frac{16a^6 \omega^4}{9\pi^2 c^4} \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi) d\omega;$$

ϑ es el ángulo formado por la dirección de difracción \mathbf{n} y la normal a la pantalla (eje z), y ϕ , el acimut del vector \mathbf{n} respecto del plano de incidencia. La sección eficaz total vale

$$\sigma = (64\omega^4 a^6 / 27\pi c^4) \cos^2 \alpha.$$

b) el vector \mathbf{E} se encuentra en el plano de incidencia. Entonces

$$E_0 = E_{0x} = -2E \sin \alpha, \quad H_{0y} = 2H = 2E.$$

La sección eficaz diferencial es

$$d\sigma = \frac{16a^6 \omega^4}{9\pi^2 c^4} \{ \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta (\cos^2 \phi + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha) - \sin \vartheta \sin \alpha \cos \phi \} d\omega,$$

y la total

$$\sigma = (64\omega^4 a^6 / 27\pi c^4) (1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha).$$

Para luz incidente natural se tiene $\sigma = (64\omega^4 a^6 / 27\pi c^4) (1 - \frac{3}{8} \sin^2 \alpha).$

* Suponemos que se han omitido los factores $e^{-i\omega t}$, de modo que \mathbf{E} y \mathbf{H} son reales.

CAPÍTULO XI

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN MEDIOS ANISÓTROPOS

§ 76. La permitividad de los cristales

Las propiedades de un medio anisótropo relativas a las ondas electromagnéticas se determinan por los tensores $\epsilon_{ik}(\omega)$ y $\mu_{ik}(\omega)$ que establecen el ligamen entre el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética, de un lado, y las intensidades de los campo eléctrico y magnético, de otro, de acuerdo con las fórmulas*

$$D_i = \epsilon_{ik}(\omega)E_k, \quad B_i = \mu_{ik}(\omega)H_k.$$

En lo que sigue, nos referiremos, para concretar, al campo eléctrico y al tensor ϵ_{ik} ; todos los resultados obtenidos son por completo válidos también para el tensor μ_{ik} .

Cuando $\omega \rightarrow 0$, las magnitudes ϵ_{ik} toman sus valores estáticos, cuya simetría respecto de los índices i, k se demostró en el § 13. Esta demostración tenía un carácter puramente termodinámico y, por lo tanto, se refería solamente a los estados de equilibrio termodinámico. En cambio, el estado de la materia en un campo variable no es, naturalmente, un estado de equilibrio y, en consecuencia, dicha demostración resulta inaplicable. Para poner de manifiesto las propiedades del tensor ϵ_{ik} hay que acudir ahora al principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos.

Es fácil ver que las componentes del tensor ϵ_{ik} quedan comprendidas en la definición general de las magnitudes α_{ik} ** . Observemos que, en efecto, la variación de la energía (por segundo) en un campo eléctrico variable viene dada por la integral

$$\int \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV. \quad (76.1)$$

Comparando con la fórmula (V. 127.7), vemos que si se eligen como magnitudes x_i los valores de las componentes del vector \mathbf{E} en cada punto del cuerpo, las correspondientes magnitudes f_i serán las componentes de \mathbf{D} (el subíndice i recorre toda una sucesión continua de valores, numerando tanto las componentes de los vectores, como los puntos del cuerpo). El papel de coeficientes α_{ik} lo representan las compo-

* Hay que recordar que todas las magnitudes se refieren al campo variable en una onda; la existencia de un posible desplazamiento o de una inducción constantes (en los cristales piroeléctricos o ferromagnéticos) nada tiene que ver con las cuestiones consideradas aquí.

** Véase vol. V, *Física estadística*, § 127. Las fórmulas de este libro se indicarán por V.

nentes del tensor ϵ_{ik}^{-1} . Pero todas las propiedades de simetría de los tensores inverso (ϵ_{ik}) y directo coinciden, naturalmente.

Obsérvese que aquella misma definición incluye también las componentes del tensor de polarizabilidad del cuerpo en conjunto, es decir, los coeficientes en las igualdades

$$\mathcal{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k.$$

En efecto, la variación de energía de un cuerpo sometido a un campo variable exterior \mathfrak{E} viene dada por la fórmula

$$- \mathcal{P} \cdot d\mathfrak{E}/dt. \quad (76.2)$$

Está claro pues que si las tres componentes del vector \mathcal{P} son magnitudes x_i , las correspondientes magnitudes f_i serán las componentes del vector \mathfrak{E} , de forma que los coeficientes α_{ik} coinciden con $V\alpha_{ik}$.

Por consiguiente, podemos aplicar el principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos (V. 127.13), con lo cual llegamos a la conclusión de que el tensor ϵ_{ik} es simétrico:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}. \quad (76.3)$$

Se ha supuesto aquí que el cuerpo no se encuentra en un campo magnético exterior*.

Repitiendo para el caso anisótropo el razonamiento desarrollado en el § 61 que condujo a la fórmula (61.4), se encuentra que las pérdidas eléctricas vienen dadas por la expresión

$$\frac{i\omega}{16\pi}(\epsilon_{ik}^* - \epsilon_{ki})E_iE_k^*. \quad (76.4)$$

En cuanto a la condición de que no exista absorción, ésta se traduce en la igualdad $\epsilon_{ik}^* = \epsilon_{ki} = \epsilon_{ik}$, es decir, queda reducida, como en un medio isótropo, a la de que todos los ϵ_{ik} sean reales.

Cuando no hay absorción, la energía interna electromagnética de la unidad de volumen del cuerpo se puede definir como vimos en el § 61. Repitiendo para un medio anisótropo el razonamiento que llevó a (61.9), obtendremos la fórmula análoga

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \frac{d}{d\omega} (\omega \epsilon_{ik}) E_i^* E_k. \quad (76.5)$$

En el § 67 se introdujo el concepto de impedancia superficial ζ , que permite formular las condiciones de contorno sobre la superficie de un metal incluso en aquellos casos en que deja de tener sentido el concepto de permitividad. Sobre la superficie de un cuerpo anisótropo, la condición de contorno, análoga a la (67.6), debe escribirse en la forma

$$E_\alpha = \zeta_{\alpha\beta}(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\beta, \quad (76.6)$$

* Las propiedades del tensor ϵ_{ik} cuando existe un campo magnético exterior se estudiarán en el § 82.

donde $\zeta_{\alpha\beta}(\omega)$ es un tensor bidimensional definido sobre dicha superficie. No hay que perder de vista que los valores de este tensor, en general, dependen también de la orientación cristalográfica de la cara del cristal.

El flujo de energía que penetra en el cuerpo es

$$(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = (c/4\pi)\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{n} = (c/4\pi)E_{\alpha}(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_{\alpha}.$$

(aquí \mathbf{E} y \mathbf{H} son reales). Resulta así evidente que si al aplicar el principio de simetría se elige como magnitudes x_{α} las componentes E_{α} , las correspondientes f_{α} serán $-(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_{\alpha}$, es decir (volviendo a la representación compleja), las magnitudes f_{α} serán las $-(i/\omega)(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_{\alpha}$. En consecuencia, los coeficientes $\alpha_{\alpha\beta}$ coinciden, salvo un factor, con las componentes $\zeta_{\alpha\beta}$, y llegamos a la conclusión de que

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha} \quad (76.7)$$

(en ausencia de campo magnético exterior).

PROBLEMA

Expresar las componentes del tensor $\zeta_{\alpha\beta}$ en función de las componentes del tensor $\eta_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ (supuesto que éste exista); el cuerpo es no magnético ($\mu_{ik} = \delta_{ik}$).

Solución. En el caso anisótropo, la igualdad (67.2) $\zeta^2 = 1/\epsilon$ se substituye por la siguiente:

$$\zeta_{\alpha\gamma}\zeta_{\gamma\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

En componentes*

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} &= \eta_{11}, & \zeta_{22}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} &= \eta_{22}, \\ \zeta_{12}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) &= \eta_{12}, & \zeta_{21}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) &= \eta_{21}. \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones es:

$$\begin{aligned} \zeta_{12} &= \eta_{12}/\xi, & \zeta_{21} &= \eta_{21}/\xi, \\ \zeta_{11} &= [\eta_{11} \pm \sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}]/\xi, & \zeta_{22} &= [\eta_{22} \pm \sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}]/\xi, \\ \xi^2 &= \eta_{11} + \eta_{22} \pm 2\sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}. \end{aligned}$$

Los signos se eligen de acuerdo con la condición de que la energía absorbida es positiva.

§ 77. Onda plana en un medio anisótropo

Al estudiar la óptica de los cuerpos anisótropos, es decir, de los cristales, nos limitaremos al caso más importante en que el medio se puede considerar (en el intervalo dado de frecuencias) no magnético y transparente. De acuerdo con esto, la relación entre las intensidades de los campos eléctrico y magnético, por un lado, y el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética, por el otro, viene dada por las igualdades

$$\mathbf{D}_i = \epsilon_{ik}\mathbf{E}_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (77.1)$$

siendo reales todas las componentes del tensor permitividad ϵ_{ik} , y positivos sus valores principales.

* No suponemos que se tenga $\zeta_{12} = \zeta_{21}$, admitiendo así también el caso en que existe un campo magnético exterior.

Las ecuaciones de Maxwell para el campo de una onda monocromática se escriben:

$$i\omega\mathbf{H} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad i\omega\mathbf{D} = -c \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (77.2)$$

En una onda plana que se propaga por un medio transparente todas las magnitudes son proporcionales a $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, con un vector de onda \mathbf{k} real. Efectuando la derivación respecto de las coordenadas, obtendremos

$$\omega\mathbf{H}/c = \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \omega\mathbf{D}/c = -\mathbf{k} \times \mathbf{H}. \quad (77.3)$$

Está claro pues, en primer lugar, que los tres vectores \mathbf{k} , \mathbf{D} , \mathbf{H} son perpendiculares entre sí. Además, el vector \mathbf{H} es perpendicular a \mathbf{E} . Dado que el vector \mathbf{H} es perpendicular a la vez a los tres vectores \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{k} , éstos deben estar situados en un mismo plano. La figura 35 ilustra la posición mutua de todos estos vectores. Respecto de la dirección del vector de onda, son transversales \mathbf{D} y \mathbf{H} , pero no \mathbf{E} . En la figura se indica también la dirección del flujo de energía \mathbf{S} en la onda. Éste viene determinado por el producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, es decir, es perpendicular a \mathbf{E} y a \mathbf{H} . En contraste con el caso de una onda en un medio isótropo, la dirección del flujo de energía no coincide aquí con la del vector de onda. Es evidente que el vector \mathbf{S} es coplanario con los vectores \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{k} y forma con el vector \mathbf{k} un ángulo que es igual al formado por \mathbf{E} y \mathbf{D} entre sí.

En el módulo del vector \mathbf{k} separemos el factor ω/c , escribiendo

$$\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c. \quad (77.4)$$

El módulo del vector \mathbf{n} definido así en un medio anisótropo depende de su dirección, en contraste con lo que ocurre en un medio isótropo, en el cual $n = \sqrt{\epsilon}$ depende solamente de la frecuencia*. De acuerdo con la notación (77.4), las fórmulas fundamentales (77.3) se escribirán en la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}. \quad (77.5)$$

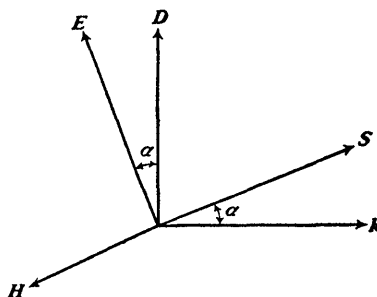


FIG. 35

* También aquí se suele llamar a la magnitud n , índice de refracción, aunque ahora no tiene una relación tan simple con la ley de refracción como en el caso de los cuerpos isótropos.

Escribamos también la expresión correspondiente al vector flujo de energía en una onda plana:

$$\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi = (c/4\pi)\{E^2\mathbf{n} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{E}\} \quad (77.6)$$

(en esta fórmula \mathbf{E} y \mathbf{H} son reales).

Hasta aquí no hemos utilizado aún la relación (77.1) que contiene las constantes materiales ϵ_{ik} . El empleo simultáneo de esta relación y de las ecuaciones (77.5) permite determinar la función $\omega(\mathbf{k})$.

Substituyendo la primera de las fórmulas (77.5) en la segunda, obtendremos

$$\mathbf{D} = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = n^2\mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n}. \quad (77.7)$$

Si se igualan las componentes de este vector a las expresiones $\epsilon_{ik}E_k$ de acuerdo con (77.1), se obtendrán tres ecuaciones lineales homogéneas para las tres componentes del vector \mathbf{E} :

$$n^2E_i - n_in_kE_k = \epsilon_{ik}E_k$$

o bien

$$(n^2\delta_{ik} - n_in_k - \epsilon_{ik})E_k = 0. \quad (77.8)$$

La condición de compatibilidad de estas ecuaciones exige que se anule el determinante formado por sus coeficientes:

$$|n^2\delta_{ik} - n_in_k - \epsilon_{ik}| = 0. \quad (77.9)$$

En la práctica, es conveniente efectuar el cálculo de este determinante utilizando como ejes de coordenadas cartesianas x, y, z los ejes principales del tensor ϵ_{ik} (que en este caso se llaman *ejes dieléctricos principales*). Los valores principales del tensor los designaremos por $\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)}, \epsilon^{(z)}$. Un cálculo simple conduce a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} n^2(\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2) - [n_x^2\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) + \\ + n_y^2\epsilon^{(y)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) + n_z^2\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)})] + \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}\epsilon^{(z)} = 0. \end{aligned} \quad (77.10)$$

Obsérvese que los términos de mayor grado (de grado sexto respecto de n_i) se reducen entre sí al desarrollar el determinante; esta circunstancia, naturalmente, no es casual y está ligada, en último término, con el hecho de que la onda tiene en total dos direcciones de polarización independientes, no tres.

La ecuación (77.10), que es la llamada *ecuación de Fresnel*, es una de las ecuaciones fundamentales de la óptica cristalina. Esta ecuación determina de forma implícita la ley de dispersión, es decir, la dependencia entre la frecuencia y el vector de onda (hay que recordar que los valores principales $\epsilon^{(i)}$ son funciones de la frecuencia ω , y en algunos casos (véase § 79), también lo son las direcciones de los ejes principales del tensor ϵ_{ik}). Sin embargo, al considerar ondas monocromáticas, la frecuencia ω , y con ella también todos los $\epsilon^{(i)}$, son de ordinario cantidades constantes dadas y entonces la ecuación (77.10) determina el módulo del vector de onda en

función de su dirección. Para una dirección dada de \mathbf{n} , (77.10) es una ecuación cuadrática respecto de n^2 con coeficientes reales. Por ello, a cada dirección de \mathbf{n} corresponden, en general, dos módulos diferentes del vector de onda.

La ecuación (77.10) (con coeficientes $\epsilon^{(i)}$ constantes) determina en el espacio de las coordenadas n_x, n_y, n_z una cierta superficie, que es la llamada *superficie de los vectores de onda**. En el caso general, esta superficie es de cuarto grado; su estudio detallado se llevará a cabo en los párrafos que siguen. Aquí indicaremos solamente algunas propiedades importantes de la misma.

Introduzcamos antes una magnitud más que caracteriza la luz que se propaga en un medio anisótropo. La dirección de los rayos luminosos (en la óptica geométrica) se determina por el vector velocidad de grupo $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. En un medio isótropo su dirección coincide siempre con la del vector de onda; sin embargo, en un medio anisótropo no sucede así, en general. Como característica de los rayos introduzcamos el vector \mathbf{s} , que en dirección coincide con la velocidad de grupo y cuyo módulo viene determinado por la igualdad

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1. \quad (77.11)$$

Llamaremos a \mathbf{s} *vector rayo*. El significado de esta magnitud se explica como sigue.

Consideremos un haz de rayos (de igual frecuencia) que se propaga en todos los sentidos a partir de un cierto centro. El valor del iconal ψ (que coincide, salvo el factor ω/c , con la fase de la onda; véase § 65) en cada punto de un rayo viene dado por la integral $\int \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l}$ tomada a lo largo del mismo. Introduciendo el vector \mathbf{s} , que determina la dirección del rayo, escribiremos

$$\psi = \int \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})/s \, dl = \int dl/s.$$

En un medio homogéneo s es constante a lo largo de un rayo, de modo que $\psi = L/s$, donde L es la longitud del segmento dado de rayo. Está claro pues que si a lo largo de cada rayo que parte del centro del haz se traza un segmento igual (o proporcional) a s , obtendremos una superficie tal que sobre ella todos los rayos tienen la misma fase. Esta superficie se llama *superficie de los rayos*.

Entre la superficie de los vectores de onda y la superficie de los rayos así introducidas existe una relación mutua «dual» en cierto sentido. Convengamos en escribir la ecuación de la superficie de los vectores de onda en la forma $f(k_x, k_y, k_z, \omega) = 0$. Entonces las componentes del vector velocidad de grupo son

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_i} = - \frac{\partial f / \partial k_i}{\partial f / \partial \omega}, \quad (77.12)$$

es decir, resultan proporcionales a las derivadas $\partial f / \partial k_i$, o bien, lo que es lo mismo (puesto que estas derivadas se toman para ω constante), proporcionales a $\partial f / \partial n_i$.

* En la literatura se utiliza a menudo una figura mucho menos conveniente, la «superficie de las normales» (o «superficie de los índices»), que se obtiene tomando sobre cada dirección un segmento igual, no a n , sino al valor recíproco $1/n$.

A éstas también, por consiguiente, son proporcionales las componentes del vector rayo*. Pero el vector $\partial f/\partial \mathbf{n}$ está dirigido según la normal a la superficie $f=0$. Así pues, llegamos al resultado de que la dirección del vector rayo de una onda con valor dado de \mathbf{n} viene determinada por la normal a la superficie de los vectores de onda en el punto correspondiente.

Es fácil ver que también es cierto el recíproco: las normales a la superficie de los rayos determinan las direcciones de los correspondientes vectores de onda. En efecto, el hecho de que \mathbf{s} sea perpendicular a la superficie de los vectores de onda se expresa por la relación

$$\mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{n} = 0,$$

donde $\delta \mathbf{n}$ es una variación infinitesimal arbitraria de \mathbf{n} (para ω dado), es decir, es el vector de un desplazamiento infinitesimal sobre la superficie. Pero derivando (asimismo para ω dado) la igualdad $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$, obtendremos $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{s} + \mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{n} = 0$ de donde resulta, evidentemente, que también

$$\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{s} = 0,$$

lo que demuestra lo afirmado al principio.

Esta relación entre las superficies de \mathbf{n} y \mathbf{s} puede precisarse algo más. Sea \mathbf{n}_0 el radio vector de un punto cualquiera de la superficie de los vectores de onda y \mathbf{s}_0 el vector rayo que le corresponde; escribamos la ecuación (en las coordenadas n_x, n_y, n_z) del plano tangente en este punto. Dicha ecuación es

$$\mathbf{s}_0 \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) = 0$$

y expresa la ortogonalidad de \mathbf{s}_0 a cualquier vector $\mathbf{n} - \mathbf{n}_0$ que se encuentra en el plano dado. Puesto que \mathbf{s}_0 y \mathbf{n}_0 están ligados por la relación $\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 1$, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (77.13)$$

Vemos así que $1/s_0$ es la longitud de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas al plano tangente a la superficie de los vectores de onda en el punto \mathbf{n}_0 .

Recíprocamente: si en un punto \mathbf{s}_0 de la superficie de los rayos se traza el plano tangente, la longitud de la perpendicular a este plano trazada desde el origen de coordenadas es igual a $1/n_0$.

Veamos cuál es la posición del vector rayo respecto de los vectores campo en la onda. Para ello observemos que la dirección de la velocidad de grupo coincide

* Derivando el segundo miembro de la ecuación (77.10) respecto de n_i y determinando el coeficiente de proporcionalidad entre s_i y $\partial f/\partial n_i$ a partir de la condición $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$, obtendremos la siguiente fórmula que liga los vectores \mathbf{s} y \mathbf{n} :

$$s_x = n_x \frac{\epsilon(x)(\epsilon(y) + \epsilon(z)) - 2\epsilon(x)n_x^2 - (\epsilon(x) + \epsilon(y))n_y^2 - (\epsilon(x) + \epsilon(z))n_z^2}{2\epsilon(x)\epsilon(y)\epsilon(z) - n_x^2\epsilon(x)(\epsilon(y) + \epsilon(z)) - n_y^2\epsilon(y)(\epsilon(x) + \epsilon(z)) - n_z^2\epsilon(z)(\epsilon(x) + \epsilon(y))}, \quad (77.12a)$$

y análogamente para s_y, s_z .

siempre con la dirección del vector promedio (respecto del tiempo) de flujo de energía. En efecto, consideremos un paquete de ondas limitado a una pequeña porción del espacio. Es evidente que, al desplazarse el paquete, la energía concentrada en él debe desplazarse junto con el mismo y esto significa precisamente que la dirección de su flujo coincide con la dirección de la velocidad del paquete, es decir, con la velocidad de grupo*.

Dado que el vector de Poynting es perpendicular a \mathbf{H} y \mathbf{E} , llegamos ahora a la conclusión de que lo mismo cabe decir del vector \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (77.14)$$

Un cálculo directo con ayuda de las fórmulas (77.5), (77.11) y (77.14) conduce a las relaciones

$$\mathbf{H} = \mathbf{s} \times \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{s} \times \mathbf{H}. \quad (77.15)$$

Así pues,

$$\mathbf{s} \times \mathbf{H} = \mathbf{s} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \mathbf{n}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) = -\mathbf{E}.$$

Si se comparan las fórmulas (77.15) con las (77.5), veremos que las unas se obtienen a partir de las otras intercambiando

$$\mathbf{E} \text{ y } \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \text{ y } \mathbf{s}, \quad \epsilon_{ik} \text{ y } \epsilon^{-1}_{ik} \quad (77.16)$$

(con lo cual, naturalmente, tampoco se viola la relación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$). La última de estas cuatro substituciones debe introducirse a fin de que se conserve también la relación (77.1) entre \mathbf{D} y \mathbf{E} . De esta manera cabe enunciar la siguiente regla, útil en diferentes cálculos: si una cierta ecuación es válida para un conjunto de magnitudes, la substitución (77.16) conduce a una ecuación análoga que es válida para el otro sistema de magnitudes.

En particular, aplicando esta regla a la ecuación (77.10), obtenemos inmediatamente la ecuación análoga para el vector \mathbf{s} :

$$\begin{aligned} & s^2(\epsilon^{(y)}\epsilon^{(z)}s_x^2 + \epsilon^{(x)}\epsilon^{(z)}s_y^2 + \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}s_z^2) - \\ & - [s_x^2(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) + s_y^2(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) + s_z^2(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)})] + 1 = 0. \end{aligned} \quad (77.17)$$

* Es fácil demostrar también matemáticamente que las direcciones de la velocidad de grupo y del vector de Poynting coinciden. Derivando las fórmulas (77.5) (para ω dado), tendremos

$$\delta \mathbf{D} = \delta \mathbf{H} \times \mathbf{n} + \mathbf{H} \times \delta \mathbf{n}, \quad \delta \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{n} \times \mathbf{E}.$$

Multiplicando la primera igualdad escalarmente por \mathbf{E} y la segunda por \mathbf{H} , queda:

$$\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{n}, \quad \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{n}.$$

Pero $\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} = \epsilon_{ik} E_k \delta E_i = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}$; por ello, sumando ambas igualdades, se obtendrá

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{n} = 0,$$

es decir, el vector $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es normal a la superficie de los vectores de onda, como se quería demostrar.

El resultado así obtenido se refiere al valor instantáneo del flujo de energía (y no solamente al valor medio). Sin embargo, en esta demostración es fundamental el carácter simétrico del vector ϵ_{ik} . Por consiguiente, en esa forma el resultado no será válido para los medios en los que ϵ_{ik} no es simétrico (medios *girotropicos*; véase § 82). Sin embargo, lo que hemos afirmado acerca del valor medio del vector de Poynting vale también en este caso.

Esta ecuación determina la forma de la superficie de los rayos. Al igual que la superficie de los vectores de onda, esta superficie es una superficie de cuarto grado. Para una dirección dada de \mathbf{s} , (77.17) da una ecuación cuadrática respecto de s^2 que tiene, en general, dos raíces reales distintas. Así pues, a lo largo de cada dirección en un cristal pueden propagarse dos rayos con diferentes vectores de onda.

Pasemos a la cuestión relativa al carácter de la polarización de las ondas que se propagan en un medio anisótropo. Las ecuaciones (77.8), a partir de las cuales se obtuvo la ecuación de Fresnel, no son convenientes para determinar dicho carácter, puesto que en ellas interviene la intensidad \mathbf{E} , mientras que es el vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} el que resulta transversal en la onda (respecto del \mathbf{n} dado). Para tener en cuenta, ya desde el principio, la transversalidad del vector \mathbf{D} , elegiremos por el momento un nuevo sistema de coordenadas uno de cuyos ejes tiene la misma dirección que el vector de onda. En cuanto a los otros dos ejes transversales, los designaremos por subíndices griegos que toman los valores 1, 2. Las componentes transversales de la igualdad (77.7) nos dan $D_\alpha = n^2 E_\alpha$; substituyendo aquí $E_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta$ (donde $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ son componentes del tensor inverso del tensor ϵ_{ik}), obtendremos $D_\alpha - n^2 \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta = 0$, o bien

$$\left(\frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} \right) D_\beta = 0. \quad (77.18)$$

La condición de compatibilidad de estas dos ecuaciones ($\alpha = 1, 2$) con dos incógnitas D_1, D_2 es la de que su determinante sea igual a cero. Esta condición coincide, claro está, con la ecuación de Fresnel escrita en el sistema primitivo de coordenadas x, y, z . Vemos ahora, sin embargo, que los vectores \mathbf{D} que corresponden a los dos valores de n están dirigidos a lo largo de los ejes principales de un tensor simétrico bidimensional de segundo orden $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$. Según un teorema general, se deduce de aquí que estos vectores son entre sí perpendiculares. Por lo tanto, en las dos ondas con igual dirección del vector de onda, los vectores desplazamiento eléctrico están polarizados linealmente en dos planos perpendiculares.

Las ecuaciones (77.18) tienen una simple interpretación geométrica. En el sistema de coordenadas x, y, z (volvemos de nuevo a los ejes dieléctricos principales) construyamos el elipsoide tensorial que corresponde al tensor ϵ_{ik}^{-1} , es decir, la superficie

$$\epsilon_{ik}^{-1} x_i x_k = \frac{x^2}{\epsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\epsilon^{(z)}} = 1 \quad (77.19)$$

(figura 36). Cortemos el elipsoide por un plano que pasa por su centro y es perpendicular a la dirección de \mathbf{n} dada. La figura de la sección será, en general, una elipse; las longitudes de sus dos ejes principales determinan los valores n , y sus direcciones, las correspondientes a direcciones de oscilación (vectores \mathbf{D}).

En particular, por esta construcción resulta evidente sin más (en el caso general de valores $\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)}, \epsilon^{(z)}$ diferentes) que si el vector de onda está dirigido, por ejemplo, a lo largo del eje x , las direcciones de las polarizaciones de \mathbf{D} serán los ejes y y z .

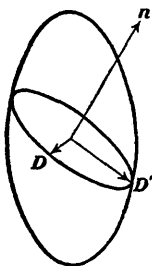


FIG. 36

Pero si el vector \mathbf{n} se encuentra en uno de los planos de coordenadas, por ejemplo, en el plano xy , una de las direcciones de polarización se encuentra también en el plano xy , mientras que la otra es perpendicular a él.

Propiedades completamente análogas las poseen las polarizaciones de las dos ondas con igual dirección del vector rayo. En vez de las direcciones del desplazamiento \mathbf{D} , hay que considerar aquí las direcciones del vector \mathbf{E} , que es perpendicular a \mathbf{s} , con lo cual en vez de las ecuaciones (77.18), tendremos las ecuaciones análogas

$$\left(\frac{1}{s^2} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta} \right) E_\beta = 0. \quad (77.20)$$

La construcción geométrica se basa en este caso en el elipsoide tensorial

$$\epsilon_{ik} x_i x_k = \epsilon^{(x)} x^2 + \epsilon^{(y)} y^2 + \epsilon^{(z)} z^2 = 1, \quad (77.21)$$

correspondiente al propio tensor ϵ_{ik} (éste es el llamado *elipsoide de Fresnel*).

Hay que subrayar el hecho de que las ondas planas que se propagan en un medio anisótropo están por completo polarizadas linealmente en determinados planos. En relación con esto, las propiedades ópticas de los medios anisótropos difieren fundamentalmente de las propiedades de los medios isótropos. Una onda plana que se propaga en un medio isótropo está, en general, polarizada elípticamente, y sólo en casos particulares la polarización elíptica se reduce a la lineal. Esta diferencia fundamental se debe a que el caso de un medio totalmente isótropo es, en cierto sentido, un caso degenerado: a las dos direcciones de polarización corresponde aquí un mismo vector de onda, en vez de dos diferentes (con igual dirección) en el caso general de un medio anisótropo; ahora bien, al propagarse dos ondas polarizadas linealmente con un mismo valor de \mathbf{n} , se componen dando lugar a una onda polarizada elípticamente.

§ 78. Propiedades ópticas de los cristales uniaxiales

Las propiedades ópticas de un cristal dependen, en primer lugar, de la simetría de su tensor permitividad ϵ_{ik} . En relación con esto todos los cristales se dividen

en tres categorías: cúbicos, uniáxicos y biáxicos (véase § 13).

En un cristal del sistema cúbico es $\epsilon_{ik} = \epsilon \delta_{ik}$, es decir, los tres valores principales del tensor coinciden, mientras que las direcciones de los ejes principales son arbitrarias. Por ello, en lo que concierne a sus propiedades ópticas, los cristales cúbicos en nada se distinguen de los cuerpos isótropos.

A los cristales uniáxicos pertenecen los sistemas romboédrico, tetragonal y hexagonal. Uno de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} coincide aquí con el eje de simetría de tercero, cuarto o sexto orden, respectivamente. Este eje se llama en óptica *eje óptico* del cristal (en lo que sigue elegiremos el eje z de forma que coincida con el mismo y designaremos el correspondiente valor principal de ϵ_{ik} por $\epsilon_{||}$). En cuanto a las direcciones de los otros dos ejes principales (situados en un plano perpendicular al eje óptico), éstas son arbitrarias y los correspondientes valores principales del tensor dieléctrico coinciden (a continuación se designan por ϵ_{\perp}).

Si en la ecuación de Fresnel (77.10) se hace $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon^{(z)} = \epsilon_{||}$, la expresión en el primer miembro se descompone en dos factores cuadráticos:

$$(n^2 - \epsilon_{\perp})[\epsilon_{||}n_z^2 + \epsilon_{\perp}(n_x^2 + n_y^2) - \epsilon_{\perp}\epsilon_{||}] = 0.$$

En otras palabras, la ecuación de cuarto grado se descompone en dos ecuaciones de segundo

$$n^2 = \epsilon_{\perp}, \quad (78.1)$$

$$\frac{n_z^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\epsilon_{||}} = 1. \quad (78.2)$$

Geométricamente, esto significa que la superficie de los vectores de onda (que en el caso general es una superficie de cuarto grado) se descompone en dos superficies separadas, a saber, una esfera y un elipsoide. En la figura 37 se representa un corte longitudinal (eje z) de estas superficies. Son posibles aquí dos casos: si $\epsilon_{\perp} > \epsilon_{||}$, la esfera se encuentra fuera del elipsoide, mientras que si se tiene $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{||}$, es interior al mismo (en el primer caso el cristal uniaxial se califica de *negativo*, y en el segundo, de *positivo*). Ambas superficies son tangentes entre sí en dos puntos, que son los polos opuestos situados sobre el eje n_z . Dicho de otra manera, a la dirección del eje óptico corresponde un solo valor del vector de onda.

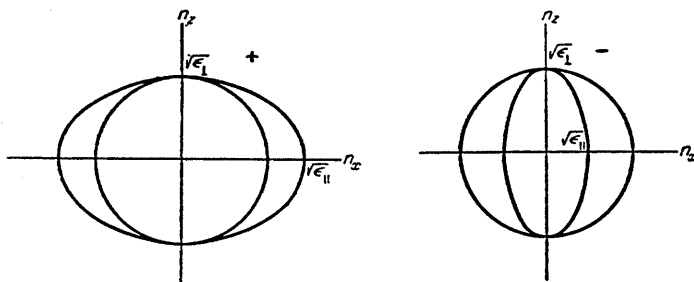


FIG. 37

Una forma totalmente análoga la posee la superficie de los rayos. Según la regla (77.16), su ecuación se obtiene a partir de (78.1) y (78.2) substituyendo \mathbf{n} por \mathbf{s} y ϵ por $1/\epsilon$:

$$s^2 = 1/\epsilon_{\perp}, \quad (78.3)$$

$$\epsilon_{\perp}s_z^2 + \epsilon_{\parallel}(s_x^2 + s_y^2) = 1. \quad (78.4)$$

En un cristal positivo el elipsoide se encuentra dentro de la esfera, y en uno negativo, al revés.

Vemos de esta manera que en un cristal uniaxial pueden propagarse ondas de dos tipos. En relación con uno de ellos (las llamadas *ondas ordinarias*) el cristal se comporta como un cuerpo isótropo, con un índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$. El módulo del vector de onda es igual a $\omega n/c$, sin depender de su dirección, mientras que el vector rayo coincide con la dirección de \mathbf{n} .

En cambio, en las ondas del segundo tipo (las llamadas *ondas extraordinarias*) el módulo del vector de onda depende del ángulo θ que forma con el eje óptico. Según (78.2), se tiene

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}}. \quad (78.5)$$

En lo que concierne al vector rayo de la onda extraordinaria, su dirección no coincide con la del correspondiente vector de onda, pero ambos se encuentran en un mismo plano que pasa por el eje óptico (plano que se llama *sección principal* correspondiente al \mathbf{n} dado). Supongamos que dicho plano coincide con el plano zx . Derivando el primer miembro de la igualdad (78.2) respecto de n_z y de n_x y formando el cociente de estas derivadas, se encuentra la dirección del vector rayo:

$$s_x/s_z = \epsilon_{\perp}n_x/\epsilon_{\parallel}n_z.$$

En otras palabras, el ángulo θ' entre el vector rayo y el eje óptico está ligado con el ángulo θ por la simple relación:

$$\operatorname{tg} \theta' = (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}) \operatorname{tg} \theta. \quad (78.6)$$

Las direcciones de \mathbf{n} y \mathbf{l} coinciden solamente para las ondas que se propagan a lo largo del eje óptico o perpendicularmente al mismo.

La cuestión de cuál sea la polarización de las ondas ordinaria y extraordinaria se resuelve de manera muy sencilla. Para ello basta observar que los cuatro vectores \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{s} , \mathbf{n} son coplanarios en cualquier onda. En la onda extraordinaria las direcciones de \mathbf{s} y \mathbf{n} no coinciden, pero se encuentran en la misma sección principal. Por ello, esta onda está polarizada de manera que los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} se encuentran en dicha sección. Por otra parte, los vectores \mathbf{D} en las ondas ordinaria y extraordinaria con igual dirección de \mathbf{n} (o los vectores \mathbf{E} para igual dirección de \mathbf{s}) son perpendiculares entre sí. En consecuencia, la polarización de la onda ordinaria es tal que \mathbf{E} y \mathbf{D} se hallan en un plano perpendicular a la sección principal.

Sólo constituyen excepción las ondas que se propagan en la dirección del eje

óptico. En esta dirección desaparece la diferencia entre las ondas ordinaria y extraordinaria, sus polarizaciones se componen y dan lugar, en general, a una onda polarizada elípticamente.

El fenómeno de la refracción de una onda plana que incide sobre la superficie de un cristal difiere fundamentalmente de la refracción en la superficie de separación entre dos medios isótropos. La ley de refracción (y la de reflexión) también aquí se obtiene a partir de la condición de que sea continua la componente n_t del vector de onda tangente a la superficie de separación. Por ello, el vector de onda de la refractada (como también el de la reflejada) se encuentra en el plano de incidencia. Sin embargo, aparecen entonces simultáneamente en el cristal dos ondas refractadas diferentes (*doble refracción*) en correspondencia con los dos valores posibles de la componente normal que resultan de la ecuación de Fresnel para un n_t dado. Además, es necesario recordar que la dirección observada de propagación de los rayos se determina no por el vector de onda, sino por el vector rayo s ; dicha dirección difiere de la de n y, en el caso general, se encuentra fuera del plano de incidencia.

En un cristal uniaxial, se forman en la refracción ondas refractadas ordinaria y extraordinaria. La primera es por completo análoga a las ondas refractadas ordinarias en los medios isótropos; en particular, su vector rayo (que coincide en dirección con el vector de onda) se encuentra en el plano de incidencia. En cambio, la dirección del vector rayo de la onda extraordinaria no se halla, en general, en dicho plano.

PROBLEMAS

1. Hallar la dirección del rayo extraordinario en la refracción de la luz (que incide desde el vacío) por la superficie de un cristal uniaxial perpendicular a su eje óptico.

Solución. En este caso, el rayo refractado permanece en el plano de incidencia (que elegiremos como plano xz , con el eje z dirigido según la normal a la superficie). En la refracción se conserva la componente x del vector de onda $n_x = \sin \vartheta$ (ϑ es el ángulo de incidencia); la componente n_z de la onda refractada se encuentra según (78.2):

$$n_z = \sqrt{\left(\epsilon_{\perp} - \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} \sin^2 \vartheta\right)}.$$

La dirección del rayo refractado (ϑ' es el ángulo de refracción) se encuentra a partir de (78.6):

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} \frac{n_x}{n_z} = \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp}} \sin \vartheta}{\sqrt{[\epsilon_{\parallel}(\epsilon_{\parallel} - \sin^2 \vartheta)]}}.$$

2. Hallar la dirección del rayo extraordinario para incidencia normal de la luz sobre la superficie de un cristal uniaxial y una dirección arbitraria del eje óptico.

Solución. El rayo refractado se encuentra en el plano xz que pasa por la normal a la superficie (eje z) y el eje óptico; sea α el ángulo formado por dicha normal y este eje. El vector rayo (cuyas componentes son proporcionales a las derivadas del primer miembro de la ecuación (78.2) respecto de las correspondientes componentes de n) es proporcional a

$$\frac{n}{\epsilon_{\parallel}} + (n \cdot l) l \left(\frac{1}{\epsilon_{\perp}} - \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \right),$$

donde \mathbf{l} es el vector unitario en la dirección del eje óptico. En el presente caso, el vector de onda \mathbf{n} está dirigido según el eje z , de modo que

$$s_x \sim \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{\epsilon_{\perp}} - \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \right), \quad s_z \sim \frac{\sin^2 \alpha}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon_{\perp}}.$$

A partir de aquí se encuentra para el ángulo de refracción ϑ' :

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{s_x}{s_z} = \frac{(\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \sin 2\alpha}{\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp} + (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \cos 2\alpha}.$$

§ 79. Cristales biáxicos

En los cristales biáxicos, los tres valores principales del tensor ϵ_{ik} son diferentes. A este tipo de cristales pertenecen los sistemas triclinico, monoclinico y rómbico. En los cristales del sistema triclinico la posición de los ejes dieléctricos principales no está vinculada absolutamente con ninguna dirección cristalográfica determinada; en particular, dicha posición cambia al variar la frecuencia, de la que dependen todas las componentes ϵ_{ik} . En los cristales del sistema monoclinico, está fijado cristalográficamente uno de los ejes dieléctricos principales (que coincide con el eje de simetría de segundo orden o es perpendicular al plano de simetría); en cambio, la posición de los otros dos ejes principales depende de la frecuencia. Finalmente, en los cristales del sistema rómbico está fijada la posición de los tres ejes principales, los cuales deben coincidir con los tres ejes de simetría de segundo orden perpendiculares entre sí.

El estudio de las propiedades ópticas de los cristales biáxicos supone el de la ecuación de Fresnel (77.10) en su forma general.

Admitamos en lo que sigue, para concretar, que

$$\epsilon^{(x)} < \epsilon^{(y)} < \epsilon^{(z)}. \quad (79.1)$$

A fin de determinar la forma de la superficie de cuarto orden definida por la ecuación (77.10), hallemos ante todo la forma de sus secciones por los planos de coordenadas. Haciendo en la ecuación (77.10) $n_z = 0$, se encuentra que su primer miembro se descompone en dos factores:

$$(n^2 - \epsilon^{(z)})(\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 - \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}) = 0.$$

Es por esto evidente que el contorno de la sección en el plano xy está formado por la circunferencia

$$n^2 = \epsilon^{(z)} \quad (79.2)$$

y la elipse

$$\frac{n_x^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{n_y^2}{\epsilon^{(x)}} = 1, \quad (79.3)$$

encontrándose la elipse dentro de la circunferencia de acuerdo con la hipótesis (79.1). De manera análoga se encuentra que la sección con los planos yz y xz también se descompone en una elipse y una circunferencia, pero en el plano yz la elipse se encuentra fuera de la circunferencia, mientras que en el plano xz se cortan. Así pues, la superficie de los vectores de onda es una superficie que se corta a sí misma, del tipo representado en la figura 38 (en la figura se ha dibujado la superficie en un octante).

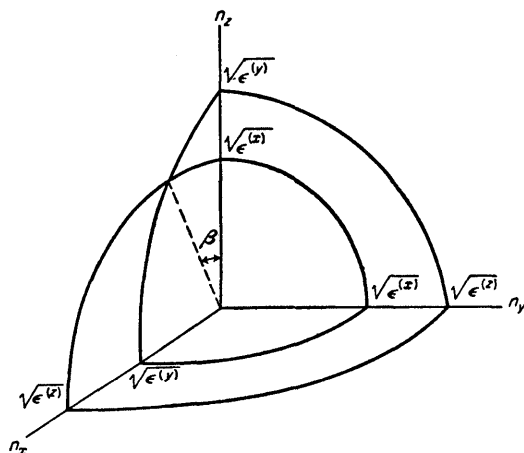


FIG. 38

Esta superficie tiene cuatro puntos singulares, los cuatro puntos de intersección consigo misma que se encuentran en cada uno de los cuadrantes situados en el plano xz . Los puntos singulares de una superficie dada por una ecuación del tipo $f(n_x, n_y, n_z) = 0$, se determinan, como es sabido, igualando a cero las tres derivadas primeras de la función f . Derivando la expresión que aparece en el primer miembro de la ecuación (77.10), obtendremos las siguientes ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} n_x[\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) - \epsilon^{(x)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0, \\ n_y[\epsilon^{(y)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) - \epsilon^{(y)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0, \\ n_z[\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)}) - \epsilon^{(z)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (79.4)$$

(debiendo cumplirse además, naturalmente, la propia ecuación (77.10)). Dado que sabemos a priori que las direcciones buscadas de \mathbf{n} se encuentran en el plano xz , hagamos $n_y = 0$, con lo cual de las otras dos ecuaciones se deduce, después de un simple cálculo*:

$$n_x^2 = \frac{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}}, \quad n_z^2 = \frac{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}}. \quad (79.5)$$

* Es fácil comprobar directamente que la solución así obtenida es la única solución real de las ecuaciones (79.4). Si las tres componentes n_x, n_y, n_z son diferentes de cero, las tres ecuaciones (79.4) son incompatibles (en ellas intervienen solamente dos incógnitas, esencialmente: n_x^2 y $\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2$). Pero si $n_x = 0$ o $n_z = 0$, las ecuaciones tienen soluciones imaginarias.

Las direcciones de estos vectores \mathbf{n} forman con el eje z un ángulo para el cual

$$\frac{n_x}{n_z} = \pm \operatorname{tg} \beta = \pm \sqrt{\frac{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}}. \quad (79.6)$$

Esta fórmula determina dos ejes (dos direcciones) en el plano xz , cada uno de los cuales pasa por dos puntos singulares opuestos y forma con el eje z el ángulo β . Estos ejes se llaman *ejes ópticos* (o *binormales*) del cristal; en la figura 38 se indica por una recta de puntos uno de ellos. Las direcciones de los ejes ópticos son, evidentemente, las únicas direcciones en las que el vector de onda tiene un único valor*.

Propiedades completamente análogas tiene la superficie de los rayos. Para obtener las correspondientes fórmulas basta substituir \mathbf{n} por \mathbf{s} y ϵ por $1/\epsilon$. En particular, se tienen dos *ejes ópticos de rayos* (o *birradiales*), que se encuentran también en el plano xz y que forman con el eje z un ángulo γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)}}} = \sqrt{\frac{\epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(z)}}} \operatorname{tg} \beta. \quad (79.7)$$

Dado que $\epsilon^{(x)} < \epsilon^{(z)}$, se tendrá $\gamma < \beta$.

Las direcciones de los vectores \mathbf{n} y \mathbf{s} que se corresponden entre sí vienen determinadas por las fórmulas generales (77.12a). Estas direcciones coinciden solamente para las ondas que se propagan a lo largo de uno de los ejes de coordenadas (es decir, de uno de los ejes dieléctricos principales). Si \mathbf{n} se encuentra en uno de los planos de coordenadas, el vector \mathbf{s} se encuentra también en dicho plano. Esta regla, sin embargo, tiene una notable excepción: la de los vectores de onda dirigidos en el sentido de los ejes ópticos.

Al substituir los valores de \mathbf{n} dados por (79.5), las fórmulas (77.12a) dan para las componentes de \mathbf{s} una expresión indeterminada de la forma $0/0$. La causa y el significado de esta indeterminación es del todo comprensible en virtud de las siguientes consideraciones geométricas. Cerca de un punto singular las hojas exterior e interior de la superficie de los vectores de onda representan conos que tienen un vértice común. En este vértice (que es el punto singular) la dirección de la normal a la superficie resulta indeterminada; ahora bien, las fórmulas (77.12a) determinan la dirección de \mathbf{s} precisamente como dirección de la normal. En realidad, a un vector de onda dirigido a lo largo de un eje óptico (de una binormal) corresponde un conjunto infinito de vectores rayo cuyas direcciones forman una determinada superficie cónica (que es el llamado *cono de refracción cónica interna*).

Para hallar este cono de rayos cabría estudiar las direcciones de las normales en la vecindad del punto singular. Sin embargo, un camino más intuitivo se basa en la construcción geométrica mediante la superficie de los rayos.

* En el elipsoide tensorial (77.19) las binormales se determinan como direcciones para las que las secciones del elipsoide por planos perpendiculares a las mismas son circunferencias. Como es sabido, un elipsoide de tres ejes posee dos de tales secciones.

En la figura 39 se ha representado en un cuadrante (por líneas continuas) la sección de la superficie de los rayos por el plano xz . Referida a estos mismos ejes de coordenadas se ha representado (cambiando arbitrariamente la escala) la sección de la superficie de los vectores de onda. La recta OS es la birradial, y la ON , la binormal; el vector de onda que corresponde al punto N se designará por \mathbf{n}_N . Es fácil ver que al punto singular N de la superficie de vectores de onda corresponde, sobre la superficie de los rayos, un plano tangente singular, que es perpendicular a la dirección ON y tangente a la superficie no en un solo punto, sino según una curva completa (que resulta ser una circunferencia). En la figura 39 la traza de este plano se ha representado por el segmento ab . Esto se sigue inmediatamente de la correspondencia geométrica indicada en el § 77 entre la superficie de los vectores de onda y la superficie de los rayos: si en un punto cualquiera s de la superficie de los rayos se traza el plano tangente, la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a este plano coincide en dirección con \mathbf{n} y su longitud es igual a $1/n$, donde \mathbf{n} es el vector de onda que corresponde al s dado. En nuestro caso debe tenerse un conjunto infinito de vectores s que corresponden a un mismo $\mathbf{n} = \mathbf{n}_N$; por ello, los puntos correspondientes de la superficie de los rayos deben encontrarse en un mismo plano tangente, debiendo ser éste perpendicular a \mathbf{n}_N . Así pues, en la figura 39 el triángulo Oab es la traza de la sección del cono de refracción cónica interna por el plano xz .

El cálculo cuantitativo correspondiente a la construcción geométrica que precede no ofrece dificultades particulares, pero no lo expondremos aquí, limitándonos a dar las fórmulas finales. La ecuación de la circunferencia, que es intersección del cono de refracción y la superficie de los rayos, viene definida por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} &(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)})s_y^2 + \\ &+ \{s_x\sqrt{[\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})]} - s_z\sqrt{[\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})]}\} \times \\ &\times \left(s_x\sqrt{\frac{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)}}{\epsilon^{(x)}}} - s_z\sqrt{\frac{\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(z)}}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (79.8)$$

$$s_x\sqrt{[\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})]} + s_z\sqrt{[\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})]} = \sqrt{[\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}]}. \quad (79.9)$$

La primera de estas ecuaciones, si en ella se interpreta s_x , s_y , s_z como tres variables independientes, es la ecuación del propio cono de refracción. En cuanto a la segunda, ésta da la ecuación del plano tangente a la superficie de los rayos. En particular, para $s_y = 0$ la ecuación (79.8) se descompone en dos ecuaciones

$$\frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}}, \quad \frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}},$$

que determinan las direcciones de los rayos límite (los Oa y Ob , respectivamente, en la figura 39) en el plano de la sección por xz . La primera de ellas coincide con la dirección de la binormal (cf. (79.6)), que, al mismo tiempo, es perpendicular a la tangente ab .

Una situación por completo análoga se presenta para los vectores de onda que

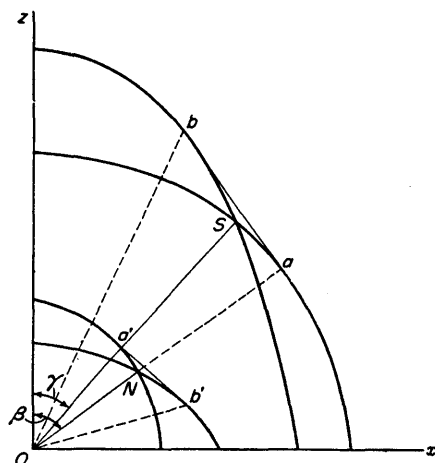


FIG. 39

corresponden a un vector rayo dado. Al vector s , dirigido según la birradial, corresponde un conjunto infinito de vectores de onda cuyas direcciones forman el llamado *cono de refracción cónica externa* (en la figura 39 el triángulo Oab es la sección del cono por el plano xz). Las correspondientes fórmulas se obtienen, como siempre, mediante las substituciones $s \rightarrow n$, $\epsilon \rightarrow 1/\epsilon$ en las fórmulas (79.8), (79.9), y se escriben:

$$\begin{aligned} \epsilon(y)(\epsilon(z) - \epsilon(x))n_y^2 + [n_x\sqrt{(\epsilon(z) - \epsilon(y))} - n_z\sqrt{(\epsilon(y) - \epsilon(x))}] \times \\ \times [n_x\epsilon(x)\sqrt{(\epsilon(z) - \epsilon(y))} - n_z\epsilon(z)\sqrt{(\epsilon(y) - \epsilon(x))}] = 0, \\ n_x\sqrt{(\epsilon(y) - \epsilon(x))} + n_z\sqrt{(\epsilon(z) - \epsilon(y))} = \sqrt{[\epsilon(y)(\epsilon(z) - \epsilon(x))]} \end{aligned}$$

Para observar de hecho la refracción cónica interna* cabe valerse de una placa planoparalela cortada en un cristal perpendicular a una binormal (fig. 40). La superficie de la placa está cubierta por un diafragma de pequeña abertura que separa de la onda que incide perpendicularmente sobre la placa (onda con una determinada dirección del vector de onda) un haz estrecho. El vector de onda en la luz que penetra en la placa tiene esta misma dirección, que coincide con la binormal, y por ello los rayos se distribuyen según la superficie del cono de refracción interna. La luz que sale por la otra superficie de la placa, que tiene el mismo vector de onda que la luz incidente, se distribuye así sobre la superficie de un cilindro circular.

Para observar la refracción cónica exterior, en cambio, la placa debe cortarse perpendicularmente a una birradial, mientras que sus dos superficies se cubren por diafragmas con pequeñas aberturas y dispuestos exactamente el uno frente al otro. Al iluminar la placa con un haz de luz convergente (es decir, con un haz que contiene

* La descripción que sigue es muy esquemática.

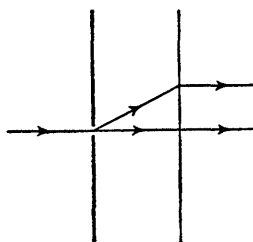


FIG. 40

rayos en todas las direcciones posibles de \mathbf{n}) los diafragmas permiten la penetración en la placa de los rayos cuya dirección \mathbf{s} coincide con la de la birradial \mathbf{y} , por lo tanto, con direcciones \mathbf{n} que forman la superficie del cono de refracción cónica externa. La luz que sale de la segunda abertura se distribuye también, en consecuencia, sobre una superficie cónica (la cual, sin embargo, debido a la refracción a la salida, no coincide exactamente con el cono de refracción externa).

Las leyes de la refracción sobre la superficie de un cristal biáxico para una dirección de incidencia arbitraria son extraordinariamente complicadas y no nos paramos a considerarlas*. Indicaremos solamente que, en contraste con el caso de un cristal uniáxico, las dos ondas refractadas son «extraordinarias» y, en particular, sus rayos no se encuentran en el plano de incidencia.

§ 80. Doble refracción en un campo eléctrico

Un cuerpo isótropo colocado en un campo eléctrico constante se convierte en ópticamente anisótropo. La aparición de esta anisotropía puede considerarse como resultado del cambio de la permitividad bajo la influencia del campo constante. Aunque el cambio es relativamente débil, sin embargo, es fundamental en este caso, ya que conduce a una variación cualitativa de las propiedades ópticas del cuerpo.

En este párrafo designaremos por \mathbf{E} la intensidad del campo eléctrico constante en el cuerpo** y efectuaremos el desarrollo del tensor permitividad ϵ_{ik} en potencias de esta cantidad. En un cuerpo isótropo, en la aproximación de orden cero es $\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik}$. No pueden existir términos de primer orden respecto del campo en ϵ_{ik} , puesto que en un cuerpo isótropo no existe ningún vector constante que permitiera construir un tensor de segundo orden lineal en \mathbf{E} . Por lo tanto, los términos siguientes del desarrollo de ϵ_{ik} serán cuadráticos respecto del campo. A partir de las componentes de un vector se pueden construir dos tensores simétricos de segundo orden: $E^2\delta_{ik}$ y E_iE_k . De ellos, el primero no altera la simetría del tensor $\epsilon^{(0)}\delta_{ik}$ y la suma

* Una exposición detallada de los correspondientes cálculos se puede encontrar en *Handbuch d. Physik*, Bd. XX, Berlín, 1928.

** ¡No se confunda con la intensidad, de ordinario muy pequeña, del campo eléctrico variable en la onda!

a éste de un término de la forma constante $E^2\delta_{ik}$ se reduce simplemente a una pequeña corrección a la constante escalar $\epsilon^{(0)}$; esta corrección no lleva, evidentemente, a la aparición de ninguna anisotropía óptica y, en consecuencia, carece de interés. De esta manera llegamos a la siguiente forma del tensor permitividad como función del campo:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_i E_k, \quad (80.1)$$

donde α es una constante escalar.

Uno de los ejes principales de este tensor coincide con la dirección del campo eléctrico y el correspondiente valor principal es igual a

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon^{(0)} + \alpha E^2. \quad (80.2)$$

Los otros dos valores principales son iguales entre sí,

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon^{(0)}, \quad (80.3)$$

y la posición de los correspondientes ejes principales en un plano perpendicular al campo es arbitraria. Así pues, un cuerpo isótropo en un campo eléctrico se comporta desde el punto de vista óptico, como un cristal uniaxial (*efecto Kerr*).

El cambio de la simetría óptica en un campo eléctrico puede también tener lugar en un cristal (así, un cristal ópticamente uniaxial puede transformarse en biaxial, un cristal cúbico ópticamente isótropo puede convertirse en ópticamente anisótropo). En contraste con el fenómeno correspondiente en el caso de los cuerpos isótropos, el efecto puede aquí ser también de primer orden respecto del campo. A este efecto lineal corresponde un tensor dieléctrico de la forma

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + \alpha_{ikl} E_l,$$

donde el conjunto de los coeficientes α_{ikl} constituyen un tensor de tercer orden simétrico respecto de los índices i y k ($\alpha_{ikl} = \alpha_{k il}$). La simetría de este tensor coincide con la simetría del tensor piezoeléctrico. Por ello, el efecto considerado existe en los cristales de aquellas mismas 20 clases en los que puede darse la piezoelectricidad.

§ 81. Fenómenos dinamo-ópticos

Junto con el efecto Kerr considerado en el párrafo precedente, existen también otros casos de alteración de la simetría óptica de un medio bajo la influencia de agentes exteriores.

Entre ellos encontramos, en primer lugar, el efecto de las deformaciones eléctricas sobre las propiedades ópticas de los sólidos. En particular, como resultado de la deformación, un cuerpo sólido isótropo puede pasar a ser ópticamente anisótropo. Estos fenómenos se describen mediante la introducción en $\epsilon_{ik}(\omega)$ de términos complementarios proporcionales a las componentes del tensor deformación. Las correspondientes expresiones tienen una forma que coincide exactamente con

la de las fórmulas (16.1) y (16.6) que escribimos para la permitividad estática, con la única diferencia de que los coeficientes que en ellos aparecen son ahora funciones de la frecuencia. Así, en la deformación de un cuerpo isótropo

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{ij}\delta_{jk}. \quad (81.1)$$

Los coeficientes $a_1(\omega)$ y $a_2(\omega)$ se llaman *constantes opticoelásticas*.

Otro caso es la aparición de anisotropía óptica en un líquido que se mueve. Claro está, un movimiento de traslación del líquido como un todo no puede conducir a ninguna anisotropía; por ello, es necesario que existan en el mismo gradientes de velocidad. La correspondiente expresión general para el tensor dieléctrico

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + \lambda_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (81.2)$$

representa los primeros términos del desarrollo de ϵ_{ik} en potencias de las derivadas de la velocidad. En un líquido incompresible se tiene $\partial v_i / \partial x_i \equiv \text{div } \mathbf{v} = 0$ y los dos últimos términos en (81.2) se anulan al contraer (i, k). Además, $\epsilon^{(0)}$ coincide con la permitividad del líquido en reposo*.

El segundo y tercer términos en (81.2) son, respectivamente, simétrico y antisimétrico respecto de los índices i, k . En una rotación uniforme del líquido como un todo, se tiene $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ ($\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de rotación) y el término simétrico se anula**.

De hecho, los fenómenos considerados adquieren un valor apreciable tan sólo en aquellos sistemas como las suspensiones y las disoluciones coloidales con partículas de forma anisótropa. En este caso, el efecto, llamado *efecto Maxwell*, está ligado fundamentalmente con la acción orientadora de los gradientes de velocidad sobre las partículas en suspensión en el líquido. Puesto que una rotación uniforme no puede orientar las partículas, se tendrá $\lambda_2 \ll \lambda_1$, de modo que

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + \lambda_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (81.3)$$

§ 82. Efectos magneto-ópticos

Cuando existe un campo magnético constante \mathbf{H}^{***} , el tensor ϵ_{ik} deja de ser

* Para evitar posibles malentendidos, subrayaremos que a la expresión (81.2) no son aplicables las relaciones de simetría que se estudiaron en V, § 127 (principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos). Al deducir dichas relaciones se supuso que los procesos descritos por los coeficientes considerados son las únicas fuentes de disipación de energía en el sistema. Pero, en el presente caso, junto con la disipación en el campo electromagnético variable de la onda, se tiene todavía una fuente más de disipación que nada tiene que ver con el campo, a saber, el rozamiento interno en la corriente no homogénea de líquido.

** Las propiedades ópticas que resultan de la parte antisimétrica de ϵ_{ik} se estudian en el § 82.

*** ¡No se confunda con el campo débil periódico de la onda electromagnética!

simétrico. El principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos, expresado por la fórmula (V. 127.16), exige que:

$$\epsilon_{ik}(\mathbf{H}) = \epsilon_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (82.1)$$

La condición de que no exista absorción implica únicamente el carácter hermitico de este tensor:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}^*, \quad (82.2)$$

(como puede verse a partir de (76.4)), pero no el que sea real. De (82.2) se sigue sólo que las partes real e imaginaria de ϵ_{ik} han de ser, respectivamente, simétrica y antisimétrica:

$$\epsilon_{ik}' = \epsilon_{ki}', \quad \epsilon_{ik}'' = -\epsilon_{ki}''. \quad (82.3)$$

Teniendo en cuenta (82.1), resulta

$$\begin{aligned} \epsilon_{ik}'(\mathbf{H}) &= \epsilon_{ki}'(\mathbf{H}) = \epsilon_{ik}'(-\mathbf{H}), \\ \epsilon_{ik}''(\mathbf{H}) &= -\epsilon_{ki}''(\mathbf{H}) = -\epsilon_{ik}''(-\mathbf{H}), \end{aligned} \quad (82.4)$$

es decir, en un medio no absorbente las magnitudes ϵ_{ik}' son funciones pares de \mathbf{H} , y las ϵ_{ik}'' , funciones impares.

Estas mismas propiedades de simetría, posee, evidentemente, también el tensor inverso ϵ_{ik}^{-1} . En los cálculos que seguirán resultará más conveniente utilizar precisamente este tensor. Para simplificar la notación, escribiremos*

$$\epsilon^{-1}_{ik} = \eta_{ik} = \eta_{ik}' + i\eta_{ik}''. \quad (82.5)$$

Como es sabido, cualquier tensor antisimétrico de segundo orden es equivalente a un cierto vector axil (su dual); para el tensor η_{ik}'' designaremos este vector por \mathbf{G} . Mediante el tensor unidad totalmente antisimétrico e_{ikl} , la relación entre las componentes del tensor η_{ik}'' y del vector \mathbf{G} se escribe en la forma

$$\eta_{ik}'' = e_{ikl}G_l, \quad (82.6)$$

o, en componentes:

$$\eta_{xy}'' = G_z, \quad \eta_{zx}'' = G_y, \quad \eta_{yz}'' = G_x.$$

La relación $E_i = \eta_{ik}D_k$ entre el desplazamiento eléctrico y la intensidad del campo toma entonces la forma siguiente:

$$E_i = (\eta_{ik}' + ie_{ikl}G_l)D_k = \eta_{ik}'D_k + i(\mathbf{D} \times \mathbf{G})_i. \quad (82.7)$$

Un medio en el que la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{D} posea esta forma se califica de *girotrópico***.

* Claro está, η_{ik}' y η_{ik}'' no son los tensores inversos de los ϵ'_{ik} y ϵ''_{ik} .

** Se suele llamar *vector giro* al vector \mathbf{g} en la relación directa $D_i = \epsilon_{ik}'E_k + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g})_i$. (82.7a)

Entre los coeficientes en (82.7) y (82.7a) existen las relaciones dadas por las siguientes fórmulas (véase el problema 1 del § 21):

$$\eta_{ik}' = \{|\epsilon'| \epsilon'^{-1}_{ik} - g_i g_k\} / |\epsilon|, \quad G_i = -\epsilon_{ik}' g_k / |\epsilon|, \quad (82.7b)$$

donde $|\epsilon|$ y $|\epsilon'|$ son los determinantes de los tensores ϵ_{ik} y ϵ'_{ik} .

Estudiemos de manera general el carácter de las ondas que se propagan en un medio girotrópico arbitrario, suponiendo que éste es anisótropo y sin hacer hipótesis alguna acerca del valor del campo magnético*.

Elijamos el eje z de modo que sea paralelo a la dirección del vector de onda y escribamos la ecuación (77.18) en la forma:

$$\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right)D_\beta = \left(\eta_{\alpha\beta}' + i\eta_{\alpha\beta}'' - \frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right)D_\beta = 0, \quad (82.8)$$

donde los subíndices α, β toman los valores x, y . Los ejes x e y los tomaremos paralelos a los ejes principales del tensor bidimensional $\eta'_{\alpha\beta}$ y designaremos los correspondientes valores principales de este tensor por n_{01}^2 y n_{02}^2 ; entonces las ecuaciones adoptan la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2}\right)D_x + iG_z D_y &= 0, \\ -iG_z D_x + \left(\frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2}\right)D_y &= 0. \end{aligned} \quad (82.9)$$

La condición de que el determinante de este sistema sea igual a cero da la ecuación cuadrática respecto de n :

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{01}^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) = G_z^2, \quad (82.10)$$

cuyas raíces determinan los dos valores de n asociados con la dirección dada de \mathbf{n} **

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2} + \frac{1}{n_{02}^2}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right)^2 + G_z^2\right]}. \quad (82.11)$$

Substituyendo estos valores en la ecuación (82.9), se encuentran las correspondientes razones:

$$\frac{D_y}{D_x} = \frac{i}{G_z} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right)^2 + G_z^2\right]} \right\}. \quad (82.12)$$

Que la razón D_y/D_x sea imaginaria pura significa que las ondas están polarizadas elípticamente y que los ejes principales de las elipses de polarización coinciden con los ejes x, y . El producto de los dos valores de esta razón es igual a la unidad,

* Como antes, admitiremos que el medio es no magnético respecto al campo variable de la onda electromagnética (es decir, suponemos $\mu_{ik}(\omega) = \delta_{ik}$). Con esto, sin embargo, no se excluye la posibilidad de imanación del medio por un campo constante (es decir, la permeabilidad estática puede ser diferente de 1).

Todas las propiedades de $\epsilon_{ik}(\omega)$ que hemos expuesto valen en igual grado para el tensor $\mu_{ik}(\omega)$ cuando en el intervalo de frecuencias en cuestión cobra importancia la dispersión de la permeabilidad.

** Cuando no existe campo, $\mathbf{G} = 0$ y $n = n_{01}$ o n_{02} . Sin embargo, no hay que perder de vista que cuando el campo no es nulo las magnitudes n_{01} y n_{02} en la ecuación (82.10) no tienen, en general, el sentido de valores de n para $\mathbf{H} = 0$, puesto que no sólo el vector \mathbf{G} depende del campo, sino también las componentes del tensor η'_{ik} .

como es fácil ver. En otras palabras, si en una onda es

$$D_y = i\rho D_x,$$

(donde el número real ρ representa la razón de las longitudes de los ejes de la elipse de polarización), en la otra onda se tendrá

$$D_y = -iD_x/\rho.$$

Esto significa que para las elipses de polarización de las dos ondas la razón de los ejes es la misma, pero que dichas elipses están giradas 90° una respecto de otra; los sentidos de la rotación en ellas son opuestos (fig. 41)*.

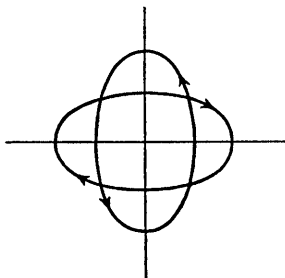


FIG. 41

Las componentes del vector \mathbf{G} y del tensor η_{ik}' son funciones de la intensidad del campo magnético. Si (como ocurre con frecuencia) el campo magnético es relativamente débil, puede efectuarse el desarrollo en potencias del mismo. El vector \mathbf{G} es igual a cero cuando no hay campo; por ello, en un campo magnético podemos hacer

$$G_i = f_{ik}H_k, \quad (82.13)$$

donde f_{ik} es un tensor de segundo orden, en general no simétrico. Este tipo de dependencia está de acuerdo con la regla general (82.4) según la cual en un medio transparente las componentes del tensor antisimétrico η_{ik}'' (al igual que las del tensor ϵ_{ik}'') deben ser funciones impares de \mathbf{H} . Por lo que se refiere al tensor simétrico η_{ik}' , sus componentes son funciones pares del campo magnético. En consecuencia, los primeros términos correctivos (respecto de los valores cuando no existe la onda) de η_{ik}' son de segundo orden respecto del campo**.

* Si se designan los vectores \mathbf{D} en ambas ondas por \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 , las relaciones obtenidas pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2^* = D_{1x}D_{2x}^* + D_{1y}D_{2y}^* = 0.$$

Esta es una propiedad general de los vectores propios que se obtienen al reducir a sus ejes un tensor hermitico (en este caso, el tensor $\eta_{\alpha\beta}'$).

** Al prescindir de cantidades de segundo orden, las fórmulas (82.7b) se reducen a las relaciones siguientes más sencillas:

$$\eta_{ik}' = \epsilon'^{-1}_{ik}, \quad G_i = -\epsilon'_{ik}g_k/|\epsilon'|. \quad (82.13a)$$

En el caso general en que el vector de onda tiene una dirección arbitraria, el campo magnético influye relativamente poco sobre la propagación de la luz en el cristal, provocando solamente la aparición de una débil polarización elíptica de las oscilaciones con una pequeña razón (de primer orden respecto del campo) de las longitudes de los ejes de la elipse correspondiente.

Una excepción en el carácter del efecto magneto-óptico la constituyen solamente las direcciones de los ejes ópticos (y las próximas a los mismos), a lo largo de los cuales ambos valores de n coinciden cuando no existe el campo. Las raíces de la ecuación (82.10) difieren entonces de estos valores en cantidades que son de primer orden* y se presentan efectos análogos a los que se producen en los cuerpos isótropos que pasamos a considerar a continuación.

El efecto magneto-óptico en los cuerpos isótropos (y también en los cristales del sistema cúbico) presenta particular interés debido a su carácter peculiar y a su intensidad relativamente grande.

Prescindiendo de las cantidades de segundo orden, tenemos $\eta'_{ik} = \epsilon^{-1}\delta_{ik}$, donde ϵ es la permitividad del medio isótropo en ausencia de campo magnético. La dependencia entre \mathbf{D} y \mathbf{E} viene dada por la fórmula

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D} + i\mathbf{D} \times \mathbf{G}, \quad (82.14)$$

o bien

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + i\mathbf{E} \times \mathbf{g}, \quad (82.15)$$

estando ligados los vectores \mathbf{g} y \mathbf{G} , en esta misma aproximación, por la relación

$$\mathbf{G} = -\mathbf{g}/\epsilon^2. \quad (82.16)$$

La dependencia de \mathbf{g} (o de \mathbf{G}) respecto del campo en un medio isótropo se reduce a la simple proporcionalidad:

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}; \quad (82.17)$$

la constante escalar lo mismo puede ser positiva que negativa.

En la ecuación (82.10) tenemos ahora $n_{01} = n_{02} \equiv n_0 = \sqrt{\epsilon}$; éste es el coeficiente de refracción cuando no existe la onda. Por consiguiente,

$$1/n^2 = \mp G_z + 1/n_0^2$$

o bien, con la misma precisión,

$$n_{\mp}^2 = n_0^2 \pm n_0^4 G_z = n_0^2 \mp g_z. \quad (82.18)$$

* Hay que hacer notar que las dos raíces de la ecuación (82.10) difieren entonces un poco entre sí. Esto significa geométricamente que las dos hojas (la interior y la exterior) de la superficie de vectores de onda están separadas.

Recordando que el eje z se ha elegido paralelo al vector \mathbf{n} , puede escribirse esta fórmula con igual precisión en la forma vectorial siguiente:

$$\left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right)^2 = n_0^2. \quad (82.19)$$

Se ve por esto que la superficie de los vectores de onda está constituida, en el presente caso, por un sistema de dos esferas de radio n_0 cuyos centros están desplazados en la dirección del vector \mathbf{G} a distancias $\pm g/2n_0$ del origen de coordenadas.

A cada uno de los dos valores de n se asocia su polarización de la onda, a saber,

$$D_x = \mp iD_y, \quad (82.20)$$

donde los signos corresponden a los de (82.18). La igualdad de los valores absolutos de D_x y D_y , junto con un corrimiento de fases entre ellos de $\mp \pi/2$, significa que las ondas están polarizadas circularmente, con un sentido de rotación del vector \mathbf{D} contrario al de las agujas de un reloj y en el mismo sentido, respectivamente, si se mira en el sentido en que está orientado el vector de onda (o bien, como se suele decir, ondas polarizadas *a la derecha* (dextrógira) y *a la izquierda* (levógira), respectivamente).

La diferencia entre los índices de refracción de las ondas polarizadas a la izquierda y a la derecha conduce a que, en la refracción por la superficie de un cuerpo girotrópico, aparecen dos ondas refractadas polarizadas circularmente (fenómeno que se llama *doble refracción circular*).

Supongamos que una onda plana polarizada linealmente incide en el sentido de la normal a una lámina planoparalela de cierta substancia (de grosor l). Elegiremos el eje z de modo que sea paralelo a la dirección de incidencia, y el eje x en el sentido de vector $\mathbf{E}(=\mathbf{D})$ de la onda incidente. Una oscilación lineal se puede representar como suma de dos oscilaciones circulares con sentidos de rotación opuestos, las cuales se propagarán luego en la lámina con vectores de onda diferentes $k_{\pm} = (\omega/c)n_{\pm}$. Tomando por convenio igual a la unidad la amplitud de la onda, tendremos

$$D_x = \frac{1}{2}[\exp(ik_+z) + \exp(ik_-z)], \quad D_y = \frac{1}{2}i[-\exp(ik_+z) + \exp(ik_-z)],$$

o bien, introduciendo $k = (\frac{1}{2})(k_+ + k_-)$ y $\kappa = (\frac{1}{2})(k_+ - k_-)$,

$$D_x = \frac{1}{2}e^{ikz}(e^{i\kappa z} + e^{-i\kappa z}) = e^{ikz} \cos \kappa z,$$

$$D_y = \frac{1}{2}ie^{ikz}(-e^{i\kappa z} + e^{-i\kappa z}) = e^{ikz} \sin \kappa z.$$

A la salida de la lámina,

$$D_y/D_x = \operatorname{tg} \kappa l = \operatorname{tg} (l\omega g/2cn_0).$$

El carácter real de esta razón significa que la onda se conserva polarizada linealmente, pero con una dirección de polarización girada respecto de la inicial (*efecto*

Faraday). El ángulo de giro del plano de polarización es proporcional al camino recorrido por la onda; por unidad de longitud en el sentido del vector de onda, dicho giro es igual a

$$(\omega g/2cn_0) \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{n} y \mathbf{g} .

Hay que hacer notar que, para una dirección dada del campo magnético, el sentido de rotación del plano de polarización (respecto del sentido de \mathbf{n}) se transforma en el opuesto al cambiar el signo de \mathbf{n} : la rotación a la derecha se transforma en rotación a la izquierda, y reciprocamente. Por ello, si un rayo recorre un mismo camino dos veces (uno de ida y otro de vuelta), la rotación total del plano de polarización será el doble de la correspondiente a un solo paso.

Cuando $\theta = \pi/2$ (vector de onda perpendicular al campo magnético), el efecto lineal respecto del campo descrito por las fórmulas (82.18) desaparece (de acuerdo con la regla general antes indicada, según la cual, de todas las componentes del vector \mathbf{g} , sólo influye en la propagación de la luz su proyección sobre la dirección de \mathbf{n}). Por lo tanto, para ángulos θ próximos a $\pi/2$ hay que tener también en cuenta los términos que son proporcionales al cuadrado del campo. En particular, deben incluirse los términos de segundo orden en el tensor η'_{ik} . En virtud de la simetría axil en torno de la dirección del campo, los dos valores principales del tensor simétrico η'_{ik} serán iguales (como en un cristal uniáxico). En lo que sigue tomaremos el eje x paralelo a la dirección del campo y designaremos los valores principales de η'_{ik} en las direcciones paralela y perpendicular al campo magnético por η_{\parallel} y η_{\perp} ; la diferencia $\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}$ es proporcional a H^2 .

Consideremos el efecto puramente cuadrático que se produce cuando \mathbf{n} y \mathbf{g} son perpendiculares entre sí (*efecto Cotton-Mouton*). En las ecuaciones (82.9) y (82.10) tenemos, en este caso, $G_x = 0$, mientras que n_{01}^{-2} y n_{02}^{-2} son iguales, respectivamente, a η_{\parallel} y η_{\perp} . De esta manera, en una de las ondas es

$$1/n^2 = \eta_{\parallel}, D_y = 0;$$

esta onda está polarizada linealmente, con el vector \mathbf{D} paralelo al eje x . En cambio, en la otra onda

$$1/n^2 = \eta_{\perp}, D_x = 0,$$

es decir, en ella \mathbf{D} está dirigido a lo largo del eje y . Supongamos que luz polarizada linealmente incide según la normal a una lámina planoparalela que se encuentra en un campo magnético paralelo a la superficie de la misma. Las dos componentes de la luz que penetra en la materia (con vectores \mathbf{D} en los planos xz e yz) se propagan con valores distintos de n . Como resultado de esto la luz que sale por la cara opuesta de la lámina está polarizada elípticamente.

PROBLEMAS

1. Determinar las direcciones de los rayos en la refracción de un rayo que incide desde el vacío sobre la superficie de un cuerpo isótropo en un campo magnético.

Solución. La dirección del vector rayo \mathbf{s} se determina por la normal a la superficie de los vectores de onda; derivando el primer miembro de la ecuación (82.19) respecto de las componentes del vector \mathbf{n} , se encuentra que el vector \mathbf{s} es proporcional a $\mathbf{n} \pm \mathbf{g}/2n_0$. El cuadrado del valor absoluto de esta expresión es igual a n_0^2 ; por ello, el vector unitario en el sentido del rayo viene dado por la fórmula

$$\frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{1}{n_0} \left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0} \mathbf{g} \right). \quad (1)$$

Sea θ el ángulo de incidencia. Los rayos refractados no se encuentran, en general, en el plano de incidencia y su dirección viene determinada por el ángulo θ' con la normal a la superficie y el acimut ϕ' referido al plano de incidencia. Tomemos éste como plano zx , con el eje z perpendicular a la superficie refractante. En la refracción se conservan constantes las componentes n_x , n_y del vector de onda. En el rayo incidente éstas son iguales a $n_x = \sin \theta$, $n_y = 0$. Substituyendo estos valores en (1), se encuentran las componentes x e y del vector unitario \mathbf{s}/s que proporcionan sin más la dirección de los rayos refractados:

$$\sin \theta' \cos \phi' = \frac{1}{n_0} \sin \theta \pm \frac{1}{2n_0^2} g_x,$$

$$\sin \theta' \sin \phi' = \pm \frac{1}{2n_0^2} g_y.$$

Para ángulos de incidencia no demasiado pequeños, el acimut ϕ' es pequeño y puede escribirse

$$\phi' = \pm g_y / 2n_0 \sin \theta,$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{n_0} \pm \frac{g_x}{2n_0^2}.$$

En el caso de incidencia normal ($\theta = 0$) elegiremos el plano zx de modo que pase por el vector \mathbf{G} ; entonces $\phi' = 0$ y para θ' tenemos

$$\theta' \cong \sin \theta' = \pm g_x / 2n_0^2.$$

Aunque en esta fórmula no aparece g_z , sin embargo deja de ser aplicable cuando $g_z = 0$, puesto que cuando los vectores \mathbf{n} y \mathbf{g} son perpendiculares entre sí no basta la aproximación lineal respecto del campo.

2. Determinar la polarización de la luz reflejada cuando una onda polarizada linealmente que procede del vacío incide según la normal sobre la superficie de un cuerpo que se ha convertido en anisótropo por encontrarse en un campo magnético.

Solución. Para incidencia normal, la dirección del vector de onda se conserva al pasar al segundo medio. Por ello, en todas las ondas (la incidente, la reflejada y la refractada) los vectores \mathbf{H} son paralelos a la superficie de separación (plano xy). En lo que concierne al vector eléctrico \mathbf{E} , éste es también paralelo al plano xy en las ondas incidente y reflejada, mientras que en la onda refractada, aunque en ella es $E_z \neq 0$, la relación entre las componentes x e y de \mathbf{E} y \mathbf{H} es la misma que en un cuerpo isótropo ($H_x = -nE_y$, $H_y = nE_x$). Si la polarización de la onda incidente coincide con la polarización de uno de los dos tipos de onda que pueden propagarse en el medio anisótropo (refractante) para la dirección dada de \mathbf{n} , aparece sólo una onda refractada con esta misma polarización. En tales condiciones, el problema no difiere formalmente del de la refracción por un cuerpo isótropo y los campos \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_0 en las ondas reflejada e incidente están ligados entre sí por

$$\mathbf{E}_1 = (1 - n)\mathbf{E}_0 / (1 + n), \quad (1)$$

donde n es el coeficiente de refracción que corresponde a la polarización dada.

La polarización lineal puede considerarse como resultado de la composición de dos polarizaciones circulares con sentidos de rotación opuestos; si en la onda incidente E_0 es paralelo al eje x , escribiremos $E_0 = E_0^+ + E_0^-$, donde

$$E_0^+ = iE_0^+ y = \frac{1}{2}E_0, \quad E_0^- = -iE_0^- y = \frac{1}{2}E_0.$$

Utilizando para cada una de las ondas E_0^\pm la fórmula (1) con los correspondientes valores de n_\pm dados por la fórmula (82.18), obtendremos:

$$E_{1x} = \frac{1}{2}E_0 \left[\frac{1-n_+}{1+n_+} + \frac{1-n_-}{1+n_-} \right] \cong E_0 \frac{1-n_0}{1+n_0},$$

$$E_{1y} = \frac{1}{2}iE_0 \left[\frac{1-n_-}{1+n_-} - \frac{1-n_+}{1+n_+} \right] \cong iE_0 \frac{g \cos \theta}{n_0(1+n_0)^2}$$

(θ es el ángulo formado por la dirección de incidencia y el vector g). Vemos así que la onda reflejada se encuentra polarizada elípticamente, que el eje mayor de la elipse es paralelo al eje x y que la razón del eje menor al mayor es igual a

$$(g \cos \theta)/n_0(n_0^2 - 1).$$

3. Determinar la ley límite según la cual depende de la frecuencia el vector giro para grandes valores de la misma.

Solución. Los cálculos son análogos a los desarrollados en el § 59, con la diferencia de que la ecuación del movimiento del electrón debe incluir la fuerza de Lorentz que ejerce el campo magnético exterior constante H :

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + e\mathbf{v}' \times \mathbf{H}/c.$$

Si se cumple la condición $\omega \gg eH/mc$, esta ecuación se puede resolver por aproximaciones sucesivas. Con una precisión que alcanza los términos de primer orden respecto de H , obtendremos

$$\mathbf{v}' = \frac{ie}{m\omega} \mathbf{E} - \frac{e^2}{m^2\omega^2 c} \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

a partir de lo cual se encuentra el desplazamiento eléctrico en la forma

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega)\mathbf{E} + if(\omega)\mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

donde $\epsilon(\omega)$ coincide con (59.1) y

$$f(\omega) = -4\pi Ne^3/cm^2\omega^3.$$

§ 83. Actividad óptica natural

La dispersión de la permitividad (y de la permeabilidad) respecto de la frecuencia expresa la dependencia de las propiedades macroscópicas de la materia respecto de la variación temporal del campo electromagnético. En cambio, en toda la teoría que precede no se tuvo en cuenta la dependencia respecto de la heterogeneidad espacial. La condición que hace posible prescindir de esta última estriba en que las dimensiones atómicas a son pequeñas comparadas con la longitud de onda λ (véase § 58).

La desigualdad $a \ll \lambda$ es condición necesaria para que sea aplicable la teoría macroscópica. Pero si se prescinde por completo de las cantidades que contienen la razón a/λ , que es pequeña, desaparecen ciertos fenómenos cualitativamente nue-

vos que se manifiestan cuando se tienen en cuenta los términos del desarrollo en a/λ que siguen al de orden cero. Pasamos ahora precisamente a estudiar estos fenómenos.

Al desarrollo respecto de las potencias de a/λ corresponde en la teoría macroscópica el desarrollo del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} en potencias, no sólo del propio campo \mathbf{E} , sino también de sus derivadas espaciales. Limitándonos a los términos de primer orden, hemos de tener en cuenta en este desarrollo los términos que son proporcionales a las potencias primeras de las derivadas de primer orden. Para un campo monocromático (de frecuencia ω), escribiremos el desarrollo en la forma

$$D_i = \epsilon_{ik}^{(0)} E_k + \gamma_{ikl} \partial E_k / \partial x_l, \quad (83.1)$$

donde las magnitudes $\epsilon_{ik}^{(0)}$ y γ_{ikl} son funciones de la frecuencia.

Antes de pasar al estudio de esta aproximación, es necesario hacer la siguiente observación. En el grado de aproximación que ahora nos interesa pierde su significado físico la descomposición del valor medio de la densidad microscópica de corriente $\overline{\rho \mathbf{v}}$ en dos partes $\partial \mathbf{P} / \partial t$ y $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Por ello, en la teoría que exponemos resulta razonable escribir la ecuación de Maxwell en la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (83.2)$$

sin introducir, junto con la intensidad media $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$ del campo magnético microscópico, otra magnitud más, el vector \mathbf{H} . En vez de éste, todos los términos que resultan de promediar las corrientes microscópicas se suponen incluidos en la definición de \mathbf{D} .

Las propiedades de simetría del tensor γ_{ikl} en (83.1) se ponen de manifiesto aplicando el principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos, de manera análoga a como procedimos en el § 76 para el tensor ϵ_{ik} . Vimos entonces que si como magnitudes x_i se eligen las componentes del vector \mathbf{E} en cada punto del cuerpo, las correspondientes magnitudes f_i serán las componentes del vector \mathbf{D} . Sin embargo, la presencia de las derivadas espaciales en las relaciones (83.1) entorpece la aplicación directa del principio de simetría. Conviene aquí aplicar éste como sigue. Sean x_i, x'_i dos sistemas distintos de valores de las magnitudes x_i , y f_i, f'_i los correspondientes conjuntos de valores de las magnitudes f_i . En virtud de la simetría ($\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$) de los coeficientes de las relaciones

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} f_k, \quad x'_i = \sum_k \alpha_{ik} f'_k$$

podemos escribir

$$\sum_i x_i f'_i = \sum_i x'_i f_i. \quad (83.3)$$

En el presente caso esta igualdad toma la forma

$$\int E_i D'_i dV = \int E'_i D_i dV.$$

Substituyendo aquí (83.1) y teniendo en cuenta la simetría de $\epsilon_{ik}^{(0)}$ ya conocida, se obtendrá

$$\int \gamma_{ikl} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV = \int \gamma_{ikl} E'_i \frac{\partial E_k}{\partial x_l} dV$$

o bien, integrando por partes ambos miembros de la igualdad,

$$\int \gamma_{ikl} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV = - \int \gamma_{ikl} E_k \frac{\partial E'_i}{\partial x_l} dV = - \int \gamma_{klu} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV.$$

Dado el carácter arbitrario de las funciones E y E' , de aquí se sigue la propiedad de simetría buscada:

$$\gamma_{ikl} = -\gamma_{klu}. \quad (83.4)$$

Supongamos, además, que el medio no es absorbente y veamos cuáles son las condiciones que esto impone al tensor γ_{ikl} . La disipación de energía en un campo periódico viene dada por el valor medio (respecto del tiempo) de la integral

$$-(1/4\pi) \int \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t) dV.$$

Aquí \mathbf{E} y \mathbf{D} son reales; pero si se utiliza la representación compleja de las diferentes magnitudes, la integral que hay que promediar puede escribirse en la forma

$$-\frac{1}{16\pi} \int \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV = -\frac{i\omega}{16\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}) dV.$$

Substituyendo aquí (83.1) y teniendo en cuenta que, conforme sabemos ya, $\epsilon_{ik}^{(0)}$ es real en un medio transparente, obtendremos

$$\begin{aligned} & -\frac{i\omega}{16\pi} \int \left(\gamma_{ikl}^* E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} - \gamma_{ikl} E_i^* \frac{\partial E_k}{\partial x_l} \right) dV \\ & = -\frac{i\omega}{16\pi} \int \left(\gamma_{ikl}^* E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} + \gamma_{ikl} E_k \frac{\partial E_i^*}{\partial x_l} \right) dV \\ & = -\frac{i\omega}{16\pi} \int (\gamma_{ikl}^* + \gamma_{klu}) E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} dV. \end{aligned}$$

Esta expresión se anula idénticamente si se cumple la condición

$$\gamma_{ikl}^* = -\gamma_{klu} = \gamma_{ikl}.$$

Llegamos así a la conclusión de que la condición de que no exista absorción exige que el tensor γ_{ikl} sea real.

Para una onda plana con vector de onda $\mathbf{k} = (\omega \mathbf{n}/c)$ tenemos

$$\partial E_k / \partial x_l = i \omega E_k n_l / c,$$

de modo que $D_i = \epsilon_{ik} E_k$, donde se ha introducido la notación

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + i \omega \gamma_{ikl} n_l / c \quad (83.5)$$

para el tensor permitividad, que presenta ahora dispersión tanto respecto de la frecuencia, como del vector de onda*.

Introduzcamos en vez del tensor antisimétrico de segundo orden $\gamma_{ikl} n_l$ su dual axil, el *vector giro* \mathbf{g} , de acuerdo con

$$\omega \gamma_{ikl} n_l / c = e_{ikl} g_l, \quad (83.6)$$

es decir, escribamos ϵ_{ik} en la forma

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + i e_{ikl} g_l, \quad (83.7)$$

que coincide formalmente con la expresión utilizada en el § 82. La diferencia consiste en que, en dicho párrafo, el vector \mathbf{g} dependía solamente de las propiedades del medio (y del campo magnético aplicado), mientras que aquí el vector giro depende también del vector de onda del campo. Según (83.6), las componentes de este vector son funciones lineales de las componentes de \mathbf{n} , es decir,

$$g_i = g_{ik} n_k. \quad (83.8)$$

Substituyendo (83.8) en (83.6), se encuentra

$$\omega \gamma_{ikl} n_l / c = e_{ikm} g_m n_l,$$

de donde, dado que \mathbf{n} es arbitrario,

$$\omega \gamma_{ikl} / c = e_{ikm} g_m l, \quad (83.9)$$

con lo que queda establecida la relación entre las componentes del tensor de tercer orden γ_{ikl} y el pseudotensor de segundo orden g_{ik} (**).

La simetría cristalográfica concreta del cuerpo impone determinadas limitaciones a las componentes del tensor γ_{ikl} (o del g_{ik}) y, en particular, puede conducir a la anulación idéntica de todas las componentes. Así, el tensor γ_{ikl} se reduce a cero en los cuerpos que poseen centro de simetría. En efecto, al cambiar el signo de las tres coordenadas (inversión), todas las componentes del tensor de tercer orden (y, por consiguiente, las del pseudotensor de segundo orden) cambian de signo, mientras que la simetría del cuerpo exigiría que no variaran en esta transformación.

* Cuando $\omega \rightarrow 0$, las magnitudes γ_{ikl} , que nada tienen que ver con el desarrollo en potencias de la frecuencia, tienden a valores constantes. La parte imaginaria de ϵ_{ik} , por consiguiente, tiende a cero proporcionalmente a la primera potencia de la frecuencia.

** En componentes:

$$g_{xx} = \omega \gamma_{yzz} / c, \quad g_{xy} = \omega \gamma_{yzx} / c, \quad g_{yx} = \omega \gamma_{zxx} / c,$$

etcétera.

De los cuerpos en los que el tensor g_{ik} no es nulo se dice que poseen *actividad óptica natural*. De esta manera, la existencia de actividad óptica exige, en cualquier caso, que el cuerpo carezca de centro de simetría.

Consideremos primero la actividad óptica natural de los cuerpos isótropos. Si un líquido (o un gas) está formado por una sustancia que carece de estereoisómeros, es simétrico no sólo respecto de una rotación arbitraria, sino también con relación a la reflexión (inversión) respecto de un punto cualquiera, y la actividad natural queda excluida en él. Ópticamente activos lo son solamente los líquidos constituidos por sustancias con dos formas estereoisómeras, debiendo contener ambos isómeros en cantidades distintas; un líquido con estas características carece de centro de simetría.

En un cuerpo isótropo (y también en los cristales con simetría cúbica) el pseudotensor g_{ik} se reduce a un pseudoescalar:

$$g_{ik} = f\delta_{ik} \quad (83.10)$$

(el tensor γ_{ikl} se expresa en función de f de acuerdo con $\gamma_{ikl} = (c/\omega)f\epsilon_{ikl}$). Un pseudoescalar es una magnitud que cambia de signo en la inversión de las coordenadas. Dos sustancias estereoisómeras se transforman formalmente entre sí como resultado de la operación inversión; por ello, sus valores de la magnitud f tienen signos opuestos.

Así pues, en un cuerpo isótropo ópticamente activo el vector giro es $\mathbf{g} = f\mathbf{n}$ y entre el desplazamiento eléctrico y la intensidad del campo de la onda existe una relación dada por la fórmula

$$\mathbf{D} = \epsilon^{(0)}\mathbf{E} + if\mathbf{E} \times \mathbf{n}. \quad (83.11)$$

Puesto que $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$, de aquí se sigue que también $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$. En otras palabras, en una tal onda no sólo es transversal el desplazamiento \mathbf{D} (respecto de la dirección de \mathbf{n}), como en cualquier medio, sino también la intensidad \mathbf{E} .

La variación del índice de refracción n cuando se tiene en cuenta la actividad natural de la sustancia resulta ser pequeña. En consecuencia, al determinarla se puede hacer en el término pequeño $\mathbf{E} \times \mathbf{g}$ que aparece en (83.11) $n = n_0 = \sqrt{\epsilon^{(0)}}$. Entonces, el problema de calcular la diferencia $n - n_0$ coincide formalmente con el estudiado en el párrafo anterior acerca de la variación de n bajo la influencia del campo magnético, difiriendo de aquél solamente en el significado del vector \mathbf{g} y en el hecho de que este vector se encuentra siempre dirigido paralelamente a \mathbf{n} (eje z en el § 82). Por analogía con la fórmula (82.18) podemos así escribir sin más

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm g = n_0^2 \pm fn_0. \quad (83.12)$$

A estos dos valores corresponden (véase (82.20)) las siguientes relaciones entre las dos componentes del vector \mathbf{E} (o del \mathbf{D}):

$$E_x = \pm iE_y, \quad (83.13)$$

es decir, la polarización circular de las ondas a izquierda y a derecha. Observemos también que el módulo del vector \mathbf{n} no depende de su dirección; por ello, las direcciones del vector \mathbf{n} y del vector rayo \mathbf{s} coinciden.

Vemos, por consiguiente, que las propiedades ópticas de un cuerpo isótropo naturalmente activo son parecidas a las propiedades que posee un cuerpo no activo en un campo magnético: presenta doble refracción circular y cuando una onda polarizada linealmente se propaga en él se produce la rotación de su plano de polarización. El ángulo de rotación por unidad de longitud a lo largo del rayo es igual a $\omega f/2c$.

En dos modificaciones estereoisómeras de una sustancia, los signos de las constantes g , y con ellos también los sentidos de rotación, son opuestos; desde este punto de vista, se habla de estereoisómeros *dextrógiros* y *levógiros*.

En contraste con la rotación del plano de polarización en un campo magnético, el valor y el signo del giro no depende en las sustancias naturalmente activas de la dirección de propagación del rayo. Por ello, si un rayo de luz polarizada linealmente atraviesa dos veces, en el camino de ida y vuelta, la misma trayectoria en un medio naturalmente activo, el resultado es que se encuentra polarizado de nuevo en el plano original.

Pasemos a los cristales naturalmente activos. Sin entrar aquí en una exposición sistemática de todos los posibles casos de simetría (véase el problema en este párrafo), haremos observar que la actividad natural queda excluida por la existencia de un centro de simetría, pero que es posible cuando hay un plano de simetría o un eje de rotación-reflexión. Hay que subrayar que las condiciones para que se dé la actividad natural en los cristales no coinciden, por consiguiente, con las condiciones que hacen posible la existencia de cristales en dos formas isómero-especulares (los llamados *enantiomorfos*); estas últimas condiciones son mucho más estrictas y exigen no sólo que no exista centro de simetría, sino tampoco planos de simetría. Así pues, un cristal puede ser ópticamente activo y a la vez coincidir con su imagen especular.

En un cristal naturalmente activo (uniáxico o biáxico), al propagarse la luz en una dirección arbitraria del vector de onda, nos encontramos prácticamente ante un caso de refracción doble ordinaria de ondas polarizadas linealmente; tener en cuenta la actividad se reduce, esencialmente, a substituir la polarización rigurosamente lineal por una polarización elíptica con una razón de ejes pequeña (de primer orden de magnitud).

La única excepción la constituyen las direcciones de los ejes ópticos, a lo largo de los cuales, si no se tiene en cuenta la actividad, las dos raíces de la ecuación de Fresnel coinciden. En estas direcciones el fenómeno de la actividad natural de los cristales es análogo a la actividad de los cuerpos isótropos: se produce una doble refracción circular de primer orden y la correspondiente rotación del plano de polarización de las ondas polarizadas linealmente. Cuando el vector de onda se separa de la dirección de un eje óptico, estos fenómenos desaparecen rápidamente.

Para un cálculo cuantitativo de los fenómenos de la actividad natural en los

cristales es más conveniente utilizar, no la expresión de \mathbf{D} en función de \mathbf{E} , sino las fórmulas inversas que dan \mathbf{E} en función de \mathbf{D} (como hicimos ya en el párrafo 82). Salvo magnitudes de segundo orden, estas fórmulas se escriben:

$$E_i = \epsilon^{(0)-1}_{ik} D_k + (\mathbf{D} \times \mathbf{G})_i, \quad (83.14)$$

donde el vector \mathbf{G} está ligado con el vector \mathbf{g} que hemos introducido antes por

$$G_i = -\epsilon^{(0)}_{ik} g_k / |\epsilon^{(0)}|$$

(véase (82.13a)). Visto que esta expresión coincide formalmente con la (82.7), se conservan también igualmente las ecuaciones (82.9), (82.10). En estas ecuaciones G_z es la proyección del vector \mathbf{G} sobre la dirección de \mathbf{n} . Si se presenta \mathbf{G} en la forma

$$G_i = G_{ik} n_k, \quad (83.15)$$

(análoga a la (83.8)), dicha proyección es proporcional a

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{G} = G_{ik} n_i n_k. \quad (83.16)$$

Esta forma cuadrática determina las propiedades ópticas de un cristal naturalmente activo. Por sí mismo, el tensor G_{ik} no tiene por qué ser necesariamente simétrico, pero si lo descomponemos en una parte simétrica y otra antisimétrica, al construir la forma (83.16) desaparece la parte antisimétrica. Llegamos, por consiguiente, a la conclusión de que al estudiar las propiedades ópticas de los cristales naturalmente activos se puede suponer que el tensor G_{ik} es simétrico.

PROBLEMA

Determinar las limitaciones que la simetría cristalina impone a las componentes del tensor G_{ik} .

Solución. En cualquier rotación, el pseudotensor G_{ik} se comporta como un tensor en sentido estricto; en particular, la existencia de un eje de simetría de orden superior al segundo conduce, al igual que en el caso de un tensor simétrico de segundo orden, a la isotropía total en un plano perpendicular al eje. En cambio, el comportamiento del pseudotensor G_{ik} en las reflexiones viene determinado por el hecho de que es dual de un tensor de tercer orden: a saber, en cualquier reflexión que cambie el signo de una componente dada de un tensor de segundo orden, la misma componente de G_{ik} se conserva invariable, y recíprocamente. Así, en la reflexión en el plano yz las componentes G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} , G_{yz} cambian de signo, mientras que se conservan las componentes G_{xy} , G_{zx} .

A continuación se indican las componentes no nulas del tensor G_{ik} para todas las clases cristalinas compatibles con la actividad natural. El eje z se ha elegido paralelo al eje de simetría de tercero, cuarto o sexto orden o a lo largo del único eje de segundo orden (en las clases C_2 , C_{2v}), mientras que en la clase C_s se ha tomado perpendicular al plano de simetría; cuando existen tres ejes de simetría perpendiculares entre sí, los ejes de coordenadas coinciden con ellos.

Clase C_1 : todas las componentes G_{ik} .

Clase C_2 : G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} , G_{xy} ; mediante una elección adecuada de los ejes x , y es posible anular G_{xy} .

Clase C_s : G_{xx} , G_{yz} ; mediante una elección adecuada de los ejes x , y puede anularse una de estas dos magnitudes.

Clase C_{2v} : G_{xy} (los planos yz y zx coinciden con los planos de simetría).

Clase D_2 : G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} .

Clases C_3 , C_4 , C_6 , D_3 , D_4 , D_6 : $G_{xx} = G_{yy}$, G_{zz} .

Clase S_4 : $G_{xx} = -G_{yy}$, G_{xy} , mediante una elección adecuada de los ejes x , y puede anularse una de estas magnitudes.

Clase D_{2d} : G_{xy} (los ejes x , y se encuentran en planos verticales de simetría).

Clases T , O : $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

Obsérvese que en los cristales uniáxicos de las clases S_4 y D_{2d} el escalar (83.16) se anula si el vector \mathbf{n} está dirigido en el sentido del eje z , puesto que $G_{zz} = 0$. Esto significa que en estos cristales no existen efectos de actividad natural a lo largo del eje óptico.

En un cristal biáxico de la clase C_{2v} , los ejes ópticos se encuentran en uno de los planos de simetría. Mas para los vectores \mathbf{n} que se encuentran en los planos yz o zx , el escalar (83.16) también se anula en este caso, por lo que no se producen en él dichos efectos a lo largo de los ejes ópticos. La única clase cristalina compatible con el fenómeno de rotación del plano de polarización a lo largo de un eje óptico y que a la vez no lo es con el enantiomorfismo es la clase monoclinica C_s .

CAPÍTULO XII

PASO DE PARTÍCULAS RÁPIDAS A TRAVÉS DE LA MATERIA

§ 84. Pérdidas de energía por ionización para partículas rápidas en la materia. Caso no relativista

Una partícula cargada rápida que atraviesa la materia ioniza sus átomos y con ello pierde energía*. En los gases las pérdidas por ionización pueden considerarse como resultado de los choques de la partícula rápida con los átomos individuales. En cambio, en un medio condensado, en la interacción con la partícula que pasa pueden quedar involucrados simultáneamente varios átomos. La influencia de esta circunstancia sobre la pérdida de energía de la partícula es, desde el punto de vista macroscópico, el resultado de la polarización dieléctrica del medio por la carga. Consideremos primero este efecto para el caso de partículas cuyas velocidades son no relativistas. Como quedará claro por los resultados, poco repercute entonces la polarización del medio en el valor de la pérdida de energía. Sin embargo, el razonamiento que lleva a esta conclusión posee un interés metódico con vistas a las aplicaciones de un procedimiento análogo.

Veamos ante todo qué condiciones permiten un estudio macroscópico de este fenómeno. En el desarrollo espectral del campo creado por una partícula que se mueve (con velocidad v) a una distancia r de su trayectoria, intervienen fundamentalmente las frecuencias del orden de v/r (recíproco del «tiempo de colisión»). A la ionización del átomo, en cambio, pueden conducir las componentes del campo con frecuencias $\omega \gtrsim \omega_0$, donde ω_0 es una cierta frecuencia media que corresponde al movimiento de la mayoría de los electrones atómicos. En consecuencia, la partícula entrará en interacción simultáneamente con varios átomos si la longitud v/ω_0 es grande comparada con las distancias interatómicas; en los cuerpos condensados estas últimas coinciden (en orden de magnitud) con las dimensiones a de los propios átomos. Llegamos así a la condición de que debe tenerse $v \gg a\omega_0$, es decir, la velocidad de la partícula ionizante ha de ser grande comparada con las velocidades de los electrones atómicos (o por lo menos con las de la mayoría de ellos)**.

* Como es costumbre, hablamos de «pérdidas por ionización», pero entre ellas se incluyen también, claro está, las pérdidas por excitación de los niveles atómicos discretos.

** Para la energía E de la partícula se obtiene a partir de aquí la condición

$$E \gg MI/m,$$

donde M es la masa de la partícula, m la masa del electrón e I una cierta energía media de ionización para la mayor parte de los electrones en el átomo.

Determinemos el campo creado por una partícula cargada que se mueve en un medio material. En el caso no relativista basta considerar solamente el campo eléctrico, que viene determinado por un único potencial escalar ϕ . Éste satisface la ecuación de Poisson

$$\hat{\epsilon} \Delta \phi = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad (84.1)$$

en la cual la «permitividad» hay que interpretarla como un operador, y la expresión $e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$ en el segundo miembro de la igualdad es la densidad debida a la carga puntual e que se mueve con velocidad constante \mathbf{v} .*

Desarrollemos ϕ en integral de Fourier respecto de las coordenadas:

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (84.2)$$

Aplicando a ambos miembros de esta igualdad el operador de Laplace, obtendremos

$$\Delta \phi = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\mathbf{k}} k^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k},$$

lo que hace ver que la componente de Fourier de $\Delta \phi$ es igual a

$$(\Delta \phi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \phi_{\mathbf{k}}.$$

Por otra parte, tomando la componente de Fourier de ambos miembros de la ecuación (84.1), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}(\Delta \phi)_{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dV \\ &= -\frac{e}{2\pi^2} \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}). \end{aligned}$$

La comparación de ambas fórmulas, da

$$\hat{\epsilon} \phi_{\mathbf{k}} = (e/2\pi^2 k^2) \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}).$$

Vemos así que $\phi_{\mathbf{k}}$ depende del tiempo a través del factor $e^{-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}$. Pero el operador $\hat{\epsilon}$, aplicado a la función $e^{-i\omega t}$, la multiplica por $\epsilon(\omega)$. Por ello, tenemos en definitiva para $\phi_{\mathbf{k}}$ la siguiente expresión:

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2 k^2 \epsilon(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}).$$

La componente de Fourier de la intensidad del campo está ligada con la componente de Fourier del potencial por

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = -\text{grad} [\phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = -i\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

* Al suponer que el movimiento de la partícula es rectilíneo, prescindimos de la dispersión, lo que es siempre legítimo en el problema considerado.

Si la partícula posee una carga ze , todas las fórmulas para el frenado en este párrafo y en el siguiente deben multiplicarse por z^2 .

o bien $E_{\mathbf{k}} = -ik\phi_{\mathbf{k}}$. De esta manera,

$$E_{\mathbf{k}} = -\frac{iek}{2\pi^2 k^2 \epsilon(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}). \quad (84.3)$$

La intensidad total del campo se obtiene a partir de las componentes de Fourier mediante la integral inversa:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (84.4)$$

La pérdida que nos interesa de energía de la partícula en movimiento, no es sino el trabajo realizado por la fuerza de reacción de frenado $e\mathbf{E}$ que actúa sobre la partícula y debida al campo creado por ella misma. Tomando el valor del campo en el punto en el que se encuentra la partícula, es decir, en el punto $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, obtendremos en el integrando de la expresión (84.4) el factor $e^{it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}$, que se reduce con el factor $e^{-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}$ en la expresión (84.3) para $E_{\mathbf{k}}$. En consecuencia, la fuerza de frenado \mathbf{F} viene dada por la siguiente integral:

$$\mathbf{F} = -\frac{ie^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}}{k^2 \epsilon(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} d\mathbf{k}.$$

Es evidente a priori que la fuerza \mathbf{F} ha de ser antiparalela a la velocidad \mathbf{v} ; tomemos el eje x en la dirección de esta última. Introduciendo las notaciones $k_x v = \omega$, $q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ y substituyendo $dk_y dk_z$ por $2\pi q dq$, escribiremos el valor absoluto F en la forma

$$F = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{q_0} \frac{q \omega dq d\omega}{\epsilon(\omega)(q^2 v^2 + \omega^2)} \quad (84.5)$$

(acerca de la elección del límite superior de integración respecto de q , véase más adelante).

Es necesario hacer todavía la siguiente observación referente a la integración respecto de ω en la fórmula (84.5). Cuando $\omega \rightarrow \infty$, la función $\epsilon(\omega) \rightarrow 1$ y la integral diverge (logarítmicamente). Esta circunstancia está ligada con el hecho de que, en realidad, del campo \mathbf{E} debíamos haber restado el que se tendría si la partícula se moviera en el vacío (es decir, para $\epsilon = 1$). Está claro que este campo nada tiene que ver con el frenado de la partícula en la materia. Esta substracción conduciría a substituir en el integrando de la expresión (84.5) $1/\epsilon$ por $(1/\epsilon) - 1$, hecho lo cual la integral convergerá. Sin embargo, es posible llegar al mismo resultado sin efectuar dicha substitución si se conviene en interpretar la integración entre los límites $-\infty$ y $+\infty$ como integración entre los límites simétricos $-R$ y $+R$, haciendo luego $R \rightarrow \infty$. Dada la paridad de la función $\epsilon'(\omega)$ la parte real del integrando es una función impar de la frecuencia y con este procedimiento de integración el resultado que da es cero; en cuanto a la integral de la parte imaginaria del integrando, esta integral es convergente.

A continuación nos resultará a veces cómodo utilizar la notación

$$1/\epsilon(\omega) = \eta(\omega) = \eta' + i\eta'', \quad (84.6)$$

donde $\eta'(\omega)$, $\eta''(\omega)$ son, respectivamente, funciones par e impar, con $\eta'' = -\epsilon''/|\epsilon|^2 < 0$. La fórmula (84.5) se puede también escribir en forma explícitamente real:

$$F = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{q_0} \frac{q\omega|\eta''(\omega)|}{(q^2v^2 + \omega^2)} dq d\omega. \quad (84.7)$$

La pérdida de energía de la partícula por unidad de longitud recorrida es el trabajo de la fuerza de frenado a lo largo de dicho camino, es decir, coincide precisamente con la cantidad F . Dicha pérdida se llama *poder de frenado* (o de *detención*) del medio respecto de la partícula.

Según las reglas generales de la mecánica cuántica, la componente de Fourier del campo con vector de onda \mathbf{k} transfiere al electrón de ionización (electrón δ) el impulso $\hbar\mathbf{k}$. Para valores suficientemente grandes de $q(q \gg \omega_0/v)$, tenemos $k^2 = q^2 + \omega^2/v^2 \approx q^2$, de modo que el impulso cedido coincide aproximadamente con $\hbar\mathbf{q}$. Al valor dado de \mathbf{q} corresponden colisiones con un «parámetro de impacto» $\sim 1/q$. Por ello, la condición de aplicabilidad del método macroscópico considerado exige que $1/q \gg a$. De acuerdo con esto, tomaremos como límite superior de integración un valor q_0 que cumpla la condición $\omega_0/v \ll q_0 \ll 1/a$; la cantidad $F(q_0)$ es el frenado de una partícula rápida acompañado de una cesión de impulso a un electrón atómico no mayor que $\hbar q_0$.

Efectuando en (84.7) la integración respecto de q , obtendremos

$$F(q_0) = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \omega |\eta''(\omega)| \ln \frac{q_0 v}{\omega} d\omega. \quad (84.8)$$

Esta fórmula no se puede transformar más conservando su carácter general, pero es posible representarla en una forma más cómoda mediante la introducción de notaciones adecuadas.

Calculemos primero la integral

$$\int_0^\infty \omega \eta''(\omega) d\omega = -\frac{1}{2} i \int_{-\infty}^\infty (\omega/\epsilon) d\omega.$$

Para ello observemos que si se efectúa la integración en el plano complejo ω a lo largo de un contorno constituido por el eje real y una semicircunferencia de radio infinito, σ , situada en el semiplano superior, la integral se anula, puesto que el integrando carece de polos en dicho semiplano. Para grandes valores de ω , la función $\epsilon(\omega)$ viene determinada por la fórmula (59.1):

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}. \quad (84.9)$$

La integración a lo largo de la semicircunferencia infinitamente alejada σ se lleva a cabo valiéndose de esta fórmula, y el resultado que se obtiene es*

$$-\int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) d\omega = -\frac{2\pi i N e^2}{m} \int_{\sigma} \frac{d\omega}{\omega} = 2\pi^2 N e^2 / m. \quad (84.10)$$

Introduzcamos un cierto valor medio de la frecuencia del movimiento de los electrones atómicos determinado por la igualdad

$$\begin{aligned} \log \bar{\omega} &= \frac{\int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) \ln \omega d\omega}{\int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) d\omega} \\ &= \frac{m}{2\pi^2 N e^2} \int_0^{\infty} \omega |\eta''(\omega)| \ln \omega d\omega. \end{aligned} \quad (84.11)$$

Con esta notación la fórmula (84.8) se escribe en la forma

$$F(q_0) = (4\pi N e^4 / m v^2) \ln (q_0 v / \bar{\omega}). \quad (84.12)$$

Hagamos aquí la siguiente observación. Por el aspecto de las fórmulas (84.7) o (84.11), cabría pensar que la contribución más importante al frenado por ionización (84.12) se debe solamente a aquellos intervalos de frecuencia en los que se produce una notable absorción. Esto, sin embargo, no tiene por qué ser así y las fórmulas indicadas pueden contener una importante contribución debida a regiones en las que ϵ'' es pequeño. La razón de ello descansa en que, en dichos intervalos, la función $\epsilon(\omega) \approx \epsilon'(\omega)$ puede anularse. Pero por la fórmula (84.5) es evidente que los ceros de $\epsilon(\omega)$ son polos del integrando. En realidad, naturalmente, $\epsilon''(\omega)$ no es igual a cero rigurosamente, por lo que un cero de la función $\epsilon(\omega)$ no está situado sobre el propio eje real, sino un poco por debajo de él. Esto significa que al utilizar la expresión de $\epsilon(\omega)$ que pasa por un cero, el polo del integrando debe evitarse por arriba, lo que da la correspondiente contribución a la integral. Así, si la función $\epsilon(\omega)$ viene dada por la fórmula (64.5), la contribución al frenado (84.12) debida al rodeo de los polos $\pm\omega_1$ (donde $\epsilon(\omega_1) = 0$) es igual a

$$(4\pi N e^4 / m v^2 a^2) \ln (q_1 v / \omega_1).$$

como se comprueba fácilmente mediante un cálculo directo según (84.7).

Para hallar el frenado $F(q_1)$ con transferencia de impulso que no supera un cierto valor $\hbar q_1 > \hbar q_0$, hay que «empalmar» la fórmula (84.12) con la fórmula de la

* Este valor coincide con el de la integral $\int_0^{\infty} \omega \epsilon''(\omega) d\omega$ (véase (62.14)), como debía ser, puesto que para $|\omega| \rightarrow \infty$, se tiene $|\epsilon| \rightarrow 1$, y, en consecuencia, $\eta'' \rightarrow -\epsilon''$.

teoría cuántica de las colisiones correspondiente al frenado en las colisiones con átomos por separado. Se puede hacer esto gracias a que los dominios de aplicabilidad de ambas fórmulas se solapan. Como es sabido por la teoría de colisiones, el frenado con una cesión de impulso en el intervalo $\hbar dq$ es

$$dF = (4\pi Ne^4/mv^2) dq/q, \quad (84.13)$$

siendo aplicable esta fórmula (en el caso no relativista) para valores cualesquiera $q \gg \omega_0/v$ compatibles con las leyes de conservación del impulso y de la energía, bajo la única condición de que la energía transferida sea pequeña comparada con la energía inicial de la partícula rápida*. Para el frenado correspondiente a todos los valores de q entre q_0 y q_1 se tiene así el valor

$$(4\pi Ne^4/mv^2) \ln (q_1/q_0).$$

Al sumar esta cantidad al segundo miembro de la fórmula (84.12), el resultado es que en ésta q_0 debe substituirse simplemente por q_1 , con lo cual

$$F(q_1) = (4\pi Ne^4/mv^2) \ln (q_1 v/\bar{\omega}). \quad (84.14)$$

Si a un electrón atómico se le cede un impulso $\hbar q_1$ grande (comparado con los atómicos), la energía que adquiere es igual a $E_1 = \hbar^2 q_1^2/2m$. Introduciendo esta cantidad, escribiremos

$$F(E_1) = (2\pi Ne^4/mv^2) \ln (2mv^2 E_1/\hbar^2 \bar{\omega}^2). \quad (84.15)$$

Esta fórmula determina el frenado de una partícula rápida (por ejemplo, un electrón) por ionización acompañado de una cesión de energía que no supera el valor E_1 . Dicha fórmula difiere de la ordinaria, obtenida mediante un estudio microscópico de las colisiones sin tener en cuenta la interacción entre átomos**, tan sólo en la definición de la «energía de ionización», cuyo papel lo representa ahora $\hbar\omega$. Sin embargo, la energía media de ionización de un átomo (respecto de los electrones), de ordinario depende poco de su interacción con los otros átomos, puesto que el papel fundamental lo desempeñan en ella los electrones de las capas internas, que casi no son afectadas por esta interacción. Además, en el presente caso, esta cantidad aparece tras el símbolo de logaritmo y, por ello, el procedimiento utilizado para su determinación precisa se manifiesta aún mucho menos en el valor del frenado.

En el frenado de una partícula pesada rápida la energía máxima que se puede ceder a un electrón atómico es igual a $2mv^2$ y, en cualquier caso, es pequeña com-

* Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, ec. (146.14); la magnitud F difiere del «frenado eficaz» allí introducido en el factor N .

La fórmula (84.13) corresponde a las colisiones con electrones libres. Sin embargo, su campo de aplicabilidad ($q \gg \omega_0/v$) comienza a partir de valores q para los que los electrones atómicos todavía no se pueden considerar de hecho como libres. Esto último exigiría valores $q \gg \omega_0/v_0$ (v_0 es el orden de magnitud de las velocidades de la mayoría de los electrones atómicos), lo que supone para la energía del electrón- δ , $\hbar^2 q^2/2m$, un valor grande comparado con las energías atómicas.

** Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, ec. (146.14).

parada con su propia energía*. Substituyendo este valor en (84.15) en vez de E_1 , obtendremos el frenado total por ionización que experimenta una partícula pesada:

$$F = (4\pi N e^4 / m v^2) \ln (2 m v^2 / \hbar \omega). \quad (84.16)$$

Esta fórmula difiere de la que se emplea ordinariamente** tan sólo en la definición de la energía de ionización $\hbar \omega$.

§ 85. Pérdida de energía de las partículas rápidas por ionización en la materia. Caso relativista

Para velocidades comparables con la velocidad de la luz, la influencia de la polarización del medio sobre el frenado de una partícula rápida puede llegar a ser, conforme veremos, muy importante, no sólo en los medios condensados, sino incluso en los gases***.

Para deducir las correspondientes fórmulas aplicaremos un método análogo al utilizado en el párrafo precedente. Sin embargo, al hacerlo hay que partir de las ecuaciones de Maxwell completas. Cuando existen cargas extrañas (con densidad espacial ρ_{ex}) y corrientes asimismo extrañas (con densidad \mathbf{j}_{ex}), estas ecuaciones se escriben****

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (85.1)$$

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{e}} \mathbf{E} = 4\pi \rho_{ex}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}} \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{ex}. \quad (85.2)$$

En el presente caso la distribución de las cargas y de las corrientes extrañas viene dada por las fórmulas

$$\rho_{ex} = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j}_{ex} = e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (85.3)$$

Introduzcamos los potenciales escalar y vector de acuerdo con las definiciones ordinarias:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi, \quad (85.4)$$

* En el choque de una partícula pesada con un electrón, incluso la máxima transferencia de impulso $\hbar q_{\max}$ es pequeña comparada con el impulso de la partícula Mv . Por lo tanto, la variación de la energía de la partícula pesada es igual a $\mathbf{v} \cdot \hbar \mathbf{q}$; igualando a esta cantidad la energía del electrón, obtendremos $\hbar^2 q^2 / 2m = \hbar \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \leq \hbar v q$,

de donde $\hbar q_{\max} = 2mv$, $E_{i\max} = 2m v^2$.

** Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, ec. (147.10).

*** Este efecto fue señalado por E. Fermi (1940) y calculado por él para un modelo especial de gas formado por átomos considerados como osciladores armónicos. La deducción general que se expone a continuación se debe a L. Landau.

**** Suponemos en todo eso $\mu(\omega) \equiv 1$, ya que la materia se comporta como no-magnética a las frecuencias que son las más importantes para las pérdidas por ionización.

de forma que las ecuaciones (85.1) quedan satisfechas idénticamente. A los potenciales \mathbf{A} y ϕ imponemos la condición suplementaria

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (85.5)$$

que constituye una generalización de la *condición de Lorentz* que se suele imponer en la teoría de la radiación. Entonces, la substitución de (85.4) en (85.2) conduce a las siguientes ecuaciones para los potenciales

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \\ \hat{\epsilon} \left(\Delta \phi - \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) &= -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \end{aligned} \quad (85.6)$$

Descompongamos \mathbf{A} y ϕ en integrales de Fourier respecto de las coordenadas. Tomando las componentes de Fourier de ambos miembros de las ecuaciones (85.6), obtendremos (véase § 84)

$$\begin{aligned} k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} &= \frac{e \mathbf{v}}{2\pi^2 c} \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}), \\ \hat{\epsilon} \left(k^2 \phi_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} \right) &= \frac{e}{2\pi^2} \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Se ve por esto que la dependencia de $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ y $\phi_{\mathbf{k}}$ respecto del tiempo viene dada por los factores $e^{-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}$. Introduzcamos de nuevo la notación $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = k_x v$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} &= \frac{e}{2\pi^2 c} \frac{\mathbf{v}}{k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)/c^2} e^{-i\omega t}, \\ \phi_{\mathbf{k}} &= \frac{e}{2\pi^2 \epsilon(\omega)} \frac{1}{k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)/c^2} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (85.7)$$

La componente de Fourier de la intensidad del campo eléctrico es

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = i\omega \mathbf{A}_{\mathbf{k}}/c - i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}. \quad (85.8)$$

Mediante las fórmulas obtenidas, la fuerza de frenado que actúa sobre la partícula, $\mathbf{F} = e\mathbf{E}^*$, se encuentra de la misma manera que en el párrafo precedente. Con las mismas notaciones obtendremos ahora para la intensidad de dicha fuerza la siguiente fórmula:

$$F = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{q_0} \frac{\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \right) \omega q dq d\omega}{\epsilon \left[q^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \right) \right]} \quad (85.9)$$

* En lo que concierne a la fuerza magnética $\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$, por consideraciones de simetría es evidente que debe anularse (incluso dejando de lado el hecho de que esta fuerza, por ser perpendicular a la velocidad de la partícula, no efectuaría sobre ella trabajo alguno).

(cuando $c \rightarrow \infty$, esta fórmula se convierte, claro está, en la (84.5)).

Comencemos por integrar respecto de las frecuencias. Pensando efectuar la integración en el plano complejo ω , veamos ante todo en qué puntos del semiplano superior presenta polos el integrando. La función $\epsilon(\omega)$ carece en este dominio de puntos singulares, ni tampoco presenta ceros en él; por ello, los polos buscados pueden ser solamente los ceros de la expresión

$$\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) - q^2.$$

Demostremos que, para cualquier valor del número real positivo q^2 , esta expresión se anula únicamente para un valor de ω .

La demostración puede llevarse a cabo de manera análoga a como se procedió en V, § 125, al determinar los ceros de la función $\epsilon(\omega)$. Sea

$$f(\omega) \equiv \omega^2 \left[\frac{\epsilon(\omega)}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right].$$

Consideremos la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df(\omega)}{d\omega} \frac{d\omega}{f(\omega) - a},$$

a lo largo del contorno C constituido por el eje real y una semicircunferencia infinitamente alejada (fig. 42). La función $f(\omega)$ carece de polos en el semiplano superior (y sobre el propio eje real)*; por ello, la integral considerada da directamente el número de ceros de la función $f(\omega) - a$ en el semiplano superior. Para calcularla, escribiremos esta integral en la forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{df}{f - a}. \quad (85.10)$$

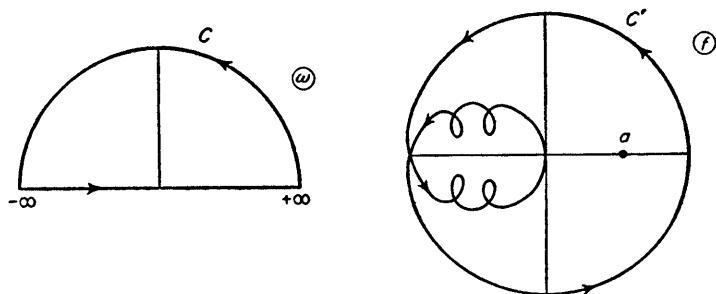


FIG. 42

* En los metales $\epsilon(\omega)$ tiene un polo en $\omega = 0$, pero de todas maneras $\omega^2 \epsilon$ tiende a cero.

Cuando $\omega = 0$, la función $f = 0$. Para valores reales y positivos de ω tenemos $\text{Im } f > 0$, y para valores negativos, $\text{Im } f < 0$. En el infinito, $f \rightarrow -\omega^2\{(1/v^2) - (1/c^2)\}$; en consecuencia, f recorre una circunferencia infinitamente alejada cuando ω se mueve sobre la semicircunferencia de radio infinito. Está claro, pues, que el contorno de integración C' en el plano f tiene una forma como la que se representa esquemáticamente en la figura 42. Sea $a = q^2$ un número real positivo (como en la fig. 42). Entonces, al recorrer C' , el argumento del número complejo $f-a$ varía en 2π y la integral (85.10) es igual a la unidad. Con esto queda demostrada la proposición enunciada*.

Además, es fácil ver que esta única raíz de la ecuación $f(\omega) - q^2 = 0$ se encuentra sobre el eje imaginario ω . En efecto, para valores de ω puramente imaginarios la función $f(\omega)$ (al igual que la función $\epsilon(\omega)$) es real y toma todos los valores desde 0 a ∞ , en particular todos los valores positivos q^2 .

Volvamos a la integral respecto de ω en (85.9):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2}\right) \omega d\omega}{q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)}.$$

Es posible representarla como diferencia entre una integral a lo largo del contorno C y una integral a lo largo de una semicircunferencia infinitamente alejada. Esta última es igual a

$$\oint d\omega/\omega = i\pi,$$

y la primera es igual al residuo del integrando en su único polo multiplicado por $2\pi i$. Entenderemos por $\omega(q)$ la función definida por la igualdad

$$\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) = q^2. \quad (85.11)$$

Según la conocida regla para determinar los residuos**, se encuentra entonces que la integral a lo largo de C es igual a

$$2\pi i \frac{\omega \left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2} \right)}{-\frac{d}{d\omega} \left[\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) \right]} = 2\pi i \frac{\omega \left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2} \right)}{-dq^2/d\omega}.$$

* Pero si a es un número negativo, al recorrer C' el argumento de $f-a$ varía en 4π , de modo que la integral (85.10) es igual a 2; en otras palabras, la ecuación $f(\omega) = -|a|$ tiene dos ceros en el semiplano superior.

** El residuo de la expresión $f(z)/\phi(z)$ correspondiente al polo $z = z_0$ es igual a $f(z_0)/\phi'(z_0)$.

Sumando las expresiones obtenidas y substituyendo en (85.9), se llega al resultado

$$F = e^2 \int_0^{q_0} \left[\frac{\omega \left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2} \right)}{q dq/d\omega} + 1 \right] q dq$$

o bien, substituyendo en el primer término la integración respecto de q por la integración respecto de ω ,

$$\begin{aligned} F &= e^2 \int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left[\frac{1}{v^2 \epsilon(\omega)} - \frac{1}{c^2} \right] \omega d\omega + \frac{1}{2} e^2 q_0^2 \\ &= \frac{e^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1 \right] \omega d\omega + \frac{1}{2} e^2 q_0^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) [\omega^2(q_0) - \omega^2(0)]. \end{aligned} \quad (85.12)$$

A valores grandes q corresponden raíces ω de la ecuación (85.11) grandes en valor absoluto. Utilizando en virtud de esto la expresión (84.9) para $\epsilon(\omega)$, se halla

$$\omega^2(q_0) = -\frac{v^2}{\beta^2} \left(q_0^2 + \frac{4\pi N e^2}{mc^2} \right),$$

donde se ha introducido la notación

$$\beta = \sqrt{[1 - v^2/c^2]}.$$

La substitución en (85.12) da

$$F = \frac{e^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{ivq_0/\beta} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1 \right] \omega d\omega - \frac{2\pi N e^4}{mc^2} - \frac{e^2 \beta^2}{2v^2} \omega^2(0) \quad (85.13)$$

(en la integral, basta conservar el término principal ivq_0/β en $\omega(q_0)$).

La integración en (85.13) se extiende a valores puramente imaginarios de ω . Introduzcamos la variable real definida por $\omega \equiv i\omega''$, designemos el límite inferior de la integral por $\omega(0) \equiv i\xi$ e introduzcamos de nuevo la notación (84.6) $1/\epsilon = \eta$. Se trata de calcular la integral

$$- \int_{\xi}^{vq_0/\beta} [\eta(i\omega'') - 1] \omega'' d\omega''.$$

Los valores de la función $\eta(\omega)$ sobre el eje imaginario pueden expresarse en función de los valores de su parte imaginaria sobre el eje real según la fórmula

$$\eta(i\omega'') - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\eta''(x)}{x^2 + \omega''^2} dx$$

(véase (62.17)). Por ello, para la integral considerada se obtiene (prescindiendo de x frente a vq_0)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{\xi}^{vq_0/\beta} \frac{x|\eta''(x)|\omega'' d\omega'' dx}{x^2 + \omega''^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x|\eta''(x)| \ln \frac{v^2 q_0^2}{\beta^2(x^2 + \xi^2)} dx.$$

Substituyamos este resultado en (85.13), introduciendo, para simplificar la escritura, la notación

$$\ln \Omega \equiv \overline{\frac{1}{2} \ln (\omega^2 + \xi^2)}, \quad (85.14)$$

donde el trazo horizontal significa el promedio con peso $\omega|\eta''(\omega)|$, como se hizo en (84.11). Entonces se obtendrá

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \ln \frac{q_0 v}{\beta \Omega} - \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} + \frac{e^2 \beta^2}{2v^2} \xi^2. \quad (85.15)$$

Para seguir estudiando esta fórmula hay que considerar dos casos por separado. Supongamos primero que el medio es un dieléctrico y que la velocidad de la partícula satisface la condición

$$v^2 < c^2/\epsilon_0, \quad (85.16)$$

donde $\epsilon_0 = \epsilon(0)$ es el valor electrostático de la permitividad. Sobre el eje imaginario, la función $\epsilon(\omega)$ es monótona decreciente a partir del valor $\epsilon_0 > 1$ para $\omega = 0$ hasta 1 para $\omega = i\infty$. En cambio, la expresión en el primer miembro de la ecuación (85.11) crece entonces con monotonía desde 0 a ∞ . Por lo tanto, cuando $q = 0$, la ecuación (85.11) da también $\omega = 0$. Así, en (85.15) hay que hacer $\xi = 0$; con esto Ω pasa a ser la frecuencia atómica media $\bar{\omega}$ dada por (84.11), y

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \left[\ln \frac{q_0 v}{\beta \bar{\omega}} - \frac{v^2}{2c^2} \right] \quad (85.17)$$

(cuando $v \ll c$, esta fórmula, como debía ocurrir, se transforma en la (84.12)).

El valor q_0 satisface la condición $q_0 \ll 1/a$, donde a es del orden de magnitud de las distancias interatómicas (en un medio condensado, del tamaño de los átomos). Para extender esta fórmula al dominio de valores grandes de la transferencia de impulso y de energía, hay que efectuar su «empalme» con las fórmulas de la teoría ordinaria de las colisiones, de manera análoga a como se hizo en el párrafo precedente. Aquí, sin embargo, este «empalme» hay que llevarlo a cabo en dos etapas.

Primero, mediante la fórmula (84.13) pasamos al dominio de valores q que corresponden a transferencias de energía grandes comparadas con las energías atómicas, pero conservándose todavía no-relativistas. Entonces el aspecto de la fórmula (85.17) no cambia, pero en ella será posible introducir la energía de un electrón- δ , igual a $\hbar^2 q^2 / 2m$. Designándola por E_1 , obtendremos

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left[\ln \frac{2m v^2 E_1}{\beta^2 \hbar^2 \omega^2} - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (85.18)$$

Podemos luego pasar al dominio de los valores relativistas E_1 utilizando la fórmula de la teoría relativista de las colisiones, según la cual el frenado con una cesión de energía en el intervalo entre E' y $E' + dE'$ es igual a

$$(2\pi N e^4 / m v^2) dE' / E' \quad (85.19)$$

si E' es pequeña comparada con la cesión máxima $E_{1,\text{máx}}$ compatible con las leyes de conservación del impulso y de la energía en la colisión de la partícula rápida dada con un electrón libre (en el caso no relativista, esta fórmula coincide con (84.13)). Dado que al integrar la expresión (85.19) se obtiene $\ln E'$, está claro que la fórmula (85.18) no varía formalmente, de modo que resulta ser válida para todos los valores $E_1 \ll E_{1,\text{máx}}$.

En el frenado de una partícula pesada (de masa M), la máxima cesión de energía al electrón es $E_{1,\text{máx}} \approx 2m v^2 / \beta^2$ *. Si $E_{1,\text{máx}}$ resulta con todo pequeña comparada con la energía total E de la partícula rápida (para lo cual debe ser $E \ll M^2 c^2 / m$), la fórmula diferencial para el frenado por electrones libres se escribe:

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left(\frac{1}{E'} - \frac{\beta^2}{2m c^2} \right) dE'$$

con valores arbitrarios de E' e independientemente de la naturaleza de la partícula pesada. El frenado adicional (respecto del (85.18)) con cesión de energía desde E_1 a $E_{1,\text{máx}}$ (siendo $E_1 \ll E_{1,\text{máx}}$) vale, en este caso,

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{E_{1,\text{máx}}}{E_1} - \frac{\beta^2 E_{1,\text{máx}}}{2m c^2} \right) = \frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{2m v^2}{\beta^2 E_1} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (85.20)$$

Sumando este valor a (85.18), se encuentra el frenado total de una partícula pesada:

$$F = \frac{4\pi N e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{2m v^2}{\beta^2 \hbar \omega} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (85.21)$$

Las fórmulas (85.18) y (85.21) difieren de las fórmulas que da la teoría ordinaria únicamente en la definición de la «energía de ionización», $\hbar \omega$.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 13.

Pasemos ahora al segundo caso, cuando la velocidad de la partícula satisface la condición

$$v^2 > c^2/\epsilon_0 \quad (85.22)$$

(este caso, en particular, se presenta siempre para los metales, puesto que en ellos es $\epsilon(0) = \infty$). La expresión $\omega^2(\epsilon/c^2 - 1/v^2)$ en el primer miembro de la ecuación (85.11) se anula entonces dos veces (sobre el eje imaginario ω): para $\omega = 0$ y para $\omega = i\xi$, donde ξ viene determinado por la igualdad

$$\epsilon(i\xi) = c^2/v^2. \quad (85.23)$$

En el intervalo entre 0 e $i\xi$ esta expresión es negativa y para $|\omega| > \xi$ toma todos los valores positivos desde 0 a ∞ . Por ello, cuando $q \rightarrow 0$ la raíz de la ecuación (85.11) tiende en este caso al valor ξ , que debe substituirse en (85.14) y (85.15).

Cabe aquí distinguir dos casos límite. Si el valor ξ resulta ser pequeño comparado con las frecuencias atómicas ω_0 , en (85.15) se puede prescindir del último término, mientras que $\Omega \approx \bar{\omega}$. Llegamos así de nuevo a la fórmula (85.17). En cambio, resulta particularmente interesante el caso límite opuesto, cuando $\xi \gg \omega_0$. Dado que para valores grandes de ξ la función $\epsilon(i\xi)$ tiende a 1, está claro por (85.23) que este caso corresponde a velocidades ultrarrelativistas de la partícula. Utilizando para $\epsilon(\omega)$ la fórmula (84.9), escribiremos la ecuación (85.23) en la forma

$$1 + 4\pi Ne^2/m\xi^2 = c^2/v^2,$$

de donde

$$\xi^2 = 4\pi Ne^2 v^2 / mc^2 \beta^2 \approx 4\pi Ne^2 / m\beta^2.$$

Al aumentar la velocidad de la partícula, la condición $\xi \gg \omega_0$ se cumple en último término, cualquiera que sea el medio, es decir, para un valor arbitrario de la densidad electrónica N (en particular, también en un gas). Sin embargo, las velocidades necesarias para ello son tanto mayores cuanto menor es N , es decir, cuanto más enrarecido es el medio.

De (85.14) se deduce ahora simplemente $\Omega \approx \xi$; haciendo también $v \approx c$, se encuentra que los dos últimos términos de (85.15) se reducen entre sí y queda

$$F(q_0) = (2\pi Ne^4/mc^2) \ln (mc^2 q_0^2 / 4\pi Ne^2).$$

Prolongando esta fórmula al dominio de grandes valores de la transferencia de impulso y de energía de la misma manera como se hizo anteriormente, encontramos la siguiente expresión para el frenado de una partícula ultrarrelativista con una cesión de energía no mayor que E_1 (con $E_1 \ll E_{1,\text{máx}}$):

$$F(E_1) = (2\pi Ne^4/mc^2) \ln (m^2 c^2 E_1 / 2\pi Ne^2 \hbar^2). \quad (85.24)$$

Este resultado difiere fundamentalmente del que da la teoría ordinaria de las colisiones sin tener en cuenta la polarización del medio. Según dicha teoría, en el caso relativista, el frenado $F(E_1)$ sigue creciendo (si bien más lentamente, según una ley

logarítmica) al aumentar la energía de la partícula. En cambio, la polarización del medio conduce a un apantallamiento tal de la carga, que el aumento del frenado se interrumpe en último término y tiende a un límite finito dado por la fórmula (85.24) que no contiene β .

También para las partículas pesadas se puede escribir una fórmula que da el frenado total con cesión arbitraria de energía hasta el valor $E_{1,\max}$ (con la condición de que $E_{1,\max}$ sea pequeña comparada con la energía de la propia partícula). Utilizando de nuevo la expresión (85.20) (en la que se puede hacer ahora $v = c$), encontramos

$$F = \frac{2\pi N e^4}{mc^2} \left[\ln \frac{m^3 c^4}{\pi N e^2 \hbar^2 \beta^2} - 1 \right]. \quad (85.25)$$

Vemos así que el frenado total sigue, no obstante, creciendo con la velocidad de la partícula, a expensas de las colisiones «a corta distancia» con una transferencia grande de energía y en las que no se manifiesta la influencia del apantallamiento por la polarización del medio. Este crecimiento, sin embargo, es algo más lento que el que da la teoría que no tiene en cuenta dicha polarización.

Haremos observar también que la presencia de la densidad electrónica N en el argumento del logaritmo en las fórmulas (85.24) y (85.25) conduce a la siguiente peculiaridad del frenado de las partículas ultrarrelativistas: cuando una de estas partículas atraviesa capas de diferentes materiales que contienen un mismo número de electrones (por 1 cm² de área), la pérdida de energía resulta ser menor en las substancias para las que N es grande.

Finalmente, indicaremos que la medición del frenado de las partículas rápidas en la materia proporciona una posibilidad, en principio, de construir la función $\epsilon(i\xi)$ para una substancia dada. Es fácil demostrar que la expresión exacta de F que corresponde al caso (85.22) satisface la relación

$$\frac{d[(F - F_0)v^2]}{d(v^2)} = - \frac{e^2 \xi^2}{2c^2}, \quad (85.26)$$

donde F_0 es la cantidad dada por la fórmula (85.18) o (85.21). Se mide F , mientras que la derivada $d(F_0 v^2)/d(v^2)$ contiene solamente magnitudes conocidas (N, v) y puede calcularse. De esta manera, mediante (85.26), a cada valor de ξ se hace corresponder un determinado valor de v , con lo cual, según (85.23), puede calcularse el correspondiente valor de $\epsilon(i\xi)$.

§ 86. Radiación de Cherenkov

Una partícula cargada que se mueve en un medio transparente emite, en determinadas condiciones, una singular radiación; los primeros en observarla fueron *P. A. Cherenkov* y *S. I. Vavilov*, y la interpretación y cálculos teóricos se deben a *I. E. Tamm* e *I. M. Frank* (1937). Hay que subrayar que esta radiación nada tiene

que ver con la radiación de frenado que, de hecho, siempre se produce en el movimiento de un electrón rápido. Esta última es emitida por el propio electrón al chocar con los átomos. En cambio, en el fenómeno de Cherenkov se trata esencialmente de la radiación emitida por un medio bajo la influencia del campo de una partícula que se mueve en él. La diferencia entre ambos tipos de radiación se manifiesta de manera particularmente clara al pasar al límite de la masa de la partícula tan grande cuanto se quiera: la radiación de frenado desaparece entonces por completo, mientras que la radiación de Cherenkov no cambia en absoluto.

El vector de onda y la frecuencia de una onda electromagnética que se propaga en un medio transparente están ligados por la relación $k = n\omega/c$, donde $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción real*. Por otra parte, vimos que la frecuencia de la componente de Fourier del campo de una partícula que se mueve uniformemente en un medio está ligada con la componente- x del vector de onda (el eje x está dirigido en el sentido de la velocidad de la partícula) por la relación $\omega = k_x v$. Para que tal componente represente una onda que se propaga libremente, las relaciones $k = n\omega/c$ y $k_x = \omega/v$ no deben contradecirse. Y, en efecto, dado que ha de ser $k > k_x$, es necesario que se cumpla la condición

$$v > c/n(\omega). \quad (86.1)$$

Así, pues, la radiación con frecuencia ω se produce cuando la velocidad de la partícula supera la velocidad de fase de las ondas de dicha frecuencia en el medio en cuestión.

Sea θ el ángulo formado por la dirección del movimiento de la partícula y la de emisión de radiación. Tenemos $k_x = k \cos \theta = (n\omega/c) \cos \theta$ y comparando con la igualdad $k_x = \omega/v$ se encuentra que

$$\cos \theta = c/nv. \quad (86.2)$$

Por consiguiente, a la radiación de una frecuencia dada corresponde un valor bien determinado del ángulo θ . En otras palabras, la radiación de cada frecuencia se produce hacia adelante respecto de la dirección del movimiento de la partícula y se distribuye sobre la superficie de un cono de ángulo 2θ determinado por la fórmula (86.2). La distribución angular de la radiación y su distribución en frecuencias, por consiguiente, se encuentran entre sí en una relación bien determinada.

La emisión de ondas electromagnéticas (en aquellos casos en que se produce) está ligada con una determinada pérdida de energía de la partícula en movimiento. Esta pérdida constituye una parte, si bien insignificante, del frenado total que se

* Como antes, suponemos que el medio es no-magnético e isotrópico. La radiación de Cherenkov en un medio anisótropo ha sido estudiada en los trabajos: V. L. Ginzburg, ZhETF 10, 608, 1940; A. A. Kolomenskii, DAN SSSR 86, 1097, 1952; M. I. Kaganov, ZhTF 23, 507, 1953.

Un análisis general de varios casos en la teoría de la radiación de Cherenkov y una extensa bibliografía se encuentran en el trabajo de B. M. Bolotovskii, Uspeji fizicheskij nauk 67, 201, 1957.

calculó en el párrafo precedente*. En este sentido, no es del todo correcto hablar, en este caso, de pérdidas totales «por ionización». Separemos ahora esta parte de las pérdidas totales; con ello determinaremos la intensidad de la radiación de Cherenkov.

Según (85.9), la pérdida de energía en un intervalo de frecuencias $d\omega$ viene dada por la expresión

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\epsilon v^2} \right) \int \frac{q dq}{q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)},$$

donde el signo \sum significa que hay que sumar las expresiones con $\omega = \pm|\omega|$. Introduzcamos una nueva variable

$$\xi = q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right).$$

Entonces

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{2\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\epsilon v^2} \right) \int \frac{d\xi}{\xi}.$$

Al integrar a lo largo del eje real ξ , el punto singular $\xi = 0$ (que corresponde precisamente a la raíz de la ecuación $q^2 + k_x^2 = k^2$) debe rodearse de determinada manera. El sentido en que hay que evitar dicho punto viene determinado por el hecho de que, aunque consideramos $\epsilon(\omega)$ como una magnitud real (¡el medio es transparente!), sin embargo, posee en realidad una parte imaginaria, si bien pequeña, que es positiva para $\omega > 0$ y negativa para $\omega < 0$. De acuerdo con ello, ξ presenta una parte imaginaria pequeña negativa (positiva) y la integración debe efectuarse a lo largo de un camino que pasa por debajo (por encima) del eje real. Esto significa que cuando desplazamos el camino de integración llevándolo al eje real, el punto singular debe rodearse por debajo (por encima). Esto da una contribución a dF y las partes reales se reducen por completo al formar la suma. Rodeando las singularidades a lo largo de semicircunferencias de radio infinitesimal, obtendremos

$$\sum \omega \int d\xi/\xi = 2i\pi\omega.$$

Llegamos de esta manera a la fórmula final

$$dF = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2} \right) \omega d\omega, \quad (86.3)$$

que determina la intensidad de la radiación en el intervalo de frecuencias $d\omega$. Según (86.2) esta radiación se concentra en un intervalo angular

$$d\theta = \frac{c}{vn^2 \sin \theta} \frac{dn}{d\omega} d\omega. \quad (86.4)$$

* En estas pérdidas no interviene la radiación de frenado.

La intensidad total de la radiación viene dada por la integral de la expresión (86.3) extendida a todas las frecuencias en el dominio en que el medio es transparente.

Es fácil explicar también a qué se debe la polarización de la radiación de Cherenkov. Como se ve por (85.7), el potencial vector del campo de radiación es paralelo a la velocidad \mathbf{v} . En consecuencia, el campo magnético $\mathbf{H}_k = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k$ es perpendicular al plano que pasa por \mathbf{v} y por la dirección del rayo \mathbf{k} . En cambio, el campo eléctrico (en la «zona de ondas» de la radiación) es perpendicular al campo magnético y, por lo tanto, se encuentra en dicho plano.

En relación con el problema de la emisión de radiación por una partícula que se mueve en un medio material, recordaremos aún otro efecto cuya existencia fue indicada como necesaria por *V. L. Ginzburg* e *I. M. Frank*: una partícula debe emitir radiación al pasar de un medio a otro. Esta radiación «de paso» difiere, en principio, del efecto Cherenkov por el hecho de que ha de producirse para cualquier velocidad de la partícula, y no solamente para aquellas velocidades mayores que la velocidad de fase de la luz en el medio. Nada tiene que ver con la radiación de frenado (que también se produce al incidir partículas cargadas sobre la superficie de separación de dos medios). Al igual que la radiación de Cherenkov, la diferencia resulta particularmente clara al pasar al límite de una masa de la partícula arbitrariamente grande: la radiación de frenado desaparece entonces, mientras que se mantiene la «de paso»*.

* Un cálculo detallado de la radiación «de paso» puede verse en *V. L. Ginzburg* e *I. M. Frank*, *ZhETF* 16, 25, 1946.

CAPÍTULO XIII

FLUCTUACIONES ELECTROMAGNÉTICAS

§ 87. Fluctuaciones de la corriente en los circuitos lineales

Apliquemos la teoría general de las fluctuaciones* al interesante problema de las fluctuaciones de corriente en circuitos eléctricos lineales (estudiadas por primera vez por Nyquist, 1928).

Las fluctuaciones de corriente son oscilaciones eléctricas libres en un conductor (es decir, se producen cuando no existe una f.e.m. aplicada exterior). En un circuito cerrado lineal, el mayor interés lo ofrecen, naturalmente, aquellas oscilaciones que dan lugar a una corriente J total que fluye a lo largo del conductor. En lo que sigue supondremos que se cumple la condición de cuasiestacionariedad, es decir, que las dimensiones del circuito son pequeñas comparadas con la longitud de onda $\lambda \sim c/\omega$. Entonces la corriente total J es la misma en todas las porciones del circuito y depende solamente del tiempo.

Para determinar la distribución espectral de las fluctuaciones de corriente, elegiremos J como magnitud x que figura en las fórmulas generales de V, § 127. Por otra parte, para ver cuál es el sentido de la magnitud α en este caso, supondremos que en el circuito actúa una fuerza electromotriz exterior \mathcal{E} . Entonces la disipación de energía en el circuito es $Q = J\mathcal{E}$. Comparando con la fórmula V (127.7), vemos que $\dot{f} = -\mathcal{E}$ o bien, suponiendo que en esta relación lineal f y \mathcal{E} son proporcionales a $e^{-i\omega t}$,

$$\mathcal{E} = i\omega f.$$

Por otra parte, la corriente y la f.e.m. en un circuito lineal están ligadas por la relación $\mathcal{E} = ZJ$, donde $Z(\omega)$ es la impedancia del circuito (véase § 47). Tenemos por ello

$$J = \mathcal{E}/Z = i\omega f/Z,$$

de donde se sigue que $\alpha(\omega) = i\omega/Z(\omega)$. La parte imaginaria es

$$\alpha'' = \text{Im}(i\omega/Z) = \omega R/|Z|^2,$$

donde $R(\omega) \equiv \text{Re}\{Z(\omega)\}$. La naturaleza de los fenómenos que causan la dispersión de la resistencia del circuito carece en absoluto de importancia para las fórmulas que siguen.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 126. Las referencias a esta obra se caracterizarán por la cifra romana V.

Según la fórmula V (126.8) se encuentra ahora para las fluctuaciones de corriente buscadas

$$(J^2)_\omega = \frac{\hbar\omega}{2\pi|Z|^2} R \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (87.1)$$

Esta fórmula puede representarse de otra manera, considerando la fluctuación de la corriente como resultado de la acción de una f.e.m. «aleatoria» $\mathcal{E}_\omega = Z(\omega)J_\omega$. Para ella tenemos

$$(\mathcal{E}^2)_\omega = \frac{\hbar\omega}{2\pi} R(\omega) \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (87.2)$$

En el caso clásico ($\hbar\omega \ll kT$)

$$(\mathcal{E}^2)_\omega = TR(\omega)/\pi. \quad (87.3)$$

§ 88. Fluctuaciones del campo electromagnético

Las magnitudes electromagnéticas \mathbf{E} , \mathbf{H} , ..., que figuran en la electrodinámica macroscópica se obtienen como resultado de un promedio que cabe concebir como conjunto de dos operaciones. Si se parte, para mayor claridad, del punto de vista clásico, cabe distinguir el promedio respecto de un volumen físicamente infinitesimal para una distribución dada de todas las partículas en el mismo y, luego, el promedio de la magnitud obtenida respecto del movimiento de las partículas. Al considerar las fluctuaciones electromagnéticas, se trata de las oscilaciones con el tiempo de magnitudes promediadas en un volumen físicamente infinitesimal, y en lo que sigue todas las magnitudes se entenderán precisamente en este sentido.

Hay que observar que cuando en mecánica cuántica se habla de promedio en un volumen, se trata, naturalmente, no de la propia magnitud física, sino de su correspondiente operador; el segundo estadio del promedio, en cambio, consiste en determinar la esperanza matemática de este operador según las probabilidades cuánticas. Por ello, rigurosamente hablando, las magnitudes que aparecen a continuación \mathbf{E} , \mathbf{H} , ... deben interpretarse como operadores cuánticos. Esta circunstancia, sin embargo, no se refleja en absoluto en los resultados finales de la teoría que se expone a continuación, y para simplificar la escritura de las fórmulas consideraremos todas las magnitudes como si fueran clásicas.

Como resultado de las fluctuaciones en la posición y el movimiento de las cargas en un cuerpo, aparecen en éste momentos espontáneos eléctricos y magnéticos locales; los valores de estos momentos, referidos a la unidad de volumen del cuerpo, se designarán por $\mathbf{K}/4\pi$ y $\mathbf{L}/4\pi$, respectivamente. Estos momentos son análogos, en cierto sentido, a la polarización espontánea de los cuerpos piroeléctricos y a la imanación de los ferromagnéticos, si bien, naturalmente, difieren de ellas en que, al efectuar el promedio, se reducen a cero. Las relaciones entre las inducciones (des-

plazamiento eléctrico e inducción magnética) y los campos asociados en estas fluctuaciones eléctricas y magnéticas vienen dadas por las fórmulas:

$$D_i = \hat{\epsilon}_{ik} E_k + K_i, \quad B_i = \hat{\mu}_{ik} H_k + L_i, \quad (88.1)$$

y sus «componentes de Fourier» son:

$$\begin{aligned} D_{i\omega} &= \epsilon_{ik}(\omega) E_{k\omega} + K_{i\omega}, \\ B_{i\omega} &= \mu_{ik}(\omega) H_{k\omega} + L_{i\omega}. \end{aligned} \quad (88.2)$$

En este caso, las ecuaciones de Maxwell se describen:

$$(\text{rot } \mathbf{E}_\omega)_i = (i\omega/c)(\mu_{ik} H_{k\omega} + L_{i\omega}), \quad (88.3)$$

$$(\text{rot } \mathbf{H}_\omega)_i = -(i\omega/c)(\epsilon_{ik} E_{k\omega} + K_{i\omega}). \quad (88.4)$$

Llamaremos a \mathbf{K} y \mathbf{L} inducciones «extrañas» por fluctuación; este nombre tiene, naturalmente, un carácter puramente convencional y subraya tan sólo el procedimiento formal de introducir estas magnitudes, no su naturaleza.

Para que sea posible utilizar las fórmulas generales deducidas en V (§ 127), es necesario establecer la correspondencia entre las magnitudes electromagnéticas consideradas aquí y las magnitudes x_i, f_i , que figuran en la teoría general. Procederemos con este fin de la siguiente manera. De modo puramente formal, consideremos las magnitudes \mathbf{K} y \mathbf{L} no como momentos que se producen espontáneamente, sino como resultado de una acción exterior que consiste en introducir desde fuera en el cuerpo determinadas cargas y corrientes eléctricas. Calculemos la variación de la energía del cuerpo ligada con esta acción.

Observemos para ello que la ecuación de conservación de la energía, en la forma en que se sigue de las ecuaciones de Maxwell, se escribe:

$$\int \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\} dV = - \frac{c}{4\pi} \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f},$$

o bien, después de substituir (88.1),

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{4\pi} \left\{ E_i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon}_{ik} E_k) + H_i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mu}_{ik} H_k) \right\} \\ &= - \frac{c}{4\pi} \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} - \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \right\} dV. \end{aligned}$$

Vemos así que la variación de energía que nos interesa, variación vinculada con la «acción exterior» considerada, viene dada por la integral

$$- \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \right\} dV. \quad (88.5)$$

En V (§ 127) se consideró una sucesión discreta de magnitudes que fluctúan x_a , mientras que ahora se trata de una sucesión continua (los valores del campo en cada punto del cuerpo). Esta complicación, que no es esencial, la soslayaremos formalmente dividiendo el volumen del cuerpo en porciones pequeñas, pero finitas, ΔV y considerando ciertos valores medios del campo en cada una de ellas; el paso a elementos infinitamente pequeños se llevará a cabo en las fórmulas finales. De esta manera, en vez de la integral (88.5) escribiremos la suma

$$-\frac{1}{4\pi} \sum \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \right\} \Delta V,$$

extendida a todas las porciones ΔV .

Comparando esta expresión con la V (127.7), vemos que si como magnitudes x_i se eligen las componentes de los vectores $\mathbf{E} \Delta V / 4\pi$, $\mathbf{H} \Delta V / 4\pi$ en cada una de las porciones ΔV , las correspondientes magnitudes f_i serán las componentes a los vectores \mathbf{K} y \mathbf{L} :

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow \mathbf{E} \Delta V / 4\pi, & \mathbf{H} \Delta V / 4\pi; \\ f_i &\rightarrow \mathbf{K}, & \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (88.6)$$

El papel que representan las igualdades V (127.11),

$$f_{i\omega} = \sum_k \alpha_{ik}^{-1}(\omega) x_{k\omega}, \quad (88.7)$$

que establecen la relación entre las magnitudes f_ω y x_ω , lo que representan ahora las ecuaciones de Maxwell (88.3) y (88.4), de las que se sigue

$$\begin{aligned} K_{i\omega} &= -\epsilon_{ik} E_{k\omega} + (ic/\omega)(\text{rot } \mathbf{H}_\omega)_i, \\ L_{i\omega} &= -\mu_{ik} H_{k\omega} - (ic/\omega)(\text{rot } \mathbf{E}_\omega)_i. \end{aligned} \quad (88.8)$$

Los coeficientes α_{ik}^{-1} se determinan comparando (88.8) con (88.7), teniendo en cuenta las definiciones (88.6); los subíndices i, k numeran las componentes de los vectores \mathbf{E} , \mathbf{H} y las porciones ΔV a que corresponden sus valores.

Los operadores diferenciales rot en (88.8) hay que interpretarlos como operadores diferencia definidos en un sistema discreto de puntos (por ejemplo, los centros de las porciones ΔV). La forma concreta de estos operadores, sea dicho de paso, carece por completo de importancia, puesto que para lo que sigue basta tener en cuenta que, en las dos igualdades (88.8), los operadores aplicados a \mathbf{H}_ω y \mathbf{E}_ω , respectivamente, son imaginarios puros y difieren solamente en el signo. Esto significa que entre los coeficientes α_{ik}^{-1} que ligán los valores de las magnitudes \mathbf{K} y \mathbf{L} (en un punto dado del espacio) con los valores de las correspondientes magnitudes \mathbf{H} y \mathbf{E} en diferentes puntos del espacio, existen las relaciones

$$\alpha_{ik}^{-1} = (\alpha_{ki}^{-1})^*.$$

Según la fórmula general V (127.12) de aquí se sigue inmediatamente que

$$(K_{i1}L_{k2})_{\omega} = 0, \quad (88.9)$$

donde los subíndices (1) y (2) significan que las magnitudes se han tomado en puntos con vectores posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 ; la fórmula (88.9) es válida tanto para $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ como $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

Además, de la primera igualdad (88.8) (teniendo en cuenta (88.6)) se deduce que los coeficientes α_{ik}^{-1} que ligán los valores de $K_{i\omega}$ con los valores de $E_{k\omega}$ son iguales a $-\epsilon_{ik}4\pi/\Delta V$ si \mathbf{K}_{ω} y \mathbf{E}_{ω} corresponden a un mismo punto del espacio, e iguales a cero si los valores \mathbf{K}_{ω} y \mathbf{E}_{ω} se toman en puntos diferentes. Según V (127.12) tenemos por ello

$$(K_{i1}K_{k2})_{\omega} = 0 \quad (\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2),$$

$$(K_{ik}K_{k})_{\omega} = i\hbar(\epsilon_{ki}^* - \epsilon_{ik})\frac{1}{\Delta V} \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T).$$

Pasando ahora al límite $\Delta V \rightarrow 0$, podemos, evidentemente, escribir estas dos fórmulas juntas como fórmula única

$$(K_{i1}K_{k2})_{\omega} = i\hbar(\epsilon_{ki}^* - \epsilon_{ik})\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T), \quad (88.10)$$

donde \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 son los vectores posición de dos puntos arbitrarios del cuerpo. En lo que sigue supondremos que éste no se encuentra en un campo magnético exterior constante; entonces $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ y (88.10) puede escribirse en la forma

$$(K_{i1}K_{k2})_{\omega} = 2\hbar\epsilon_{ik}''\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T). \quad (88.11)$$

De manera enteramente análoga se obtiene la fórmula

$$(L_{i1}L_{k2})_{\omega} = 2\hbar\mu_{ik}''\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T). \quad (88.12)$$

Así pues, las fluctuaciones de las inducciones «extrañas» en puntos diferentes de un cuerpo están correlacionadas entre sí tan sólo en el límite de una distancia entre puntos ($\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$) igual a cero. Claro está, este límite debe entenderse en el sentido que corresponde al punto de vista macroscópico; lo afirmado significa que, en realidad, la correlación de estas magnitudes se extiende solamente hasta distancias atómicas. Hay que subrayar la circunstancia fundamental de que las fórmulas de correlación para las inducciones «extrañas» resultan ser independientes de la forma geométrica del cuerpo en el que se consideran las fluctuaciones y, en este sentido, resultan tener una validez general.

A las fórmulas (88.11) y (88.12) puede dárseles otra forma en el dominio de las frecuencias relativamente pequeñas (dominio «cuasiestacionario») en el cual el tensor ϵ_{ik} puede expresarse en función de un tensor constante (independiente de la frecuencia) de conductibilidad σ_{ik} de acuerdo con

$$\epsilon_{ik} = 4\pi i\sigma_{ik}/\omega. \quad (88.13)$$

Introduzcamos en este caso en vez de \mathbf{K} una nueva magnitud \mathbf{j} definida por $\mathbf{j} = (1/4\pi)\partial\mathbf{K}/\partial t$ o bien por

$$\mathbf{j}_\omega = -i\omega\mathbf{K}_\omega/4\pi. \quad (88.14)$$

El significado de esta magnitud se explica por la forma que adopta la ecuación (88.4):

$$(\text{rot } \mathbf{H}_\omega)_i = (4\pi/c)(\sigma_{ik}E_{k\omega} + j_{i\omega}). \quad (88.15)$$

Se ve aquí que la fluctuación total de la densidad de corriente es $\sigma_{ik}E_{k\omega} + j_{i\omega}$, de modo que el vector \mathbf{j} representa su parte «extraña», no ligada con el campo eléctrico \mathbf{E} . Para las frecuencias a las que vale (88.13) y para temperaturas no demasiado bajas, se tiene $kT \gg \hbar\omega$, de modo que $\text{ctgh}(\hbar\omega/2T) \approx 2T/\hbar\omega$. En definitiva, la fórmula (88.11) toma la forma

$$(j_{i1}j_{k2})_\omega = (T/\pi)\sigma_{ik}\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (88.16)$$

La fórmula (88.16) fue obtenida (siguiendo otro método) por *M. A. Leontovich* y *S. M. Rytov* (1952), y las fórmulas (88.11) y (88.12), por *S. M. Rytov* (1953). Junto con las ecuaciones (88.3) y (88.4), estas fórmulas resuelven, en principio, la cuestión de calcular las fluctuaciones electromagnéticas en un cuerpo cualquiera. El camino para resolver el problema en tal caso, es el siguiente. Considerando \mathbf{K}_ω y \mathbf{L}_ω como funciones dadas de las coordenadas, se resuelven las ecuaciones (88.3) y (88.4) respecto de \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω , teniendo en cuenta las necesarias condiciones de contorno relativas a la continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω sobre la superficie del cuerpo (fuera de éste, claro está, se tiene $\mathbf{K} = \mathbf{L} = 0$, pero \mathbf{E} y \mathbf{H} no son nulos). El resultado que se obtiene es \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω expresados en forma de funcionales lineales de \mathbf{K}_ω y \mathbf{L}_ω . De acuerdo con esto, cualquier magnitud cuadrática (o bilineal) respecto de \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω se expresa como funcional cuadrática de \mathbf{K}_ω , \mathbf{L}_ω , obteniéndose sus valores medios mediante las fórmulas (88.11) y (88.12) y desapareciendo \mathbf{K}_ω , \mathbf{L}_ω del resultado.

Como ejemplo, consideremos las fluctuaciones electromagnéticas en un medio isótropo ilimitado (*S. M. Rytov*, 1953). Supondremos que la permeabilidad del medio es igual a la unidad; entonces $\mu'' = 0$ y hay que hacer también $\mathbf{L} = 0$. De esta manera, las ecuaciones (88.3) y (88.4) toman la forma

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}_\omega &= i\omega\mathbf{H}_\omega/c, \\ \text{rot } \mathbf{H}_\omega &= -i\omega(\epsilon\mathbf{E}_\omega + \mathbf{K}_\omega)/c, \end{aligned} \quad (88.17)$$

siendo

$$(K_{i1}K_{k2})_\omega = 2\hbar\epsilon''\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\text{ctgh}(\hbar\omega/2T). \quad (88.18)$$

Representemos \mathbf{K}_ω como integral de Fourier:

$$\mathbf{K}_\omega(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_\omega(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p}. \quad (88.19)$$

Entonces

$$\mathbf{g}_\omega(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

$$\mathbf{g}_\omega^*(\mathbf{p}) = \mathbf{g}_{-\omega}(-\mathbf{p}).$$

Determinemos la función correlación entre las componentes $\mathbf{g}_\omega(\mathbf{p})$. Para ello escribamos su producto en la forma de integral doble

$$\begin{aligned} g_{i\omega}(\mathbf{p})g_{k\omega'}(\mathbf{p}') \\ = \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{i\omega}(\mathbf{r}_1)K_{k\omega'}(\mathbf{r}_2) \exp[-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Efectuando el promedio de acuerdo con

$$\overline{K_{i\omega}(\mathbf{r}_1)K_{k\omega'}(\mathbf{r}_2)} = (K_{i1}K_{k2})_\omega \delta(\omega + \omega'),$$

substituyendo en (88.18) y calculando una de las integrales (respecto de \mathbf{r}_1 o de \mathbf{r}_2), obtendremos, dado que en el integrando aparece el factor $\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$:

$$\begin{aligned} \overline{g_{i\omega}(\mathbf{p})g_{k\omega'}(\mathbf{p}')} &= 2\hbar\epsilon'' \delta(\omega + \omega') \delta_{ik} \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T) \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

o bien, en definitiva,

$$\overline{g_{i\omega}(\mathbf{p})g_{k\omega'}(\mathbf{p}')} = \frac{\hbar}{4\pi^3} \epsilon'' \delta_{ik} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T). \quad (88.20)$$

Las ecuaciones (88.17) se resolverán siguiendo el método de Fourier. Junto con la representación de \mathbf{K}_ω en forma de integral (88.19), haremos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p}, \\ \mathbf{H}_\omega &= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p} \times \mathbf{a} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p}. \end{aligned}$$

Con esto la primera de las ecuaciones (88.17) queda ya satisfecha, y la substitución en la segunda nos da

$$\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{a}) = -k^2(\epsilon \mathbf{a} + \mathbf{g}),$$

de donde

$$\mathbf{a} = [k^2 \epsilon \mathbf{g} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{p}] / (\epsilon(p^2 - \epsilon k^2).$$

Utilizando esta expresión y la fórmula (88.20), obtendremos para la correlación de las componentes de Fourier que corresponde al campo eléctrico el siguiente resultado

$$\overline{a_{i\omega}(\mathbf{p}) a_{k\omega'}(\mathbf{p}')} = \frac{\hbar \epsilon''}{4\pi^3 |\epsilon|^2} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \delta(\omega + \omega') \operatorname{ctgh} \frac{\hbar \omega}{2T} \times \\ \times \frac{k^4 |\epsilon|^2 \delta_{ik} - p_i p_k [k^2 (\epsilon + \epsilon^*) - p^2]}{|p^2 - k^2 \epsilon|^2}. \quad (88.21)$$

Finalmente, la correlación espacial entre las fluctuaciones del campo eléctrico se obtendrá aplicando la transformación de Fourier inversa:

$$\overline{E_{i\omega}(\mathbf{r}_1) E_{k\omega'}^*(\mathbf{r}_2)} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{a_{i\omega}(\mathbf{p}) a_{k\omega'}(\mathbf{p}')} \exp [i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}_2)] d\mathbf{p} d\mathbf{p}'.$$

Una integración se efectúa sin más en virtud de la presencia de la función δ en (88.21). En cambio, para llevar a cabo la segunda integración hay que desarrollar la expresión (88.21) en fracciones simples y utilizar luego las fórmulas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{p^2 + \kappa^2} d\mathbf{p} = 2\pi^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_i p_k \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{p^2 + \kappa^2} d\mathbf{p} = -2\pi^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right).$$

La primera de ellas se obtiene tomando las componentes de Fourier de los dos miembros de la conocida igualdad

$$(\Delta - \kappa^2) \frac{e^{-\kappa r}}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}), \quad (88.22)$$

y la segunda resulta de derivar la primera.

En definitiva obtendremos

$$(E_{i1} E_{k2})_{\omega} = \frac{\hbar}{4\pi i} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar \omega}{2T} \left\{ \frac{k^2}{r} (e^{-kr\sqrt{-\epsilon}} - e^{-kr\sqrt{-\epsilon^*}}) \delta_{ik} + \right. \\ \left. + \frac{1}{|\epsilon|^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left[\frac{1}{r} (\epsilon^* e^{-kr\sqrt{-\epsilon}} - \epsilon e^{-kr\sqrt{-\epsilon^*}}) \right] \right\}, \quad (88.23)$$

donde $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ y la raíz $\sqrt{-\epsilon}$ debe tomarse con signo tal que se tenga $\text{Re } \sqrt{-\epsilon} > 0$. En particular, contrayendo respecto de los índices i, k y aplicando la relación (88.22), se encuentra

$$(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)_\omega = \frac{\hbar}{4\pi i} \text{ctgh} \frac{\hbar \omega}{2T} \left\{ \frac{2k^2}{r} (e^{-kr\sqrt{-\epsilon}} - e^{-kr\sqrt{-\epsilon^*}}) + \frac{8\pi i \epsilon''}{|\epsilon|^2} \delta(\mathbf{r}) \right\}. \quad (88.24)$$

De manera análoga puede calcularse la correlación de las diferentes componentes de \mathbf{H}_ω entre sí y con las componentes de \mathbf{E}_ω ; no nos detendremos aquí a estudiar este punto.

§ 89. La radiación del cuerpo negro en un medio transparente

La existencia de los factores ϵ'' o μ'' en las fórmulas (88.11) y (88.12) resalta claramente la relación entre las fluctuaciones electromagnéticas y la absorción en un medio dado. Pero si se efectúa el paso al límite $\epsilon'' \rightarrow 0$ (suponiendo al mismo tiempo $\epsilon' > 0$) en las fórmulas (88.23) y (88.24), obtendremos una expresión finita y no nula. Esta circunstancia está ligada con el orden del paso al límite en dos fases: a dimensiones infinitas del medio y a la tendencia de ϵ'' a cero. Dado que en un medio infinito un valor de ϵ'' , por pequeño que sea, conduce ya en último término a absorción, al seguir el orden de paso al límite que hemos adoptado, el resultado que se obtiene se refiere a un medio físicamente transparente, en el cual, como en cualquier medio real, existe siempre una cierta absorción no nula.

Efectuemos, por ejemplo, el indicado paso al límite en la fórmula (88.24). Observemos para ello que cuando ϵ'' es pequeño

$$\begin{aligned} \sqrt{-\epsilon} &= \sqrt{(-\epsilon' - i\epsilon'')} \approx -i\sqrt{\epsilon'}(1 + \frac{1}{2}i\epsilon''/\epsilon'), \\ \sqrt{-\epsilon^*} &= \sqrt{(-\epsilon' + i\epsilon'')} \approx i\sqrt{\epsilon'}(1 - \frac{1}{2}i\epsilon''/\epsilon'). \end{aligned}$$

El signo que hay que elegir en una y en otra expresión se determina por la condición de que sus partes reales sean positivas. Por consiguiente, en el límite $\epsilon'' \rightarrow 0$ obtendremos

$$(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)_\omega = \frac{\omega^2 \hbar}{\pi c^2} \frac{\text{sen } \omega n r / c}{r} \text{ctgh} \frac{\hbar \omega}{2T},$$

donde $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción. Visto que no existe ningún término con una función δ , esta expresión se conserva finita, y cuando los puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 coinciden se tiene

$$(\mathbf{E}^2)_\omega = (\omega^3 \hbar n / \pi c^3) \text{ctgh} (\hbar \omega / 2T). \quad (89.1)$$

La densidad espectral de la energía del campo eléctrico (por cm^3 del medio) viene dada por la expresión (véase (61.10) y V (121.6))

$$\frac{1}{8\pi} 2(\mathbf{E}^2)_\omega \frac{d(n^2\omega)}{d\omega}.$$

Substituyendo aquí (89.1), se obtendrá

$$\frac{\omega^3 \hbar n}{4\pi^2 c^3} \frac{d(n^2\omega)}{d\omega} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T}.$$

De manera análoga se puede calcular el valor medio del cuadrado del campo magnético. En este caso resulta que $(\mathbf{H}^2)_\omega = \epsilon(\mathbf{E}^2)_\omega$, por lo que la energía magnética será

$$\frac{1}{8\pi} 2(\mathbf{H}^2)_\omega = \frac{\omega^3 \hbar n^3}{4\pi^2 c^3} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T}$$

(no efectuamos aquí los cálculos correspondientes teniendo en cuenta que el resultado final que se obtiene es ya de suyo evidente).

Así pues, la densidad espectral total de la energía electromagnética de los campos de fluctuación es

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^3 \hbar}{4\pi^2 c^3} \left(n \frac{d(n^2\omega)}{d\omega} + n^3 \right) \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T} \\ &= \left(\frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) \frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d}{d\omega}(n\omega). \end{aligned}$$

El primer término entre paréntesis se debe a las oscilaciones de orden cero del campo. El segundo término, en cambio, da la energía de la radiación electromagnética en equilibrio termodinámico en el medio transparente (es decir, la energía llamada *radiación del cuerpo negro*):

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d}{d\omega}(n\omega). \quad (89.2)$$

Cabría también obtener esta fórmula, sin considerar las fluctuaciones, con sólo aplicar la correspondiente generalización de la fórmula de Planck para la radiación del cuerpo negro en el vacío. Según esta última, la energía de la radiación negra (por unidad de volumen) con componentes del vector de onda en intervalos dk_x, dk_y, dk_z viene dada por la fórmula

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \cdot \frac{2dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3}$$

(el factor 2 tiene en cuenta las dos direcciones de polarización). Para obtener la correspondiente densidad espectral de energía hay que substituir $dk_x dk_y dk_z$ por

$4\pi k^2 dk$ y hacer $k = \omega/c$. En cuanto al paso del vacío a un medio transparente, basta hacer $k = n\omega/c$ en vez de $k = \omega/c$, es decir, escribir

$$k^2 dk = k^2 (dk/d\omega) d\omega = (\omega^2 n^2 / c^3) d(n\omega) / d\omega,$$

lo que da la fórmula (89.2). Obsérvese que esta última se conserva también válida para $\mu \neq 1$, cuando por n hay que entender $\sqrt{\epsilon\mu}$.

§ 90. Fuerzas de atracción molecular entre sólidos

La teoría de las fluctuaciones electromagnéticas puede aplicarse al cálculo de las fuerzas de interacción entre dos cuerpos macroscópicos cualesquiera cuyas superficies se han aproximado hasta distancias muy pequeñas (*E. M. Lifshitz*). A continuación solamente se supone que estas distancias son grandes comparadas con las interatómicas; esta condición permite abordar el problema desde un punto de vista puramente macroscópico.

La interacción entre dos cuerpos puede considerarse en tal caso como resultado del campo electromagnético de las fluctuaciones que existe siempre en el interior de cualquier medio absorbente y se extiende también más allá de sus límites. Si el espacio entre las superficies de los cuerpos es el vacío, este mecanismo de transmisión de la interacción resulta ser, evidentemente, el único posible.

Imaginemos los dos cuerpos en interacción como dos medios que llenan semi-espacios con fronteras planas paralelas separadas entre sí por una distancia l . El campo electromagnético de fluctuación en ambos medios y en el espacio entre ellos puede determinarse resolviendo las ecuaciones (88.17)* con las correspondientes condiciones de contorno (continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω) sobre ambas superficies. La manera más conveniente de llegar a la solución consiste en desarrollar las funciones buscadas (y la magnitud \mathbf{K}_ω) en integrales de Fourier respecto de las coordenadas transversales y, z (el eje x se supone perpendicular al plano de la rendija), con lo cual se obtiene un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias para determinar la dependencia del campo respecto de x . Resuelto este sistema, los campos $\mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$ se obtienen a su vez como integrales de expresiones que contienen en los integrandos los campos de fluctuación «externos» $\mathbf{K}_{1\omega}$ y $\mathbf{K}_{2\omega}$ en ambos medios. De hecho, basta obtener de forma explícita los campos $\mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$ únicamente en el espacio correspondiente a la rendija, puesto que la fuerza F_ω de atracción mutua (que actúa por 1 cm^2 de superficie de cada uno de los cuerpos) puede calcularse a partir de dichos campos como componente xx del tensor maxwelliano de tensiones promediado estadísticamente mediante la fórmula (88.18). Dado que en todo esto los cálculos se llevan a cabo con las componentes espectrales del campo por separado, la determinación de la fuerza total de atrac-

* Suponemos que la permeabilidad de ambos cuerpos es igual a la unidad.

ción buscada F exige todavía integrar F_ω para todas las frecuencias*.

Los cálculos correspondientes, con todo, son muy laboriosos; no nos detendremos en exponerlos aquí y daremos la fórmula final para la fuerza **: :

$$F = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \operatorname{Re} \int_0^\infty \int p^2 \omega^3 \operatorname{ctgh} \frac{\hbar \omega}{2T} \left\{ \left[\frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{-2ip\omega/c} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_1 + \epsilon_1 p)(s_2 + \epsilon_2 p)}{(s_1 - \epsilon_1 p)(s_2 - \epsilon_2 p)} e^{-2ip\omega l/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp d\omega, \quad (90.1)$$

donde $\epsilon_1(\omega)$, $\epsilon_2(\omega)$ son las permitividades de uno y otro cuerpo y

$$s_1 = \sqrt{[\epsilon_1(\omega) - 1 + p^2]}, \quad s_2 = \sqrt{[\epsilon_2(\omega) - 1 + p^2]}, \quad (90.2)$$

debiendo tomarse la raíz con signo tal que la parte imaginaria de s sea positiva***. El camino de integración se indica en la figura 43 a. La integral respecto de ω se extiende a valores reales desde 0 a ∞ , y respecto de p , a lo largo del eje real desde

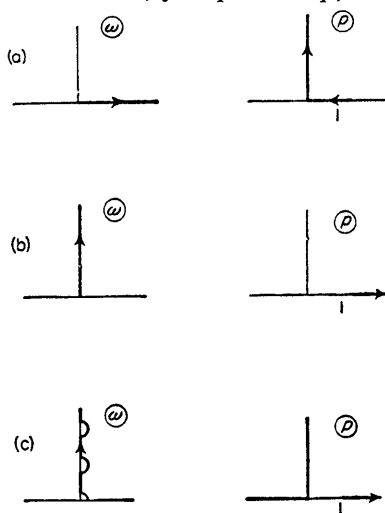


FIG. 43

* El valor F_ω que se obtiene como resultado de los cálculos, contiene un término que diverge al integrar respecto de ω . Este término divergente, sin embargo, no depende de la distancia l y representa la presión que determina sobre la superficie la radiación del cuerpo negro en el vacío. En condiciones reales, estas fuerzas, que actúan sobre un cuerpo por todos lados, se compensan entre sí. Por ello, el término a que nos referimos nada tiene que ver con la fuerza de atracción mutua que nos interesa, y debe prescindirse de él.

** Véase E. M. Lifshitz, ZhETF 29, 94, 1955. Otro procedimiento basado en el método de las funciones de Green ha sido utilizado por I. E. Dzialochynski, E. M. Lifshitz y L. P. Pitaevski, Advances in Physics, 10, 165, 1961.

*** Dado que la parte imaginaria del radicando (ϵ'') es positiva, cuando se tiene $\operatorname{Im} s > 0$ será también $\operatorname{Re} s > 0$.

1 a 0 y, luego, siguiendo el eje imaginario, desde 0 a $i\infty$.

Si la temperatura de los cuerpos se puede considerar igual a cero (véase más adelante), $\text{ctgh}(\hbar\omega/2T)$ en (90.1) se substituye por la unidad. Consideremos primero la fórmula (90.1) precisamente para este caso.

La fórmula (90.1) resulta poco conveniente, tanto por su forma compleja, como por el hecho de que el integrando contiene una expresión que oscila (sobre la parte real del camino de integración respecto de p), a saber, el factor $e^{-2ip\omega l/c}$. Esta circunstancia complica particularmente el cálculo de la integral para grandes valores de l , cuando la oscilación pasa a ser muy rápida. Estas dificultades se pueden eludir modificando convenientemente los caminos de integración en los planos de las variables complejas ω y p . En efecto, es posible desplazar simultáneamente estos caminos de tal manera que la integración respecto de p se extiende solamente a valores reales, y la relativa a ω , únicamente a valores imaginarios (fig. 43 b); entonces el exponente en $e^{-2ip\omega l/c}$ será siempre real*.

Como resultado obtenemos la expresión siguiente para la fuerza de interacción (cuando $T = 0$):

$$F = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \int_1^\infty p^2 \xi^3 \left\{ \left[\frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{2p\xi l/c} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_1 + \epsilon_1 p)(s_2 + \epsilon_2 p)}{(s_1 - \epsilon_1 p)(s_2 - \epsilon_2 p)} e^{2p\xi l/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp d\xi. \quad (90.3)$$

Se ha introducido aquí la notación $\omega = i\xi$ para los valores imaginarios de ω , y hay que entender por ϵ_1 y ϵ_2 las funciones reales $\epsilon_1(i\xi)$ y $\epsilon_2(i\xi)$. El signo Re se ha suprimido, dado que la expresión que acabamos de escribir es real, evidentemente. La fórmula (90.3) proporciona, en principio, la posibilidad de calcular la fuerza F para una distancia arbitraria l , con tal que se conozcan las funciones $\epsilon(i\xi)$ para ambos cuerpos. Ahora bien, estas últimas pueden expresarse en función de los valores de la parte imaginaria de la función $\epsilon(\omega)$ para valores ω reales según la fórmula (62.17). De esta manera cabe decir que la ley de interacción de los cuerpos queda determinada por completo si se dan sus funciones $\epsilon''(\omega)$.

Consideremos el caso límite de distancias l pequeñas comparadas con las longitudes de onda λ_0 más importantes que figuran en el espectro de absorción de los cuerpos dados. Las temperaturas que pueden intervenir en el caso de cuerpos condensados son pequeñas, en cualquier caso, en comparación con los valores $\hbar\omega \sim \hbar\omega_0$ que aquí representan algún papel (donde $\omega_0 \sim 2\pi c/\lambda_0$). Por ello cabe considerar que $T = 0$ y utilizar, según esto, la fórmula (90.3).

* La condición de aplicabilidad de esta transformación consiste en la existencia de una manera de desplazar simultáneamente ambos caminos de modo que el integrando no pase en ningún caso por sus polos. Un estudio especial, basado en las propiedades generales de la función $\epsilon(\omega)$ (expuestas en el § 62), demuestra que dicha deformación sí es posible.

Gracias a la presencia en el denominador del integrando del factor $e^{2p\xi l/c}$ que crece exponencialmente, el papel principal en la integración respecto de p lo desempeñan aquellos valores p tales que $p l \xi / c \sim 1$. Con esto es $p \gg 1$ y, por ello, al determinar los términos principales se puede hacer $s_1 \approx s_2 \approx p$. En esta aproximación, el primer término en los paréntesis rectangulares de (90.3) se anula. En cuanto al segundo término, después de introducir la variable de integración $x = 2p l \xi / c$, da

$$F = \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^2 dx d\xi}{\left(\frac{\epsilon_1 + 1}{\epsilon_1 - 1}\right) \left(\frac{\epsilon_2 + 1}{\epsilon_2 - 1}\right) e^x - 1} \quad (90.4)$$

(el límite inferior $2l\xi/c$ de integración respecto de x se ha reemplazado, en esta misma aproximación, por el valor cero).

La fórmula (90.4) determina la fuerza de atracción en el caso límite de valores l pequeños. Dicha fuerza resulta ser inversamente proporcional al cubo de la distancia. La función $\epsilon(i\xi) - 1$ es monótona decreciente al aumentar ξ y tiende a cero. En consecuencia, los valores de ξ a partir de un cierto ξ_0 dejan de proporcionar una contribución importante a la integral; la condición de que l sea pequeño significa que debe tenerse $l \ll c/\xi_0$.

Veamos cómo se realiza en (90.4) el paso al límite correspondiente a la interacción de los átomos individuales. Para ello supondremos, de manera formal, que ambos medios se encuentran suficientemente enrarecidos. Entonces las diferencias $\epsilon_1 - 1$ y $\epsilon_2 - 1$ son casi nulas y de (90.4) se deduce, con precisión suficiente,

$$\begin{aligned} F &= \frac{\hbar}{64\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x(\epsilon_1 - 1)(\epsilon_2 - 1)} dx d\xi \\ &= \frac{\hbar}{32\pi^2 l^3} \int_0^\infty [\epsilon_1(i\xi) - 1][\epsilon_2(i\xi) - 1] d\xi. \end{aligned}$$

Expresando $\epsilon(i\xi)$ en función de los valores $\epsilon''(\omega)$ sobre el eje real según (62.17), obtendremos

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty [\epsilon_1(i\xi) - 1][\epsilon_2(i\xi) - 1] d\xi \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\omega_1 \omega_2 \epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{(\omega_1^2 + \xi^2)(\omega_2^2 + \xi^2)} d\xi d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned}$$

y para la fuerza F se encuentra:

$$F = \frac{\hbar}{16\pi^3 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (90.5)$$

Por otra parte, se puede considerar la fuerza de interacción entre dos medios enra-
recidos como resultado de la interacción entre pares individuales de moléculas.
Entonces, la fuerza (90.5) corresponde a la interacción de las moléculas con una
energía que depende de la distancia R entre ellas de acuerdo con

$$U = - \frac{3\hbar}{8\pi^4 R^6 N^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2, \quad (90.6)$$

donde N es el número de átomos por unidad de volumen ((90.5) se obtiene a partir
de aquí por integración en los dos semiespacios separados por una rendija de an-
chura l y derivando luego la energía total respecto de la distancia l). La fórmula
(90.6) coincide con la conocida fórmula de *F. London* que se obtiene mediante la
teoría cuántica ordinaria de perturbaciones aplicada a la interacción dipolar entre
dos átomos. Al efectuar la comparación, debe tenerse en cuenta que $\epsilon''(\omega)$ está li-
gada con la densidad espectral de la «fuerza de los osciladores» $f(\omega)$ por la relación
(62.13); ahora bien, la fuerza de éstos se expresa, como de ordinario, en función
de los cuadrados de los elementos de matriz del momento dipolar del átomo. Vemos
así, cómo una fórmula microscópica resulta de una teoría macroscópica.

Pasemos al caso límite opuesto, cuando las distancias son grandes comparadas
con las longitudes de onda que más importan en el espectro de absorción de los
cuerpos ($l \gg \lambda_0$). También aquí supondremos primero que la temperatura es igual
a cero.

Introduzcamos de nuevo en la fórmula general (90.3) la variable de integración
 $x = 2p\xi l/c$, pero adoptemos como segunda variable no ξ , sino p :

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[\frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_1 + \epsilon_1 p)(s_2 + \epsilon_2 p)}{(s_1 - \epsilon_1 p)(s_2 - \epsilon_2 p)} e^x - 1 \right]^{-1} \right\} dp dx, \\ \epsilon = \epsilon(ixc/2pl), \quad s = \sqrt{[\epsilon(ixc/2pl) - 1 + p^2]}.$$

Gracias a la presencia de e^x en los denominadores, en la integral respecto de x
representan un papel los valores $x \sim 1$, y dado que $p \gg 1$, el argumento de las
funciones ϵ es casi cero para valores de l grandes en todo el dominio de valores de
las variables que importa. De acuerdo con esto, se pueden substituir ϵ_1 y ϵ_2 , simple-
mente, por sus valores para $\omega = 0$, es decir, por las permitividades electrostáticas,

que designaremos por ϵ_{10} y ϵ_{20} . En los metales, la función $\epsilon(\omega)$ tiende a infinito cuando $\omega \rightarrow 0$; así pues, en dicho caso hay que suponer $\epsilon_0 = \infty$.

De esta manera obtendremos en definitiva el resultado siguiente:

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[\frac{(s_{10} + p)(s_{20} + p)}{(s_{10} - p)(s_{20} - p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_{10} + \epsilon_{10} p)(s_{20} + \epsilon_{20} p)}{(s_{10} - \epsilon_{10} p)(s_{20} - \epsilon_{20} p)} e^x - 1 \right]^{-1} \right\} dp dx, \quad (90.7)$$

$$s_{10} = \sqrt{(\epsilon_{10} - 1 + p^2)}, \quad s_{20} = \sqrt{(\epsilon_{20} - 1 + p^2)}.$$

La fuerza de atracción resulta aquí inversamente proporcional a l^4 . Es notable que, en este caso límite, dicha fuerza depende solamente de las permitividades electrostáticas de ambos medios.

Consideremos algunos casos particulares. Un resultado especialmente simple se obtiene cuando los dos medios son metales. Haciendo en (90.7) $\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = \infty$, se obtendrá

$$F = \frac{\hbar c}{16\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3 dp dx}{p^2(e^x - 1)} = \frac{\hbar c}{l^4} \cdot \frac{\pi^2}{240}. \quad (90.8)$$

Esta fuerza es por completo independiente de la naturaleza de los mismos (esta propiedad no se presenta a pequeñas distancias, caso éste en que la intensidad de la interacción depende de la función $\epsilon(i\xi)$ para todos los valores de ξ , y no sólo para el correspondiente a $\xi = 0$).*

Para dos dieléctricos iguales ($\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = \epsilon_0$), he aquí el resultado que se obtiene a partir de (90.7) mediante integración numérica:

$$F = \frac{\hbar c}{l^4} \cdot \frac{\pi^2}{240} \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 1} \right)^2 \phi(\epsilon_0), \quad (90.9)$$

donde $\phi(\epsilon_0)$ es una función cuyos valores se representan gráficamente en la figura 44.

Finalmente, en la fórmula (90.7) efectuemos el paso a la interacción de moléculas por separado. Como antes, supondremos para ello que ambos medios están suficientemente enrarecidos, es decir, que las diferencias $\epsilon_{10} - 1$ y $\epsilon_{20} - 1$ son pequeñas. Conservando en el integrando de (90.7) únicamente el primer término no nulo del desarrollo en serie respecto de estas diferencias obtendremos

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \int_1^\infty \frac{1 - 2p^2 + 2p^4}{8p^6} dp (\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)$$

* La fórmula (90.8) había sido antes obtenida por H. B. G. Casimir (1948) siguiendo otro método.

o bien

$$F = \frac{\hbar c}{l^4} \cdot \frac{23}{640\pi^2} (\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1). \quad (90.10)$$

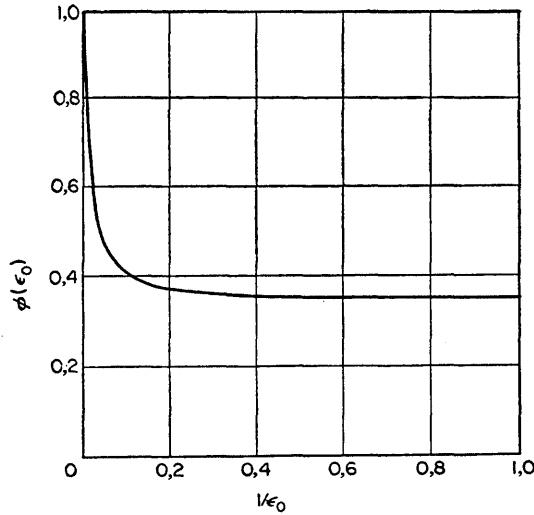


FIG. 44

Esta fuerza corresponde a la interacción de las moléculas con una energía

$$U = - \frac{23\hbar c}{64\pi^3 R^7} \frac{(\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)}{N^2} = - \frac{23\hbar c}{4\pi R^7} \alpha_1 \alpha_2, \quad (90.11)$$

donde α_1 , α_2 son las polarizaciones estáticas de una y de otra. Esta fórmula coincide con el resultado del cálculo cuántico efectuado por Casimir y Polder (1948) para la atracción de dos moléculas a distancias suficientemente grandes, tanto que pasan a ser importantes los efectos de retardo de la interacción.

Para obtener fórmulas que tengan en cuenta la influencia de la temperatura, volvamos a la expresión de partida (90.1) y veamos en qué sentido debe modificarse cuando $T \neq 0$ la transformación que condujo a la fórmula (90.3) en el caso $T = 0$. La función $\text{ctgh}(\hbar\omega/2T)$ posee infinitos polos situados sobre el eje imaginario, iguales a

$$\omega_n = i\xi_n = 2\pi i T n / \hbar, \quad (90.12)$$

donde n es un número entero. Por ello, al desplazar el camino de integración respecto de ω llevándolo a coincidir con el eje imaginario, es necesario sortear estos polos mediante semicircunferencias, salvo el polo $\omega = 0$ que debe rodearse siguiendo un cuadrante (fig. 43 c). Precisamente estos segmentos del camino de integración proporcionan contribuciones a la parte real de la integral, contribuciones que son

iguales a los residuos del integrando en dichos polos multiplicados por πi (por $\pi i/2$ para el polo $n = 0$); en cambio, la integración a lo largo de los segmentos del eje imaginario entre polos da cantidades puramente imaginarias que desaparecen al tomar la parte real.

Se obtiene así la siguiente fórmula:

$$F = \frac{T}{\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty'} \xi_n^3 \int_1^{\infty} p^2 \left\{ \left[\frac{(s_{1n} + p)(s_{2n} + p)}{(s_{1n} - p)(s_{2n} - p)} e^{2p\xi_n l/c} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_{1n} + \epsilon_{1n}p)(s_{2n} + \epsilon_{2n}p)}{(s_{1n} - \epsilon_{1n}p)(s_{2n} - \epsilon_{2n}p)} e^{2p\xi_n l/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp, \quad (90.13) \\ s_n = \sqrt{(\epsilon_n - 1 + p^2)}, \quad \epsilon_n = \epsilon(i\xi_n)$$

(el apóstrofo en el signo de suma significa que el término con $n = 0$ debe dividirse por dos). Cuando $T \rightarrow 0$, las distancias entre polos tienden también a cero, la suma respecto de n puede substituirse por una integración respecto de ξ y volvemos a la fórmula (90.3) que no contiene T .

Mientras que, en el caso límite de pequeñas distancias, al determinar la fuerza de interacción se puede considerar siempre de hecho la temperatura de los cuerpos como igual a cero, a grandes distancias la influencia de la temperatura puede cobrar importancia fundamental. La temperatura característica para una longitud l es $\hbar c/l$, y la condición que permite hacer $T = 0$ es, aproximadamente, $lT/\hbar c \ll 1$. Para temperaturas suficientemente pequeñas esta condición, claro está, puede siempre ser compatible con la condición $l \gg \lambda_0$. Pero en el caso de temperaturas elevadas, cabe que dichas dos condiciones resulten contradictorias entre sí, y entonces el dominio de aplicabilidad de la ley límite (90.7) de hecho desaparece.

Consideremos el caso límite de distancias tan grandes que se tiene $lT/\hbar c \gg 1$. Entonces, de todos los términos de la suma (90.13) sólo hay que conservar el primero. Sin embargo, es imposible hacer en él, sin más, $n = 0$ debido a la indeterminación que aparece en tal caso (el factor ξ_n^3 se anula, pero la integral respecto de p diverge). Esta complicación puede evitarse introduciendo primero, en vez de p , una nueva variable de integración $x = 2p\xi_n l/c$ (con lo cual desaparece el factor ξ_n^3). Haciendo luego $n = 0$, obtendremos

$$F = \frac{T}{16\pi l^3} \int_0^{\infty} x^2 \left[\frac{(\epsilon_{10} + 1)(\epsilon_{20} + 1)}{(\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)} e^x - 1 \right]^{-1} dx. \quad (90.14)$$

De esta manera, a distancias suficientemente grandes disminuye la rapidez con que decrece la fuerza de interacción, que pasa a seguir de nuevo la ley l^{-3} , con un coeficiente que depende de la temperatura y del valor electrostático de la permitividad. Todos los términos siguientes de la suma (90.13) disminuyen exponencialmente para grandes valores de $lT/\hbar c$.

CAPÍTULO XIV

DISPERSIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 91. Teoría general de la dispersión en medios isótropos

En la teoría de la propagación de las ondas electromagnéticas en medios transparentes expuesta en los capítulos IX-XI, en ningún caso se consideró un fenómeno relativamente débil, pero a la vez de importancia fundamental: la *dispersión*. Este fenómeno consiste en la aparición de ondas débiles (*ondas dispersas*), cuyas frecuencias y direcciones de propagación difieren de la frecuencia y de la dirección de propagación de la onda primaria.

El origen de la dispersión se reduce, en último término, a la variación del movimiento de las cargas que forman parte de un medio bajo la influencia del campo de la onda incidente; esta variación conduce a la emisión de nuevas ondas —las ondas dispersas. El estudio del mecanismo microscópico de la dispersión debe efectuarse tomando como base la mecánica cuántica; sin embargo, ello no es necesario para desarrollar la teoría macroscópica que se expone a continuación. Por consiguiente, nos limitaremos tan sólo a breves observaciones acerca de los caracteres de los procesos que conducen al cambio de frecuencia de las ondas en la dispersión.

El tipo fundamental de procesos elementales de dispersión consiste en la absorción de un cuanto inicial $\hbar\omega$ por el sistema dispersor con emisión simultánea de otro cuanto $\hbar\omega'$ por el mismo. La frecuencia ω' del cuanto dispersado, igual puede ser menor o mayor que la frecuencia ω (estos casos se llaman, respectivamente, *dispersión de Stokes* y *dispersión de anti-Stokes*). En el primer caso la energía $\hbar(\omega - \omega')$ es absorbida por el sistema, y en el segundo la energía $\hbar(\omega' - \omega)$ es cedida por el mismo a expensas de la transición a un estado energéticamente más bajo. Así, en el caso simple de un gas, la dispersión tiene lugar en las moléculas individuales y la variación de frecuencia puede tener lugar tanto a expensas de la transición de la molécula a otro nivel de energía, como a expensas de la variación de la energía cinética de su movimiento como un todo.

Otro tipo de proceso elemental consiste en que el cuanto inicial $\hbar\omega$ se mantiene invariable, pero bajo su influencia el sistema dispersor radia inmediatamente dos cuantos: un cuanto $\hbar\omega$ con la misma frecuencia y dirección, y un cuanto $\hbar\omega'$ «dispersado». La energía $\hbar(\omega + \omega')$, en tal caso, la proporciona el sistema dispersor. Los procesos de este tipo, sin embargo, son extraordinariamente raros en condicio-

nes ordinarias comparados con los del primer tipo y prácticamente no representan ningún papel en el fenómeno de la dispersión*.

Pasando a exponer la teoría macroscópica de la dispersión, es necesario ante todo precisar el significado de los promedios que se efectúan en ella. Como ya se indicó al principio del § 88, el promedio de las magnitudes en la electrodinámica macroscópica puede concebirse como conjunto de dos operaciones: un promedio en volúmenes físicamente infinitesimales para posiciones dadas de todas las partículas en el mismo y, luego, el promedio de la magnitud obtenida respecto del movimiento de las partículas. En la teoría de la dispersión, sin embargo, es imposible adoptar este procedimiento sin más, puesto que el promediar respecto del movimiento de las partículas conduciría a la desaparición del fenómeno que nos interesa precisamente. Así, por ejemplo, la inducción y la intensidad del campo de la onda dispersada que figura en la teoría de la dispersión hay que interpretarlas como resultado de, únicamente, la primera parte de la operación promedio. Las componentes monocromáticas de las magnitudes del campo de la onda dispersada así entendidas las designaremos en este párrafo por E' , H' , D' , B' .

En cuanto al campo de la onda incidente, sus componentes se representarán por las letras E , H sin apóstrofo. En todo este capítulo se supone que la onda incidente es monocromática y de frecuencia ω .

El mero proceso de propagación de la onda dispersada en el medio supondría la relación $D' = \epsilon(\omega')E'$ entre el desplazamiento y la intensidad del campo eléctricos (admitimos que el medio dispersor es isótropo). Sin embargo, esta relación no encierra en sí el fenómeno de la dispersión, es decir, la aparición de una onda dispersada bajo la influencia de la incidente. Para describirla, es necesario tener en cuenta pequeños términos complementarios en la expresión de D' . En primera aproximación, dichos términos han de ser lineales respecto del campo de la onda incidente; la forma más general de esta dependencia es:

$$D'_i = \epsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k + \beta_{ik} E_k^*. \quad (91.1)$$

Aquí ϵ' designa $\epsilon(\omega')$, mientras que α_{ik} y β_{ik} son tensores que caracterizan las propiedades dispersoras del medio. En el caso general, no poseen propiedad alguna de simetría y sus componentes son funciones tanto de la frecuencia ω' de la onda dispersada, como de la frecuencia inicial ω . **

El último término en (91.1) está vinculado con aquella parte de la dispersión debida a los procesos elementales de emisión forzada. En efecto, todos los términos en el segundo miembro de la igualdad (91.1) han de corresponder a la misma frecuencia ω' que D' en el primer miembro de la misma. Dado que E^* tiene una fre-

* Veremos más adelante (§ 92) que el efecto de *emisión forzada* (o *estimulada*) es muy pequeño a todas las temperaturas tales que $T \ll \hbar(\omega + \omega')$. Puede cobrar importancia en el dominio de las radiofrecuencias.

** El carácter tensorial de las magnitudes α y β , claro está, no se encuentra en contradicción con la isotropía del medio, isotropía que hemos admitido. Sólo son isótropas las propiedades totalmente promediadas del medio; en cambio, las desviaciones locales respecto de las propiedades medias, a las que precisamente se refieren los términos complementarios en (91.1), no tienen por qué ser isótropas necesariamente.

cuencia $-\omega$, la frecuencia de las magnitudes β_{ik} debe ser $\omega + \omega'$ para que la frecuencia de los productos $\beta_{ik}E_k^*$ sea ω' . Pero $\omega + \omega'$ es precisamente la frecuencia característica de los procesos de emisión forzada. Visto que este efecto, conforme se recordó antes, es pequeño, cabe prescindir de los términos correspondientes en (91.1), y escribiremos en lo que sigue

$$D'_i = \epsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k. \quad (91.2)$$

Mediante fórmulas análogas se expresa también la relación entre \mathbf{B}' y \mathbf{H}' . Sin embargo, prescindiremos de las propiedades magnéticas del medio, propiedades que de ordinario carecen de importancia en el fenómeno de dispersión de la luz, por lo que se hará $\mathbf{B}' = \mathbf{H}'$.

Las ecuaciones de Maxwell para el campo de la onda dispersada se escriben:

$$\text{rot } \mathbf{E}' = i\omega' \mathbf{H}'/c, \quad \text{rot } \mathbf{H}' = -i\omega' \mathbf{D}'/c.$$

Eliminando \mathbf{H}' entre estas ecuaciones, se encuentra

$$\text{rot rot } \mathbf{E}' = \omega'^2 \mathbf{D}'/c^2.$$

Substituyendo aquí (91.2), resulta

$$\mathbf{E}' = \mathbf{D}'/\epsilon' - \alpha \cdot \mathbf{E}/\epsilon',$$

(($\alpha \mathbf{E}$) representa el vector cuyas componentes son $\alpha_{ik} E_k$) y teniendo en cuenta que $\text{div } \mathbf{D}' = 0$, obtendremos la siguiente ecuación para \mathbf{D}' :

$$\Delta \mathbf{D}' + k'^2 \mathbf{D}' = - \text{rot rot } (\alpha \cdot \mathbf{E}), \quad (91.3)$$

donde $k' = (\omega/c)/\sqrt{\epsilon'}$ es el vector de onda de la onda dispersada.

Para formular exactamente las condiciones en que debe resolverse la ecuación (91.3), dividiremos el medio dispersor en pequeñas regiones (cuyo tamaño, sin embargo, es grande comparado con las distancias moleculares). En virtud del carácter molecular de los procesos de dispersión, la correlación entre estos procesos en diferentes puntos del medio (¡no cristalino!) se extiende, en general, tan sólo a distancias que son del orden de magnitud de las moleculares*. Por ello, la luz dispersada que procede de diferentes regiones del medio es incoherente. Podemos considerar, por lo tanto, la dispersión producida en una de dichas regiones como si en el volumen restante del cuerpo la luz se propagase sin ser dispersada. Procediendo de esta manera, calcularemos el campo de la onda dispersada a gran distancia de la región de dispersión. Utilizando la conocida fórmula aproximada para los potenciales retardados a gran distancia de la fuente**, se puede escribir, sin más, la solución que buscamos de la ecuación (91.3):

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{4\pi} \text{rot rot } \frac{\exp(ik'R_0)}{R_0} \int \alpha \cdot \mathbf{E} \exp(-ik' \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (91.4)$$

* Pueden constituir excepción ciertos casos particulares de dispersión de los que se hablará en el § 94. En estos casos, el tamaño de las regiones dispersoras ha de suponerse también grande comparado con la longitud de onda de la luz e incluso mucho mayor.

** Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 66.

Aquí, \mathbf{R}_0 es el vector posición desde un punto cualquiera en el interior del volumen dispersor (al que se extiende la integración) hasta el punto de observación del campo, mientras que el vector \mathbf{k}' es paralelo a \mathbf{R}_0 . La integral que aquí aparece no depende de las coordenadas del punto de observación; derivando y conservando, como de ordinario, tan sólo los términos en $1/R_0$, se obtiene

$$\mathbf{D}' = - \frac{\exp(i\mathbf{k}'\mathbf{R}_0)}{4\pi R_0} \mathbf{k}' \times [\mathbf{k}' \times \int \alpha \cdot \mathbf{E} \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) dV].$$

Dado que, en el punto de observación, consideramos el medio como si no fuera dispersor, la relación entre \mathbf{D}' y \mathbf{E}' en este punto viene dada simplemente por la igualdad $\mathbf{D}' = \epsilon' \mathbf{E}'$. Separemos en el campo de la onda incidente \mathbf{E} el factor periódico espacial, escribiendo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$

Introduciendo luego la notación

$$\mathbf{G} = \int \alpha \cdot \mathbf{E}_0 \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (91.5)$$

donde

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k},$$

haremos

$$\mathbf{E}' = - \frac{\exp(i\mathbf{k}'\mathbf{R}_0)}{4\pi R_0 \epsilon'} \mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{G}). \quad (91.6)$$

El vector \mathbf{E}' es perpendicular a la dirección \mathbf{k}' de la onda dispersada y viene dado por la proyección del vector \mathbf{G} perpendicular a \mathbf{k}' .

Determinado de esta manera el campo no promediado de la onda dispersada, podemos pasar ahora al estudio de la intensidad y de la polarización de la luz dispersada. Para ello hay que formar el tensor

$$I_{ik} = \overline{E'_i E'^*_k}, \quad (91.7)$$

donde el trazo representa el promedio final, no efectuado hasta ahora, respecto al movimiento de las partículas en el cuerpo; el valor medio de una expresión cuadrática es, naturalmente, diferente de cero. Dado que $\mathbf{E}' \perp \mathbf{k}'$, el tensor I_{ik} posee componentes no nulas tan sólo en un plano perpendicular a \mathbf{k}' ; estas componentes forman (en este plano) un tensor bidimensional $I_{\alpha\beta}$ (designamos con letras griegas los índices que toman dos valores). El tensor $I_{\alpha\beta}$, por definición, es hermitico: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}^*$. Es posible reducirlo a sus «ejes principales», y la razón de sus dos valores principales nos da el grado de despolarización, mientras que su suma es proporcional a la intensidad total de la luz*.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 50. Reducir un tensor hermitico a sus ejes principales significa representarlo en la forma $I_{ik} = \lambda_1 n^1_i n^{1*}_k + \lambda_2 n^2_i n^{2*}_k$, donde $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2$ son vectores «unitarios», en general complejos, perpendiculares entre sí: $\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^{1*} = \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{n}^{2*} = 1, \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^{2*} = 0$. Los valores principales λ_1, λ_2 de un tensor hermitico son reales.

En los productos $E_i' E_k^*$ aparecen productos de integrales G_i ; también ellos deben someterse a promedio. Escribiendo el producto de dos integrales en la forma de integral doble, tenemos

$$G_i G_k^* = E_{0i} E_{0m}^* \int \int \alpha_{il,1\alpha km,2}^* \exp[-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] dV_1 dV_2. \quad (91.8)$$

Los índices 1, 2 indican que los valores de α se toman en dos puntos del espacio diferentes.

Al promediar el integrando, hay que tener en cuenta que la correlación entre los valores de α en puntos distintos del cuerpo se extiende, en general, tan sólo a distancias que son del orden de magnitud de las moleculares. Esto significa que, después de efectuar el promedio, el integrando será esencialmente distinto de cero tan sólo para $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim a$, donde a es del orden de magnitud de las distancias moleculares. El exponente en el factor exponencial es $\sim a/\lambda$, donde λ es la longitud de onda dispersada; pero $a/\lambda \ll 1$ en virtud de la condición necesaria de aplicabilidad de la teoría macroscópica en general. Podemos, en consecuencia, substituir el factor exponencial por la unidad*.

Por otra parte, la integración respecto de las coordenadas \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 se puede substituir por la integración respecto de $(\frac{1}{2})(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Dado que el integrando depende (después de promediar) únicamente de \mathbf{r} , obtendremos

$$\overline{G_i G_k^*} = V E_{0i} E_{0m}^* \int \overline{\alpha_{il,1\alpha km,2}^*} dV, \quad (91.9)$$

donde V es el volumen de la parte dispersora del cuerpo; el hecho de que la dispersión ha de ser proporcional a V es evidente a priori. Observemos que la dirección del vector de onda \mathbf{k} de la onda incidente no aparece ya en la fórmula (91.9) y, por consiguiente, tampoco en las fórmulas que siguen.

Las integrales que encontramos en (91.9) constituyen un tensor de cuarto orden que tan sólo depende de las propiedades del medio dispersor. Debido a la isotropía del medio, la forma más general de dicho tensor será

$$\int \overline{\alpha_{il,1\alpha km,2}^*} dV = \frac{1}{2}(a + c)\delta_{il}\delta_{km} + \frac{1}{2}(a - c)\delta_{im}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{lm}, \quad (91.10)$$

donde a , b , c son constantes escalares (más exactamente, funciones de ω y ω'). Este tensor es automáticamente simétrico respecto de las permutaciones del par de índices i, l con el par k, m ; pero una tal permutación es equivalente a pasar a la magnitud conjugado-compleja (en virtud de la equivalencia de los puntos 1 y 2); en consecuencia, el tensor (91.10) es real, y por lo tanto también lo son a , b , c .

Substituyendo (91.10) en (91.9), obtendremos

$$\overline{G_i G_k^*} = V \left\{ \frac{1}{2}(a + c)E_{0i}E_{0k}^* + \frac{1}{2}(a - c)E_{0i}^*E_{0k} + bE_{0i}E_{0l}^*\delta_{ik} \right\}. \quad (91.11)$$

Esta expresión se podría haber escrito sin más, puesto que es el tensor hermitico más general de segundo orden, cuadrático respecto de \mathbf{E}_0 y que no contiene ninguna otra dirección privilegiada. Este tensor, claro está, no es «transversal» respecto

* Que esta aproximación sea admisible exige, sin embargo, especiales reservas en la llamada dispersión de Rayleigh (§ 94).

de la dirección de \mathbf{k}' . Pero la forma general del tensor buscado $I_{\alpha\beta}$ se obtiene mediante «proyección» del tensor (91.11) sobre un plano perpendicular a \mathbf{k}' (para lo cual basta elegir un sistema de coordenadas con uno de los ejes paralelo a \mathbf{k}' y hallar las componentes del tensor respecto de los otros dos ejes).

Consideremos la dispersión de una onda polarizada linealmente. La amplitud de su campo \mathbf{E}_0 puede definirse como magnitud puramente real*. Con ella serán entonces también reales todas las componentes del tensor $I_{\alpha\beta}$ de la luz dispersada. Esto significa que ésta se encuentra parcialmente polarizada, pudiéndose descomponer en dos ondas independientes (incoherentes), cada una de las cuales está polarizada linealmente. Debido a que existen sólo dos direcciones privilegiadas (\mathbf{E}_0 y \mathbf{k}') de las que depende el tensor $I_{\alpha\beta}$, es desde luego evidente que una de estas ondas está polarizada con el vector \mathbf{E}' en el plano \mathbf{E}_0 , \mathbf{k}' , mientras que la otra lo está perpendicularmente a este plano; las intensidades de estas dos componentes de la luz dispersada se designarán, respectivamente, por I_1 e I_2 ; una y otra vienen determinadas por los correspondientes valores principales del tensor $I_{\alpha\beta}$.

Para \mathbf{E}_0 real, la expresión (91.11) toma la forma

$$\overline{G_i G_k^*} = V\{a E_{0i} E_{0k} + b E_0^2 \delta_{ik}\}. \quad (91.12)$$

Observemos, ante todo, que la dispersión de luz polarizada linealmente viene determinada únicamente por dos constantes independientes, no por tres. Para determinar I_1 e I_2 , proyectemos el vector \mathbf{E}_0 sobre las dos direcciones de polarización indicadas y, tomando las correspondientes componentes del tensor (91.12), obtendremos

$$I_1 \sim a \sin^2 \theta + b, \quad I_2 \sim b, \quad (91.13)$$

(con coeficientes de proporcionalidad iguales), donde θ es el ángulo formado por \mathbf{E}_0 y la dirección de dispersión \mathbf{k}' . Obsérvese que la intensidad de la componente de la luz dispersada cuyo campo eléctrico está polarizado perpendicularmente al plano \mathbf{E}_0 , \mathbf{k}' , no depende de la dirección de dispersión.

Cuando la luz natural atraviesa un medio, la luz dispersada estará polarizada parcialmente, y por razones de simetría es evidente que sus dos componentes incoherentes tendrán polarizaciones lineales con el campo eléctrico en el plano \mathbf{k} , \mathbf{k}' (plano de dispersión) y perpendicular al mismo. Designemos las intensidades de estas componentes por I_{\parallel} e I_{\perp} . Para determinarlas, promediaremos la expresión (91.11), además, respecto de todas las direcciones del vector \mathbf{E}_0 en un plano perpendicular a \mathbf{k} . Al efectuar este promedio los productos $E_{0i} E_{0k}^*$ dan

$$\overline{E_{0i} E_{0k}^*} = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_0|^2 (\delta_{ik} - n_i n_k) \quad (91.14)$$

(\mathbf{n} es el vector unitario correspondiente a \mathbf{k}); éste es un tensor de segundo orden que depende solamente de la dirección de \mathbf{k} , cuya contracción da $|\mathbf{E}_0|^2$ y que satisface la condición

$$n_i \overline{E_{0i} E_{0k}^*} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0) \overline{E_{0k}^*} = 0.$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 48. No estudiaremos aquí la luz polarizada elípticamente debido a la complejidad de las fórmulas que se obtienen.

De esta manera, en la dispersión de la luz natural tenemos

$$\overline{G_i G_k^*} = V |\mathbf{E}_0|^2 \left\{ \frac{1}{2} a (\delta_{ik} - n_i n_k) + b \delta_{ik} \right\}. \quad (91.15)$$

Finalmente, tomando las componentes de este tensor relativas a ambas direcciones de polarización, obtendremos las fórmulas buscadas:

$$I_{\parallel} \sim \frac{1}{2} a \cos^2 \vartheta + b, \quad I_{\perp} \sim \frac{1}{2} a + b, \quad (91.16)$$

donde ϑ es el ángulo de dispersión (ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{k}').

Volvamos a la fórmula (91.10) que liga las constantes escalares a , b , c con el tensor α_{ik} . Al igual que cualquier tensor de segundo orden, el tensor α_{ik} puede representarse, en el caso general, como suma de tres partes independientes:

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{3} \alpha \delta_{ik} + s_{ik} + a_{ik}, \quad (91.17)$$

donde $\alpha = \alpha_{ii}$ es un escalar, s_{ik} , un tensor simétrico de traza nula ($s_{ik} = s_{ki}$, $s_{ii} = 0$), y a_{ik} un tensor antisimétrico. Substituyamos esta expresión en (91.10) y contraigamos respecto de los diferentes pares de índices; como resultado obtendremos las siguientes tres ecuaciones*:

$$\left. \begin{aligned} 6a + 3b + 3c &= \int \overline{\alpha_{ii,1} \alpha_{kk,2}^*} dV = \int \overline{\alpha_1 \alpha_2^*} dV, \\ 3a + 9b &= \int \overline{\alpha_{ik,1} \alpha_{ik,2}^*} dV \\ &= \frac{1}{3} \int \overline{\alpha_1 \alpha_2^*} dV + \int \overline{s_{ik,1} s_{ik,2}^*} dV + \int \overline{a_{ik,1} a_{ik,2}^*} dV, \\ 6a + 3b - 3c &= \int \overline{\alpha_{ik,1} \alpha_{ki,2}^*} dV \\ &= \frac{1}{3} \int \overline{\alpha_1 \alpha_2^*} dV + \int \overline{s_{ik,1} s_{ik,2}^*} dV - \int \overline{a_{ik,1} a_{ik,2}^*} dV. \end{aligned} \right\} \quad (91.18)$$

Los segundos miembros de estas ecuaciones, y por consiguiente también sus soluciones respecto de a , b , c , no contendrán productos cruzados de las magnitudes α , s_{ik} , a_{ik} . Esto significa que cualquier proceso de dispersión puede representarse como superposición de tres procesos, de tres tipos de dispersión, que pueden llamarse, respectivamente, *escalar*, *simétrica* y *antisimétrica*. Consideremos cada uno de estos tipos por separado.

* Las integrales que aparecen en los segundos miembros de estas ecuaciones son cantidades positivas, puesto que cada una de ellas puede escribirse como cuadrado perfecto mediante una transformación que es la inversa de la que aplicamos al pasar de (91.8) a (91.9). Expresando estas tres integrales en función de a , b , c (es decir, resolviendo respecto de dichas integrales las ecuaciones (91.18)), podemos obtener para estas constantes determinadas desigualdades, que se escriben:

$$2a + b + c > 0, \quad 2b + c - a > 0, \quad 2b + a - c > 0.$$

En particular, de ellas se deduce que $b > 0$.

Conservando en los segundos miembros de las ecuaciones (91.18) sólo los primeros términos, se obtendrá

$$a = c = \frac{1}{9} \int \overline{\alpha_1 \alpha_2^*} dV, \quad b = 0. \quad (91.19)$$

Por las fórmulas (91.13) se ve que, en la dispersión escalar de la luz polarizada, la luz dispersada se encuentra también polarizada del todo y que la distribución angular de su intensidad viene dada por la fórmula

$$I = (3/2) \sin^2 \theta.$$

(Aquí y en lo que sigue, las expresiones para I están normalizadas de manera que su promedio respecto de las direcciones resulte igual a 1). En cambio, en la dispersión de la luz natural, la distribución angular de la intensidad total y el grado de depolarización de la luz dispersada vienen dados, según (91.16), por las fórmulas

$$I = I_{\perp} + I_{\parallel} = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta), \quad I_{\parallel}/I_{\perp} = \cos^2 \theta$$

(véase la fórmula en la nota de la pág. 356).

Para la dispersión simétrica, las ecuaciones (91.18) dan

$$a = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{5}c = \frac{1}{30} \int \overline{s_{ik,1} s_{ik,2}^*} dV. \quad (91.20)$$

En la dispersión de luz polarizada, tenemos

$$I = I_1 + I_2 = \frac{3}{2}(6 + \sin^2 \theta),$$

$$I_2/I_1 = 3/(3 + \sin^2 \theta),$$

y en la de la luz natural

$$I = \frac{3}{4}(14 - \sin^2 \theta),$$

$$I_{\parallel}/I_{\perp} = 1 - \frac{1}{7} \sin^2 \theta.$$

Finalmente, para la dispersión antisimétrica obtendremos

$$b = c = -a = \frac{1}{6} \int \overline{a_{ik,1} a_{ik,2}^*} dV; \quad (91.21)$$

en el caso de dispersión de luz polarizada,

$$I = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta), \quad I_1/I_2 = \cos^2 \theta,$$

y en el de la luz natural

$$I = \frac{3}{8}(2 + \sin^2 \theta), \quad I_{\perp}/I_{\parallel} = 1/(1 + \sin^2 \theta).$$

§ 92. El principio del equilibrio detallado en la dispersión

El principio general cuántico del equilibrio detallado* permite obtener determi-

* Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, § 141.

nada relación que liga entre sí las intensidades de los distintos procesos de dispersión.

Designemos por dw_{12} la probabilidad de que un cuanto $\hbar\omega_1$ experimente dispersión (por unidad de longitud) dando lugar a un cuanto $\hbar\omega_2$ que se propaga en un elemento de ángulo sólido do_2 . Designemos, en cambio, por dw_{21} la probabilidad del proceso inverso, que consiste en la dispersión del cuanto $\hbar\omega_2$ dando lugar al cuanto $\hbar\omega_1$ en el ángulo sólido do_1 . El principio del equilibrio detallado establece la siguiente relación entre estas dos probabilidades:

$$dw_{12}/k_2^2 do_2 = dw_{21}/k_1^2 do_1,$$

donde k_1, k_2 son los vectores de onda de dichos cuantos. Haciendo $k_1^2 = \epsilon_1 \omega_1^2 / c^2$, $k_2^2 = \epsilon_2 \omega_2^2 / c^2$ (donde $\epsilon_1 = \epsilon(\omega_1)$, $\epsilon_2 = \epsilon(\omega_2)$), obtendremos

$$\epsilon_1 \omega_1^2 dw_{12} / do_2 = \epsilon_2 \omega_2^2 dw_{21} / do_1. \quad (92.1)$$

En esta relación se supone que los estados inicial y final del sistema dispersor corresponden a niveles de energía discretos E_1 y E_2 , ligados entre sí por la igualdad

$$E_1 + \hbar\omega_1 = E_2 + \hbar\omega_2.$$

Este planteo de la cuestión no corresponde totalmente a la situación real de las cosas, puesto que el espectro de los niveles de energía de un cuerpo macroscópico es extraordinariamente denso y ha de considerarse como cuasicontinuo.

Por ello, en vez de la probabilidad de dispersión dw_{12} , con una variación rigurosamente determinada de la frecuencia, hay que introducir la probabilidad de dispersión en un intervalo de frecuencias $d\omega_2$, es decir, acompañada de una transición del cuerpo a un estado cuya energía se encuentra en el intervalo $dE_2 \doteq \hbar d\omega_2$. Designando esta probabilidad (de nuevo por 1 cm de camino) por dh_{12} , se tiene

$$dh_{12} = dw_{12} d\Gamma_2 = dw_{12} (d\Gamma_2 / dE_2) \hbar d\omega_2,$$

donde $d\Gamma_2$ es el número de estados cuánticos del cuerpo en el intervalo de energías dE_2 . En vez de (92.1) escribiremos ahora

$$\frac{d\Gamma_1}{dE_1} \epsilon_1 \omega_1^2 \frac{dh_{12}}{do_2 d\omega_2} = \frac{d\Gamma_2}{dE_2} \epsilon_2 \omega_2^2 \frac{dh_{21}}{do_1 d\omega_1}.$$

Pero según la conocida relación entre el peso estadístico de un estado macroscópico de un cuerpo y su entropía \mathcal{S} , la derivada $d\Gamma/dE$ coincide esencialmente con $\exp \mathcal{S}$, de donde la relación

$$(d\Gamma_1/dE_1) : (d\Gamma_2/dE_2) = \exp (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2).$$

Dado que la variación de energía del cuerpo como resultado de la dispersión de un cuanto es extraordinariamente pequeña comparada con la propia energía, relativamente pequeña será también la variación de entropía, la cual, por ello, puede hacerse igual a

$$\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 = (d\mathcal{S}/dE)(E_1 - E_2) = (E_1 - E_2)/T = \hbar(\omega_2 - \omega_1)/T.$$

Teniendo en cuenta esta circunstancia, escribiremos la expresión definitiva del principio del equilibrio detallado para la dispersión en la siguiente forma

$$e^{-\hbar\omega_1/T} \epsilon_1 \omega_1^2 \frac{dh_{12}}{d\omega_2 d\omega_2} = e^{-\hbar\omega_2/T} \epsilon_2 \omega_2^2 \frac{dh_{21}}{d\omega_1 d\omega_1}. \quad (92.2)$$

La magnitud dh (cuyas dimensiones son cm^{-1}) se llama *coeficiente diferencial de extinción* de la luz en la dispersión. Su definición puede formularse también de la siguiente manera: el coeficiente de extinción es la razón del número de cuantos dispersados (en las direcciones $d\omega$ y en el intervalo de frecuencias $d\omega$), por unidad de tiempo y por unidad de volumen del medio, a la densidad de flujo de fotones en la luz incidente. Integrando dh respecto de todas las direcciones y de todas las frecuencias de la luz dispersada, obtendremos el *coeficiente de extinción total*, que representa el índice de amortiguamiento de la densidad de flujo de fotones a medida que la onda se propaga por el medio dispersor.

Supongamos $\omega_2 < \omega_1$. La relación (92.2) liga entre sí las intensidades (los coeficientes de extinción) de las dispersiones de Stokes ($1 \rightarrow 2$) y de anti-Stokes ($2 \rightarrow 1$). Vemos así que la intensidad de esta última, en general, es menor que la de la primera aproximadamente en la razón dada por el factor

$$e^{-\hbar(\omega_1 - \omega_2)/T}.$$

Esta circunstancia tiene un carácter bastante general y corresponde al hecho de que la transferencia de energía del cuerpo al campo electromagnético reduce la probabilidad del proceso, disminuyéndola en la razón $e^{-\Delta E/T}$, donde ΔE es la energía cedida. En particular, por esta causa resulta de ordinario muy débil el efecto de emisión forzada en la que el cuerpo cede la energía $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ en un solo acto de dispersión. La probabilidad de este proceso cuando $\hbar(\omega_1 + \omega_2) \gg T$ contiene el pequeño factor

$$e^{-\hbar(\omega_1 + \omega_2)/T}.$$

La relación general (92.2) se simplifica considerablemente en el caso importante de dispersión con una variación de la frecuencia relativamente pequeña. Designaremos ω_1 simplemente por ω , y la pequeña diferencia $\omega_2 - \omega_1$, por $\Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega$). Además, introduzcamos, para abreviar, la notación

$$dh_{12}/d\omega_2 d\omega_2 = I(\omega, \Delta\omega).$$

En los factores no exponenciales $\epsilon\omega^2$ de (92.2) se puede prescindir de la diferencia $\Delta\omega$, con lo que aquéllos se reducen entre sí desapareciendo de ambos miembros de la igualdad, de forma que queda

$$I(\omega, \Delta\omega) e^{-\hbar\omega/T} = I(\omega + \Delta\omega, -\Delta\omega) e^{-\hbar(\omega + \Delta\omega)/T}.$$

En el primero de los argumentos de la función $I(\omega + \Delta\omega, -\Delta\omega)$, que indica la frecuencia inicial de la luz, puede prescindirse de $\Delta\omega$, es decir, referir la intensidad de la luz dispersada a un valor de la frecuencia de la onda incidente ligeramente des-

plazado. Entonces

$$I(\omega, \Delta\omega) = I(\omega, -\Delta\omega)e^{-\hbar\Delta\omega/T}. \quad (92.3)$$

En esta aproximación, I corresponde a la misma frecuencia de la luz incidente en ambos miembros de la igualdad. Dicho de otra manera, la relación (92.3) establece un simple ligamen entre las dispersiones de Stokes y anti-Stokes de una misma luz con los mismos valores absolutos del desplazamiento de la frecuencia.

§ 93. Dispersión con un pequeño cambio de la frecuencia

La teoría desarrollada en el § 91 posee una completa generalidad y es aplicable a todos los casos de dispersión en un medio isótropo, con independencia de sus mecanismos concretos. Sin embargo, es natural que con un grado tal de generalidad los cálculos no puedan llevarse muy lejos, y un estudio ulterior del fenómeno de la dispersión es únicamente posible bajo hipótesis más concretas.

En la mayoría de los casos observados, la dispersión de la luz va acompañada de un cambio relativamente pequeño de la frecuencia $\Delta\omega = \omega' - \omega$. Los cálculos que siguen a continuación se refieren precisamente a ellos; supondremos, además, que junto con la condición $\Delta\omega \ll \omega$, es relativamente pequeña la variación del coeficiente de refracción del medio en el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$. Esta última condición significa que la frecuencia ω no debe hallarse demasiado cerca de cualquier dominio (o raya) de absorción del medio dispersor.

Si ω corresponde a la región óptica del espectro, el mecanismo microscópico de la dispersión con $\Delta\omega$ pequeño puede estar vinculado con movimientos de los átomos y de las moléculas de un tipo distinto de los ordinarios (es decir, de un tipo en contraste con los movimientos puramente electrónicos responsables de las transiciones ópticas). Tales pueden ser las oscilaciones intermoleculares de los átomos, las rotaciones u oscilaciones de las moléculas como un todo, etc.

Convengamos en designar por $q = q(t)$ el conjunto de las coordenadas que describen el movimiento causa de la dispersión*. La relativa lentitud de este movimiento permite pasar a una descripción macroscópica de la dispersión desde un nuevo punto de vista. En efecto, cabe introducir el tensor permitividad $\epsilon_{ik}(q)$ cuyas componentes (en cada instante) dependen sólo de los valores de las coordenadas q en dicho instante como parámetros. Esta propiedad se sigue precisamente de la hipótesis que hemos hecho y según la cual la variación relativa de ϵ es pequeña. La permitividad así introducida corresponde al campo promediado respecto del movimiento de los electrones y para una posición dada de los núcleos. Para el campo totalmente promediado (incluido el movimiento de los núcleos) la permitividad se reduce a un

* Para simplificar, adoptamos en este estudio un punto de vista clásico; los resultados que se obtienen a continuación resultan, en realidad, ser válidos también cuando el movimiento de los núcleos se considera cuánticamente.

escalar $\epsilon = \epsilon(\omega)$. Designaremos por ϵ_{ik} las desviaciones de $\delta\epsilon_{ik}$ respecto de este valor:

$$\epsilon_{ik}(q) = \epsilon\delta_{ik} + \delta\epsilon_{ik}(q). \quad (93.1)$$

El tensor ϵ_{ik} determina la relación entre la intensidad y el desplazamiento del campo eléctrico como funciones del tiempo. Hay que subrayar que la onda incidente se supone, como antes, monocromática (de frecuencia ω), pero el campo \mathbf{E}' de la onda dispersada se considera ahora función del tiempo, no desarrollada en componentes monocromáticos. El campo total es el resultante del campo \mathbf{E} de la onda incidente y del campo \mathbf{E}' de la onda dispersada; de esta manera,

$$\mathbf{D}_i + \mathbf{D}'_i = \epsilon_{ik}(\mathbf{E}_k + \mathbf{E}'_k).$$

Por definición, los términos \mathbf{D} y $\epsilon\mathbf{E}$ se reducen entre sí y prescindiendo del término $\delta\epsilon_{ik}\mathbf{E}'_k$ como cantidad de segundo orden, obtendremos

$$\mathbf{D}'_i = \epsilon\mathbf{E}'_i + \delta\epsilon_{ik}(q)\mathbf{E}_k. \quad (93.2)$$

La relación (93.2) tiene la misma forma que la expresión (91.2). Sin embargo, hay una diferencia, puesto que, en virtud del método seguido para resolver el problema, está claro que ahora el tensor $\alpha_{ik} = \delta\epsilon_{ik}$ es simétrico. Esto se sigue directamente del teorema general acerca de la simetría del tensor de permitividad. Además, dado que esta magnitud es real en un medio transparente, cabe afirmar que también el tensor $\delta\epsilon_{ik}$ es real.

Que el tensor α_{ik} carezca de parte antisimétrica significa que, de los tres tipos de dispersión indicados al final del § 91, uno de ellos (el antisimétrico) no existe en la dispersión acompañada de una pequeña variación de la frecuencia.

Calculemos la intensidad total de la dispersión (con todos los desplazamientos de la frecuencia tales que $\Delta\omega \ll \omega$). En el caso considerado, el cálculo se hace fácilmente como sigue. En la ecuación (91.3) para el campo de la onda dispersada, se puede substituir k' por $k = \omega/\bar{c}$ (y también tomar para α su valor en $\omega' = \omega$), con lo cual dicha expresión no contendrá ω' , es decir, será la misma para todas las componentes espectrales del campo. Por ello, la misma ecuación será también válida para el campo de la onda dispersada no desarrollado en componentes de Fourier, campo que designaremos aquí por la misma letra \mathbf{E}' . Utilizando la solución de la ecuación en la forma (91.6), obtendremos

$$|\mathbf{E}'|^2 = \frac{k^4}{16\pi^2\epsilon^2 R_0^2} |\mathbf{G}|^2 \sin^2 \theta = \frac{\omega^4}{16\pi^2 R_0^2 c^4} |\mathbf{G}|^2 \sin^2 \theta,$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{G} , y el trazo horizontal, al igual que en el § 91, representa el promedio final respecto del movimiento de las partículas (es decir, el promedio según la dependencia temporal $q(t)$).

Introduzcamos el coeficiente de extinción h como razón de la intensidad total de la luz dispersada (en todas direcciones) a la densidad de flujo de la luz incidente,

referida a la unidad de volumen del medio dispersor*:

$$h = \frac{1}{V|\mathbf{E}|^2} \int |\mathbf{E}'|^2 R_0^2 d\sigma' = \frac{\omega^4}{6\pi c^4 V} \frac{|\overline{\mathbf{G}}|^2}{|\mathbf{E}|^2}.$$

Como vimos en el § 91, al calcular el valor medio $|\overline{\mathbf{G}}|^2$, el factor exponencial en el integrando de \mathbf{G} se puede substituir por la unidad, de modo que

$$|\overline{\mathbf{G}}|^2 = E_{0i} E_{0k}^* \int \delta\epsilon_{li} dV \int \delta\epsilon_{lk} dV.$$

La expresión que hay que promediar es un tensor de segundo orden, y dada la isotropía del medio se obtiene, una vez efectuado el promedio,

$$\int \delta\epsilon_{li} dV \int \delta\epsilon_{lk} dV = \frac{1}{3} \delta_{ik} \left(\int \delta\epsilon_{lm} dV \right)^2.$$

De esta manera resulta finalmente:

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4} \frac{1}{V} \left(\int \delta\epsilon_{lm} dV \right)^2, \quad (93.3)$$

o bien

$$h = (\omega^4/18\pi c^4) V (\overline{\delta\epsilon_{lm}})^2, \quad (93.4)$$

donde se ha introducido la notación $(\dots)_V$ para la magnitud promediada en el volumen V .

El valor medio del cuadrado de la integral puede escribirse también como valor medio de una integral doble, con lo que se explica (véase § 91) que resulte proporcional al volumen V . En consecuencia, el valor del coeficiente de extinción, como debía ser, es independiente del valor del volumen dispersor. Observemos también que el coeficiente h no depende de la polarización de la luz incidente.

La fórmula (93.4) puede considerarse desde el siguiente punto de vista. Formalmente cabe decir que en un medio todo él homogéneo (es decir, un medio cuya permitividad es rigurosamente constante) la dispersión es por completo imposible. La dispersión puede describirse macroscópicamente como resultado de las heterogeneidades del medio. Y es precisamente la variación de estas heterogeneidades con el tiempo (sometida a desarrollo espectral) lo que determina el cambio de frecuencia de la luz en la dispersión.

§ 94. Dispersión de Rayleigh en gases y líquidos

De acuerdo con el carácter de la variación de la frecuencia de la luz, se distinguen

* Esta definición difiere de la definición general dada en el § 92 (que se refiere a los cuantos dispersados) en el factor ω'/ω . En el presente caso este factor se puede considerar igual a 1 y ambas definiciones son equivalentes.

dos tipos de dispersión: 1) la *dispersión combinatoria* (efecto Raman-Landsberg-Mandel'shtam), que conduce a la aparición, en la luz dispersada, de rayas desplazadas (según su frecuencia) respecto de la luz que la excita, y 2) la *dispersión de Rayleigh*, que se produce sin que la frecuencia varíe esencialmente.

El mecanismo de la dispersión combinatoria en los gases consiste en una variación, bajo la influencia de la luz incidente, del estado de vibración, de rotación y electrónico de una molécula*. Por el contrario, la dispersión de Rayleigh no está ligada con cambio alguno del estado interno de la molécula. En el caso límite de un gas enrarecido (libre camino medio de las moléculas l grande comparado con la longitud de onda de la luz λ) la dispersión se produce independientemente en cada molécula; este fenómeno puede estudiarse de manera puramente microscópica aplicando la mecánica cuántica.

Aquí estudiaremos el caso opuesto, aquel en que $l \ll \lambda$ **. En este caso, la dispersión de Rayleigh en un gas puede dividirse en dos partes. Una de ellas está ligada con la irregularidad en la orientación de las moléculas (las llamadas *fluctuaciones de anisotropía*). La otra, en cambio, representa la dispersión por las fluctuaciones de densidad del gas. La orientación de una molécula cambia por completo como resultado de unas cuantas colisiones, es decir, al cabo de un tiempo τ que es del orden de magnitud del tiempo correspondiente al libre camino medio. Por ello, la dispersión por fluctuaciones de anisotropía conduce a la aparición de una raya relativamente difusa, con un máximo en $\omega' = \omega$ y de anchura $\sim \hbar/\tau$. Por el contrario, la dispersión por fluctuaciones de la densidad lleva a la aparición sobre este fondo de una raya considerablemente más definida. Como veremos a continuación, para la dispersión de la luz con longitud de onda λ son fundamentales las fluctuaciones de densidad que se producen en volúmenes del orden de λ^3 . Debido a que estos volúmenes resultan ser grandes, la variación de las fluctuaciones en ellos tiene lugar con relativa lentitud, a lo que se debe que la correspondiente raya de dispersión sea estrecha. Convendremos en calificar de «no desplazada» precisamente esta raya bien delimitada.

La dispersión por fluctuaciones de la densidad pertenece al tipo escalar (véase el final del § 91); es evidente que, en tanto la densidad ρ es una magnitud escalar, también lo será la variación de la permitividad $\delta\epsilon$ ligada con la variación de ρ . En cambio, la variación en la permitividad debida a las fluctuaciones de anisotropía se representa por un tensor simétrico $\delta\epsilon_{ik}$ de traza nula; esto último está claro por el hecho de que, al promediar respecto de todas las direcciones, este efecto debe desaparecer por completo. Así pues, la dispersión por fluctuaciones de anisotropía pertenece al tipo simétrico.

En el caso de los líquidos la situación es más complicada. La dispersión combi-

* En condiciones ordinarias de observación, las transiciones electrónicas no representan ningún papel.

** Más precisamente, la condición necesaria en lo que sigue se escribe: $l \ll \lambda \sin (1/2) \vartheta$, donde ϑ es el ángulo de dispersión. La razón de ello estriba en que en la expresión (94.4), que determina la intensidad de la dispersión, la frecuencia de la luz interviene solamente formando la combinación $q = (2\omega/c) \sin (1/2) \vartheta$.

natoria puede aquí estar ligada solamente con una variación del estado de oscilación (o electrónico) de las moléculas; en la dispersión por un líquido no se producen rayas combinatorias de rotación. Ello se debe a que, dada la intensa interacción de las moléculas en un líquido, no existe una rotación libre de las mismas que posea niveles discretos de energía. En consecuencia, la rotación de las moléculas, al igual que cualquier otro movimiento que vaya acompañado de una alteración de sus posiciones mutuas, contribuye en un líquido sólo a la raya de dispersión relativamente ancha en torno de $\omega' = \omega$ que, en este caso, es del todo natural considerar como una raya de Rayleigh. El tiempo de relajación de esos movimientos está fundamentalmente ligado con la viscosidad del líquido.

La posibilidad de separar de la dispersión de Rayleigh total en un líquido una parte vinculada con fluctuaciones termodinámicas (de densidad o de temperatura), depende del valor de los diferentes tiempos de relajación. Es necesario que los tiempos de relajación de todos los procesos de establecimiento del equilibrio en el líquido sean pequeños comparados con el tiempo de variación de las fluctuaciones indicadas. En tales condiciones, se observará una estrecha raya «no desplazada» rodeada de un fondo más difuso. La dispersión que corresponde a la raya no desplazada es escalar. En lo que concierne al fondo, a diferencia de los gases, es imposible, en general, afirmar que es puramente simétrico, sin «adición» de una parte escalar.

La intensidad total de la raya no desplazada puede calcularse fácilmente mediante la fórmula general (93.4). En la dispersión escalar $\delta\epsilon_{ik} = \delta\epsilon\delta_{ik}$, y, por consiguiente, el coeficiente de extinción es

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} V \overline{(\delta\epsilon)^2}. \quad (94.1)$$

Si $\delta\rho$ y δT son las variaciones de densidad y de temperatura, se tendrá

$$\delta\epsilon = (\partial\epsilon/\partial\rho)_T \delta\rho + (\partial\epsilon/\partial T)_\rho \delta T.$$

Según fórmulas conocidas*, las fluctuaciones de densidad y temperatura son estadísticamente independientes ($\overline{\delta T \delta\rho} = 0$), y los cuadrados medios de cada una de ellas valen

$$\overline{(\delta T)^2} = T^2/\rho c_v V, \quad \overline{(\delta\rho)^2} = (T\rho/V)(\partial\rho/\partial p)_T$$

(c_v es la capacidad calorífica por unidad de masa del medio). De esta manera tenemos finalmente

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left[T\rho \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_T^2 + \frac{T^2}{\rho c_v} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right)_\rho^2 \right]. \quad (94.2)$$

Einstein fue el primero en obtener esta fórmula (1910).

Para los gases la fórmula (94.2) se simplifica considerablemente. La permitividad de un gas (en la región óptica de frecuencias) resulta casi independiente de la tem-

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 114.

peratura; por ello, puede prescindirse del segundo término entre corchetes. En cuanto a la dependencia respecto de la densidad, queda reducida a la mera proporcionalidad entre $\epsilon - 1$ y ρ ; en consecuencia,

$$\rho(\partial\epsilon/\partial\rho)_T \approx \epsilon - 1 \approx 2(n - 1),$$

($n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción). Teniendo en cuenta también que, según la ecuación de estado de un gas perfecto, es $(1/\rho)(\partial\rho/\partial p)_T = 1/NT$ (N es el número de partículas por 1 cm^3), se obtendrá

$$h = 2\omega^4(n - 1)^2/3\pi c^4 N. \quad (94.3)$$

Esta fórmula fue ya obtenida por Rayleigh, (1881).

Pasemos ahora a la cuestión de la estructura fina de la raya «no desplazada». Para ello hay que considerar el comportamiento temporal de las fluctuaciones. Como es sabido, en relación con el mismo las fluctuaciones termodinámicas se dividen en dos categorías*. Las fluctuaciones adiabáticas de la presión en un líquido (o en un gas) se propagan como ondas no amortiguadas cuya velocidad es la del sonido u (prescindimos aquí de la absorción del sonido, puesto que ésta conduce solamente a un pequeño ensanchamiento de la raya; véase más adelante). En cambio, las fluctuaciones de la entropía a presión constante no se propagan respecto de un líquido (amortiguándose tan sólo lentamente debido a la conductibilidad calorífica).

La dependencia de la intensidad respecto del tiempo (no promediada respecto del mismo) viene dada por el cuadrado del módulo de la integral

$$\mathbf{G}(t) = \int \delta\epsilon(t) \cdot \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \cdot \mathbf{E}_0, \quad (94.4)$$

en la que $\delta\epsilon$ se considera función del tiempo. Para determinar la forma de la raya de dispersión, hay que efectuar el desarrollo espectral de $\mathbf{G}(t)$ (lo que se reduce a desarrollar la magnitud $\delta\epsilon(t)$), obteniéndose luego la distribución de la intensidad según las frecuencias $\Delta\omega$ a partir del cuadrado del módulo de la componente espectral $\mathbf{G}_{\Delta\omega}$. Sin embargo, es imposible ahora substituir en (94.4) el factor $e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$ por la unidad, como venimos haciendo hasta aquí. Ello se debe a que la magnitud $|\mathbf{G}_{\Delta\omega}|^2$ depende fundamentalmente de la correlación del comportamiento temporal de las fluctuaciones en puntos diferentes del espacio; que así es, se ve fácilmente considerando la expresión $|\mathbf{G}_{\Delta\omega}|^2$, escrita como integral doble

$$\int \int \delta\epsilon(t) \delta\epsilon(t') \exp[-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \exp[i\Delta\omega(t - t')] dV dV' dt dt'.$$

A causa del carácter ondulatorio de la propagación de las perturbaciones acústicas, el comportamiento temporal de las fluctuaciones de la presión se encuentra en correlación incluso a grandes distancias. Este hecho carecía de importancia en el cálculo de la intensidad total de la raya, que se determinaba promediando el cuadrado $|\mathbf{G}(t)|^2$ respecto del tiempo; dado que $\mathbf{G}(t)$ y $\mathbf{G}^*(t)$ se toman aquí en un mismo ins-

* Véase vol. VI *Hidrodinámica*, § 79.

tante, para esta magnitud es importante sólo la correlación entre los valores de $\delta\epsilon$ en puntos diferentes del espacio para un mismo instante, y esta correlación se extiende únicamente a cortas distancias.

Consideremos primero las variaciones $\delta\epsilon$ vinculadas con las fluctuaciones de la presión. La magnitud (94.4) es la componente del desarrollo espacial de Fourier de la fluctuación $\delta\epsilon$ con vector de onda \mathbf{q} . Pero esta fluctuación acústica depende del tiempo según la ley $e^{-i\omega\Delta\omega}$, donde

$$\Delta\omega = \pm q u.$$

Dado que $\omega \approx \omega'$, se tiene

$$q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = (2\omega/c) \sin \frac{1}{2}\vartheta$$

(ϑ es el ángulo formado por \mathbf{k}' y \mathbf{k}); designando el correspondiente valor de $\Delta\omega$ por $\Delta\omega_0$, tenemos, en consecuencia,

$$\Delta\omega_0 = qu = \pm (2\omega u/c) \sin \frac{1}{2}\vartheta. \quad (94.5)$$

Así pues, la dispersión por fluctuaciones de la presión conduce a que aparezca un doblete, con una distancia entre componentes $2\Delta\omega_0$ que depende del ángulo de dispersión (éste es el llamado *doblete de Mandel'shtam-Brillouin*).

Las fluctuaciones de la entropía, en cambio, de acuerdo con lo dicho antes tienen frecuencia nula. Por ello, la dispersión debida a ellas conduce a que aparezca una raya central con $\Delta\omega = 0$.

Determinemos las intensidades de las rayas del doblete y de la raya central. La intensidad total de la raya no desplazada se determina por la fórmula (94.2), de modo que basta calcular, por ejemplo, la razón $I_{\text{doblete}}/I_{\text{total}}$ (entenderemos por I_{doblete} la suma de las intensidades de ambas componentes del doblete, es decir, el doble de la intensidad de cada una de ellas*). Puesto que las rayas del doblete están determinadas por la dispersión debida a fluctuaciones adiabáticas de la presión, su intensidad viene dada por el valor medio del cuadrado

$$(\partial\epsilon/\partial p)_s^2 \overline{(\delta p)^2} v^2.$$

Utilizando la conocida fórmula para las fluctuaciones adiabáticas de la presión y aplicando una simple transformación basada en la fórmula que da la razón de la compresibilidad adiabática a la isotérmica, obtendremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\right)_s^2 \overline{(\delta p)^2} v^2 &= \frac{\rho T}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\right)_s^2 \\ &= \frac{\rho T}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial \rho}\right)_s^2 \\ &= \frac{\rho T c_v}{V c_p} \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial \rho}\right)_s^2. \end{aligned} \quad (94.6)$$

* Según la fórmula (92.3), la diferencia entre las intensidades de ambas componentes carece por completo de importancia en general, ya que $\hbar\Delta\omega_0 \ll T$.

La derivada adiabática $(\partial\epsilon/\partial\rho)_S$ puede expresarse en función de magnitudes más convenientes refiriéndola a las variables ρ , T :

$$(\partial\epsilon/\partial\rho)_S = (\partial\epsilon/\partial\rho)_T + (T/c_v\rho^2)(\partial p/\partial T)_\rho(\partial\epsilon/\partial T)_\rho.$$

La razón de intensidades buscada es igual a la razón de la cantidad (94.6) al valor cuadrático medio de la fluctuación total (la expresión entre corchetes en (94.2)). No escribiremos aquí la engorrosa fórmula general, limitándonos a dar una fórmula simple que se obtiene prescindiendo de la dependencia de ϵ respecto de la temperatura:

$$h_{\text{doblete}}/h_{\text{total}} = c_v/c_p \quad (94.7)$$

(L. Landau y G. Placzek, 1933).

Para determinar la forma de la raya, hay que considerar los procesos disipativos que conducen al «decaimiento» de las fluctuaciones. Como resultado de estos procesos, la amplitud de la fluctuación se amortigua con el tiempo según la ley $e^{-\gamma t}$, con un determinado coeficiente γ . Si la «frecuencia propia» de las oscilaciones en la fluctuación es $\Delta\omega_0$, la dependencia general respecto del tiempo viene dada por el factor $e^{-i(\Delta\omega_0 + \gamma)t}$. La distribución de la intensidad en la raya es proporcional a los cuadrados de los módulos de las componentes de Fourier de este factor, es decir,

$$dI = \frac{I_0}{\pi} \frac{\gamma}{(\Delta\omega - \Delta\omega_0)^2 + \gamma^2} d\Delta\omega, \quad (94.8)$$

donde I_0 es la intensidad total de la raya (su forma es la llamada *forma de dispersión*). La «anchura» de la raya viene dada por la cantidad γ .

Según fórmulas conocidas para la absorción del sonido*, el coeficiente de amortiguamiento de las fluctuaciones acústicas con vector de onda \mathbf{q} es

$$\gamma = \frac{q^2}{2\rho} \left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right],$$

donde η , ζ son los coeficientes de viscosidad del líquido, y κ , su coeficiente de conductibilidad calorífica. Substituyendo $q^2 = 2(\omega/c)^2(1 - \cos \vartheta)$, obtendremos para la anchura de las componentes del doblete la siguiente expresión:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{\rho c^2} (1 - \cos \vartheta) \left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (94.9)$$

En cuanto al amortiguamiento de las fluctuaciones isobáricas de la entropía (y con ellas también de la temperatura), éste se determina por la ecuación de transmisión del calor

$$\partial T / \partial t = \chi \Delta T$$

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 77.

(χ es el coeficiente de conductibilidad termométrica del medio). Para las fluctuaciones con vector de onda \mathbf{q} (es decir, con una dependencia espacial $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$), de aquí se sigue

$$\gamma = \chi q^2 = 2\chi(\omega^2/c^2)(1 - \cos \vartheta). \quad (94.10)$$

La forma de la raya central viene dada por la fórmula (94.8) con $\Delta\omega_0 = 0$ y la anchura γ de (94.10).

Conforme se indicó ya al principio de este párrafo, la teoría expuesta aquí es aplicable a la dispersión en un líquido cuando se cumple la condición de que todos los tiempos de relajación en él son pequeños comparados con el tiempo de variación de las fluctuaciones. No hay que perder de vista que en cualquier líquido se encuentran tiempos de relajación de diferentes órdenes de magnitud. El proceso de relajación más rápido es, al parecer, el «decaimiento» de las tensiones elásticas en un líquido. El correspondiente tiempo de relajación (*tiempo de relajación maxwelliano*) es $\tau_M \sim \eta/G$, donde G es el módulo de rigidez*. Con mayor lentitud tiene lugar la redistribución de las moléculas según sus orientaciones, es decir, el «decaimiento» de las fluctuaciones anisótropas. El correspondiente tiempo de relajación (*tiempo de relajación de Debye*) es $\tau_D \sim \eta a^3/kT$, donde a caracteriza el tamaño de la molécula. La diferencia entre τ_M y τ_D resulta particularmente grande en los líquidos con moléculas de gran tamaño. Finalmente, son también posibles otros varios tipos de procesos de relajación lentos que conducen a la dispersión del sonido (por ejemplo, las reacciones químicas, la transferencia retardada de energía a los grados de libertad vibratorios de la molécula, etc.). Son fundamentales para la dispersión aquellos procesos para los que $1/\tau$ es comparable con la frecuencia de las excitaciones «acústicas» que conducen a dispersión. En la actualidad no existe en la literatura una lista completa de todos los casos que son aquí posibles, y no nos detendremos a considerar esta cuestión. Se indicará solamente que, para una viscosidad suficientemente grande del líquido, cuando

$$\tau_M \gg 1/qu \sim c/\omega u \sin \frac{1}{2}\vartheta,$$

éste se comporta respecto de la dispersión de la luz como un cuerpo sólido amorfo.

Recordaremos, para terminar, un singular fenómeno de dispersión que se produce en la superficie libre de un líquido. Como resultado de las oscilaciones por fluctuación, la superficie de un líquido no es un plano perfecto. La existencia de esta «rugosidad» por fluctuación de dicha superficie conduce a una dispersión parcial de la luz reflejada por la misma (*L. I. Mandel'shtam*, 1913)*.

* Véase vol. VII, *Teoría de la elasticidad*, § 36.

** Véase *L. I. Mandel'shtam*, *Annalen der Physik* **41**, 609, 1913. En este trabajo se desarrolla el cálculo para la luz dispersada en el plano de incidencia.

PROBLEMA

La luz se dispersa en un gas constituido por moléculas de forma lineal con polarizabilidades $\alpha_{||}$ y α_{\perp} en direcciones paralela y transversal al eje, respectivamente. Determinar las intensidades de los diferentes tipos de dispersión.

Solución. La intensidad de dispersión total (para estados de vibración y electrónicos dados de las moléculas) incluye las partes de Rayleigh y de rotación de la dispersión combinatoria. Dado que la dispersión tiene lugar independientemente en cada una de las moléculas del gas, la manera más fácil de obtener el coeficiente de extinción total se basa en la fórmula (72.3), multiplicándola por el número N de partículas por 1 cm^3 y substituyendo el cuadrado de la polarizabilidad de las partículas por $(\frac{1}{3})\alpha_{ik}^2 = (\frac{1}{3})(\alpha_{||}^2 + 2\alpha_{\perp}^2)$:

$$h = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} (\alpha_{||}^2 + 2\alpha_{\perp}^2). \quad (1)$$

La raya de Rayleigh no desplazada está ligada con la parte escalar de la polarizabilidad, es decir, se produce como si el tensor de polarizabilidad de la molécula fuese igual a $(\frac{1}{3})\alpha_{ii}\delta_{ik}$. Según la misma fórmula (72.3), encontramos por ello

$$h_{\text{no-desp}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{27c^4} (\alpha_{||} + 2\alpha_{\perp})^2. \quad (2)$$

La diferencia $h_{\text{tot}} - h_{\text{no-desp}}$ contiene el «fondo» de la raya no desplazada (dispersión por las «fluctuaciones anisótropas») y la dispersión combinatoria de rotación. Para separar la primera, hay que determinar previamente el valor medio del tensor de polarizabilidad de la molécula respecto de su rotación en torno de un determinado eje (perpendicular al eje de la misma). Es evidente que la polarizabilidad promediada de esta manera a lo largo del eje de rotación coincide con α_{\perp} , mientras que a lo largo de una dirección cualquiera en un plano perpendicular a dicho eje es igual a $(\frac{1}{2})(\alpha_{\perp} + \alpha_{||})$. En otras palabras, hay que considerar una molécula que gira en torno de un eje dado como una partícula con valores principales del tensor de polarizabilidad iguales a

$$[\alpha_{\perp}, \frac{1}{2}(\alpha_{\perp} + \alpha_{||}), \frac{1}{2}(\alpha_{\perp} + \alpha_{||})].$$

Mediante éstos hay que calcular el tensor simétrico $\alpha_{ik} - (\frac{1}{3})\alpha_{ii}\delta_{ik}$ con traza igual a cero y, luego, un cálculo análogo al que condujo a las fórmulas (1) y (2) da

$$h_{\text{fondo}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} \frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{||})^2}{6}. \quad (3)$$

Finalmente, la intensidad de la dispersión combinatoria de rotación se obtiene restando (2) y (3) de (1):

$$h_{\text{combin}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} \frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{||})^2}{2}.$$

§ 95. Opalescencia crítica

Como es sabido, la compresibilidad isotérmica de una substancia $(\partial\rho/\partial p)_T$ crece sin límites al acercarse al estado crítico. Junto con ella crece también la expresión (94.2) para la intensidad total de la dispersión de Rayleigh escalar. Esto pone de relieve un brusco aumento de la intensidad de la dispersión cerca del punto crítico (la llamada *opalescencia crítica*)*. Sin embargo, la propia fórmula (94.2) deja en-

* Un fenómeno similar se produce en la dispersión por un sólido cerca del punto crítico de un cambio de fase de segunda especie. Ha sido estudiado por V. L. Ginzburg DAN SSSR 105, 240, 1955.

tonces de ser aplicable debido a que pasan a ser incorrectas las expresiones para las fluctuaciones termodinámicas que se utilizaron al deducirla.

El crecimiento de la intensidad no se produce en las tres componentes de estructura fina de la raya de Rayleigh, sino solamente para la componente central. En lo que concierne a la intensidad del doblete, según (94.2) y (94.7) tenemos

$$h_{\text{doblete}} \cong \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{T \rho c_v}{c_p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T.$$

Según la conocida fórmula termodinámica

$$c_p - c_v = \frac{T}{\rho^2} \frac{(\partial p / \partial T)_\rho^2}{(\partial p / \partial \rho)_T}$$

se encuentra cerca del punto crítico una cantidad finita

$$h_{\text{doblete}} = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{\rho^3 c_v}{(\partial p / \partial T)_\rho^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T. \quad (95.1)$$

Como veremos más adelante, en las proximidades del punto crítico es imposible substituir en (94.4) el factor $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ por la unidad, ni aún en el cálculo de la intensidad total de dispersión. Sea dh el coeficiente diferencial de extinción relativo a la dispersión en el ángulo sólido dado $d\Omega$ (al que corresponde un valor $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ dado). Limitándonos, para concretar, a la dispersión de la luz natural y recordando que su dependencia angular (en la dispersión escalar) viene dada por el factor $(\frac{3}{4})(1 + \cos^2 \vartheta)$, tenemos para dh :

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{1}{V} \left| \int \delta \epsilon \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 \cdot \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \vartheta) \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (95.2)$$

Cerca del punto crítico, las fluctuaciones de la densidad crecen, mientras que las de la temperatura se conservan finitas. Por ello, basta considerar la fluctuación $\delta \epsilon = (\partial \epsilon / \partial \rho)_T \delta \rho$, de modo que

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 \frac{1}{V} \left| \int \delta \rho \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 \cdot \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \vartheta) \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (95.3)$$

Según una conocida teoría, el cuadrado medio de las fluctuaciones de la densidad cerca del punto crítico se puede expresar en función de los coeficientes a y b en la fórmula

$$F - \bar{F} = \frac{1}{2} a (\delta \rho)^2 + \frac{1}{2} b (\text{grad } \delta \rho)^2, \quad (95.4)$$

donde F es la energía libre por unidad de volumen del cuerpo*.

Esta fórmula representa los primeros términos del desarrollo de la variación

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 119.

de la energía libre en potencias de la propia $\delta\rho$ y de su gradiente; la necesidad de tener en cuenta este último se debe al aumento de las heterogeneidades locales en el cuerpo cerca del punto crítico. La constante a se expresa en función de las magnitudes termodinámicas habituales según la fórmula*.

$$a = (1/\rho)(\partial p/\partial\rho)_T. \quad (95.5)$$

El valor medio del cuadrado que aparece en (95.3) se expresa en función de a y b por la igualdad

$$\left| \int \delta\rho \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 = VT/(a + bq^2). \quad (95.6)$$

Substituyendo en (95.3), obtendremos el siguiente resultado final

$$dh = \frac{\omega^4}{32\pi^2 c^4} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T + 2 \frac{\omega^2}{c^2} b (1 - \cos \vartheta)} d\vartheta. \quad (95.7)$$

(L. S. Ornstein y F. Zernike fueron los primeros en obtener una fórmula de este tipo en 1914). Para ángulos ϑ no excesivamente pequeños se puede prescindir del primer término en el denominador y entonces

$$dh = \frac{\omega^2}{64\pi^2 c^2 b} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} d\vartheta. \quad (95.8)$$

La intensidad total de dispersión en todas direcciones se obtiene por integración de (95.7) respecto de $d\vartheta$. Cuando $(\partial p/\partial\rho)_T = 0$ (es decir, en el propio punto crítico) la integral diverge logarítmicamente para ángulos pequeños. En realidad, la integración debería efectuarse solamente hasta ángulos que son del orden de magnitud del ángulo de difracción ($\sim \lambda/L$, donde L caracteriza el tamaño del cuerpo). En definitiva, la intensidad total dependerá logarítmicamente de las dimensiones del cuerpo dispersor.

§ 96. Dispersión en cuerpos sólidos amorfos

La dispersión de Rayleigh en cuerpos sólidos amorfos difiere esencialmente de la dispersión en los líquidos y gases. En un cuerpo sólido isótropo se tienen, como es sabido, no una, sino dos velocidades de propagación del sonido, la longitudinal u_l y la transversal u_t . Debido a ello, la estructura fina de la raya de Rayleigh contiene no un doblete de Mandel'shtam-Brillouin, sino dos. Éstos están ligados con la dispersión por «ondas acústicas» transversales y longitudinales y distan del centro de la raya valores $\pm \Delta\omega_t$ y $\pm \Delta\omega_l$, respectivamente, donde

$$\Delta\omega_l = qu_l, \quad \Delta\omega_t = qu_t.$$

* La derivada $(\partial F/\partial\rho)_T$ es el potencial termodinámico de la unidad de masa del cuerpo. En consecuencia, la segunda derivada es $a = (\partial^2 F/\partial\rho^2)_T = (\partial \Phi/\partial\rho)_T = (1/\rho)(\partial p/\partial\rho)_T$

Dado que siempre es $u_l > u_t$, se tendrá $\Delta\omega_l > \Delta\omega_t$. En cambio, la componente central de la raya está vinculada, como antes, a la dispersión por aquellas fluctuaciones que no se propagan respecto del medio. Entre éstas representan un papel fundamental, en el presente caso, las fluctuaciones de estructura. En un cuerpo amorfo, con su distribución desordenada de los átomos, estas últimas fluctuaciones son relativamente grandes y prácticamente no cambian con el tiempo (dada la extraordinaria lentitud de los procesos de difusión en un cuerpo sólido). La dispersión que determinan conduce a la aparición de una intensa raya cuya anchura es prácticamente nula. Por su polarización y por su distribución angular, esta dispersión representa una superposición de los tipos escalar y simétrico.

Consideremos las componentes de doblete de la raya de Rayleigh en los cuerpos amorfos. A diferencia de lo que ocurría en los líquidos y los gases, aquí es imposible suponer $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = 1$ en la integral \mathbf{G} , ni aún en el caso de la intensidad total (y de la polarización) de la luz dispersada; al mismo tiempo, desaparece también la clasificación de los tipos de dispersión según su dependencia angular que presentamos en el § 91. Ello se debe a que, en un cuerpo sólido, la influencia de cualquier deformación (en el presente caso, de una fluctuación) se propaga a distancias considerables. Por ello, las fluctuaciones en los diferentes puntos del cuerpo (en el mismo instante) se encuentran en correlación incluso a distancias grandes (comparadas con $1/q$).

El campo de la onda luminosa dispersada viene dado por la fórmula

$$\mathbf{E}' = -\frac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \mathbf{n}' \times (\mathbf{n}' \times \mathbf{G}), \quad (96.1)$$

donde

$$G_i = \int \delta\epsilon_{ik} \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) dV \cdot E_{0k}, \quad (96.2)$$

y \mathbf{n}' es el vector unitario en la dirección de dispersión. La variación de la permitividad debida a la deformación de un cuerpo isótropo se obtiene por la fórmula

$$\delta\epsilon_{ik} = a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll} \delta_{ik}, \quad (96.3)$$

donde u_{ik} es el tensor deformación (véase (81.1)). Dado que la integral (96.2) separa de $\delta\epsilon_{ik}$ la componente espacial de Fourier con vector de onda \mathbf{q} , también en (96.3) hay que entender por u_{ik} la deformación en la onda acústica con este vector de onda. Por esta razón, escribimos el vector desplazamiento en la forma

$$\mathbf{u} = \text{Re}\{\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\} = \frac{1}{2}[\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^* \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})], \quad (96.4)$$

de donde resulta el tensor deformación

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \text{Re}\left\{ \frac{1}{2} i (u_{0i} q_k + u_{0k} q_i) \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \right\}, \end{aligned}$$

y la integral de volumen es

$$\int u_{ik} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV = \frac{1}{4} iV(u_{0i}q_k + u_{0k}q_i). \quad (96.5)$$

Consideremos primero la dispersión por ondas «acústicas» transversales. Dado que en una onda transversal se tiene $\mathbf{u} \perp \mathbf{q}$ y $u_{il} = 0$, será

$$\delta\epsilon_{ik} = a_1 u_{ik}.$$

Aplicando (96.5), se encuentra, en consecuencia,

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} iV a_1 \{ \mathbf{u}_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_0) + \mathbf{q}(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E}_0) \}. \quad (96.6)$$

En una onda acústica transversal son posibles dos direcciones independientes de polarización: el vector \mathbf{u} puede encontrarse en el plano \mathbf{k} , \mathbf{k}' o ser perpendicular al mismo. Teniendo también en cuenta que $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, es fácil ver que, en el primer caso, la proyección de \mathbf{G} sobre un plano perpendicular a \mathbf{k}' es igual a cero. Así pues, las ondas acústicas y transversales, «polarizadas» en el plano \mathbf{k} , \mathbf{k}' , no dispersan la luz.

Pero si el vector desplazamiento \mathbf{u} es perpendicular al plano \mathbf{k} , \mathbf{k}' , un cálculo fácil con ayuda de (96.1) y (96.6) da para el campo de la onda dispersada las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= \frac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \frac{1}{4} a_1 iV q u_0 \cos \frac{1}{2} \vartheta \cdot E_{\perp}, \\ E'_{\perp} &= \frac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \frac{1}{4} a_1 iV q u_0 \cos \frac{1}{2} \vartheta \cdot E_{\parallel} \end{aligned} \quad (96.7)$$

(ϑ , como siempre, es el ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{k}' y los índices \parallel y \perp designan las componentes de los vectores en el plano de dispersión y en el perpendicular al mismo). Los coeficientes de proporcionalidad en estas dos fórmulas contienen la misma magnitud que fluctúa u_0 . Esto significa que en la dispersión no se produce despolarización, es decir, que la luz polarizada linealmente se conserva linealmente polarizada (si bien en otro plano).

Dado que los coeficientes en las fórmulas (96.7) coinciden completamente, el coeficiente de extinción dh no depende del estado de polarización de la luz incidente y es igual a

$$dh = \left(\frac{q\omega^2 a_1}{16\pi c^2} \right)^2 V \overline{|u_0|^2} \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta \, d\Omega. \quad (96.8)$$

Falta determinar el valor medio del cuadrado de la amplitud del desplazamiento por fluctuación u_0 .

Desde el punto de vista de la teoría general de las fluctuaciones termodinámicas, se puede considerar la onda acústica (96.4) como conjunto de dos osciladores clásicos (ondas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda), cada uno de los cuales ha de tener una energía cinética media $T/2$. Dado que, en este caso, la fre-

cuencia de las oscilaciones es $\Delta\omega = u_t q$, la energía cinética media vale

$$\frac{1}{2} V \rho \bar{\mathbf{u}}^2 = \frac{1}{4} V \rho (u_t q)^2 \overline{|u_0|^2}.$$

Igualando esta expresión a $2 \cdot T/2$, obtendremos

$$\overline{|u_0|^2} = 4T/V\rho u_t^2 q^2. \quad (96.9)$$

Finalmente, substituyendo (96.9) en (96.8), se obtendrá en definitiva:

$$dh = \frac{a_1^2 \omega^4 T}{64\pi^2 c^4 u_t^2 \rho} \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta \, d\vartheta. \quad (96.10)$$

Obsérvese el singular carácter de la dependencia angular de la dispersión, distinto por completo de la que encontramos en los líquidos y en los gases.

Pasemos a la dispersión por ondas «acústicas» longitudinales. En estas ondas es $\mathbf{u} \parallel \mathbf{q}$ y mediante (96.3) y (96.4) hallamos que

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} i V u_0 q \left\{ a_1 \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_0)}{q^2} + a_2 \mathbf{E}_0 \right\}.$$

Un cálculo fácil da para el campo de la onda dispersada:

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \frac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \frac{1}{2} i V u_0 q a_2 E_{\perp}, \\ E_{\parallel} &= \frac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \frac{1}{2} i V u_0 q \left[\frac{1}{2} a_1 + (\frac{1}{2} a_1 + a_2) \cos \vartheta \right] E_{\parallel}. \end{aligned} \quad (96.11)$$

También en este caso no hay despolarización en la dispersión. Sin embargo, la distribución angular y el valor del coeficiente de extinción, dependen del estado y de la dirección de polarización de la luz incidente. No nos detendremos en reproducir aquí las correspondientes fórmulas, que son bastante largas y complejas; los cálculos son exactamente análogos a los que se han efectuado anteriormente, difiriendo la expresión para $\overline{|u_0|^2}$ únicamente en la substitución de u_t por u_l en (96.9).

CAPÍTULO XV

DIFRACCIÓN DE LOS RAYOS X EN LOS CRISTALES

§ 97. Teoría general de la difracción de los rayos X

El fenómeno de la difracción de los rayos X en los cristales ocupa un puesto especial en la electrodinámica de los medios materiales, puesto que sus longitudes de onda son comparables con las distancias interatómicas. Por esta causa, el tratamiento macroscópico ordinario de la materia como medio continuo es aquí por completo inaplicable y hay que partir de un estudio de la dispersión por partículas cargadas individuales (por electrones)*.

Las frecuencias del movimiento de los electrones en un átomo es del orden de magnitud de $\omega_0 \sim v/a$, donde v es su velocidad y a caracteriza el tamaño de los átomos. Si $\lambda \sim a$, dado que $v \ll c$ estas frecuencias son pequeñas comparadas con las frecuencias de los rayos X, $\omega \sim c/\lambda$. Esta circunstancia permite escribir la ecuación del movimiento de un electrón en el campo de una onda electromagnética en la forma

$$m\dot{\mathbf{v}}' = e\mathbf{E}, \quad (97.1)$$

es decir, considerar los electrones como libres (véase § 59).

De la ecuación (97.1) resulta para la velocidad que adquiere el electrón bajo la influencia del campo de la onda:

$$\mathbf{v}' = ie\mathbf{E}/m\omega.$$

Designemos por $n(x, y, z)$ la densidad del número de electrones en el cristal, promediada respecto del estado cuántico electrónico y de la distribución estadística del movimiento térmico de los núcleos en la red. Subrayaremos, sin embargo, que aquí no se efectúa el promedio habitual en la teoría macroscópica respecto de elementos de volumen infinitesimales, es decir, $n(x, y, z)$ es la verdadera densidad cuántica de la «nube electrónica» en la red cristalina. La correspondiente densidad de corriente creada por el campo de la onda es

$$\mathbf{j}' = en\mathbf{v}' = ie^2n\mathbf{E}/m\omega. \quad (97.2)$$

* La dispersión por los núcleos, naturalmente, es insignificante debido a la gran masa de los mismos.

Introduzcamos esta corriente en las ecuaciones microscópicas de Maxwell:

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mathbf{H}/c, \quad (97.3)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega\mathbf{E}/c + 4\pi\mathbf{j}'/c \\ &= -\frac{i\omega}{c}\left(1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\right)\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (97.4)$$

Con esto tenemos en cuenta su acción recíproca sobre el campo, es decir, el efecto de dispersión. Se supone, claro está, que este efecto es pequeño, es decir, que es válida la desigualdad

$$4\pi e^2 n/m\omega^2 \ll 1. \quad (97.5)$$

Introduciendo la notación $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, donde

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}, \quad (97.6)$$

que corresponde a la definición ordinaria del desplazamiento eléctrico, la ecuación (97.4) se lleva a la forma usual $\text{rot } \mathbf{H} = -(i\omega/c)\mathbf{D}$. En este sentido, vemos que la expresión (97.6) para la permitividad (cf. (59.1)) puede aplicarse también a longitudes de onda $\lambda \sim a$. Con todo, hay que recordar, naturalmente, que el sentido literal de las magnitudes \mathbf{E} y \mathbf{D} que aquí figuran no coincide con el que antes tenían, puesto que se refieren al campo no promediado respecto de volúmenes infinitesimales. Por esta razón, ϵ es ahora función de las coordenadas.

En la dispersión de los rayos X por átomos pesados puede presentarse el caso en que la condición $\omega \gg \omega_0$ se cumple para las capas electrónicas exteriores y, a la vez, deja de cumplirse para los electrones interiores, para los cuales $\omega \lesssim \omega_0$ y, en consecuencia, es válida la desigualdad $\lambda \gg a$. En este caso cabe también introducir el concepto de permitividad (como coeficiente de proporcionalidad entre \mathbf{D} y \mathbf{E}), pero mediante una fórmula del tipo (97.6) se determina entonces únicamente la contribución debida a los electrones exteriores. En cuanto a la correspondiente a las capas interiores, ésta debe calcularse, en principio, promediando en el volumen de las mismas. De esta manera, si se escribe de forma general $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, con un ϵ dependiente de las coordenadas, tenemos en cuenta automáticamente todos los casos posibles. Para concretar, utilizaremos en todo lo que sigue la expresión (97.6).

Efectuando en (97.2) el promedio de la densidad electrónica y habiendo obtenido como resultado una $n(x, y, z)$ que no depende del tiempo, excluimos con ello la posible variación de la frecuencia en la dispersión. En otras palabras, consideramos la dispersión rigurosamente coherente, sin variación de la frecuencia.

Eliminando \mathbf{H} entre las dos ecuaciones (97.3) y (97.4), se obtendrá

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \omega^2\mathbf{D}/c^2.$$

Substituyamos aquí

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} + 4\pi e^2 n\mathbf{E}/m\omega^2$$

y desarrollemos la expresión $\text{rot rot } \mathbf{E}$, teniendo en cuenta que $\text{div } \mathbf{D} = 0$ (conforme se sigue de (97.4)). Obtendremos entonces

$$\Delta \mathbf{D} + \omega^2 \mathbf{D}/c^2 = \text{rot rot } (4\pi e^2 n \mathbf{E}/m\omega^2). \quad (97.7)$$

En el segundo miembro de esta igualdad, que contiene ya la pequeña cantidad $4\pi e^2 n/m\omega^2$, \mathbf{E} significa el campo dado de la onda incidente. Hallemos la solución de la ecuación (97.7) en el espacio exterior al cristal dispersor y a grandes distancias del mismo*. Dado que esta ecuación coincide formalmente con la ecuación (91.3), podemos escribir sin más la solución buscada, por analogía con (91.4):

$$\mathbf{E} = \frac{e^2}{m\omega^2} \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} \mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0) \int n \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (97.8)$$

Aquí R es la distancia desde el origen de coordenadas, que se supone interior al cristal, hasta el punto de observación del campo; $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$; $k = k' = \omega/c$; \mathbf{E}_0 es la amplitud de la onda incidente; en el primer miembro de la igualdad hemos escrito: \mathbf{E} en vez de \mathbf{D} , dado que en el vacío exterior al cuerpo es $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

Introduzcamos como característica de la intensidad de la difracción de los rayos X la sección eficaz σ , definida como razón de la intensidad de la radiación difractada en el ángulo sólido $d\Omega'$ a la densidad de flujo de energía en la onda incidente. Según (97.8) tenemos

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta \left| \int n \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 d\Omega', \quad (97.9)$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{E}_0 y \mathbf{k}' . Si los rayos incidentes son «naturales» (no polarizados), el factor $\sin^2 \theta$ en esta fórmula se substituye por $(\frac{1}{2})(1 + \cos^2 \vartheta)$, donde ϑ es el ángulo entre \mathbf{k} y \mathbf{k}' (véase la nota en la pág. 356):

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \left| \int n \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 d\Omega'. \quad (97.10)$$

A continuación supondremos, para concretar, que de este caso se trata precisamente.

Vemos así que la intensidad de los rayos difractados en una dirección dada queda determinada fundamentalmente por el cuadrado del módulo de la integral

$$\int n \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (97.11)$$

es decir, por la componente espacial de Fourier (con el correspondiente valor de \mathbf{q}) de la densidad electrónica. Cuando $\mathbf{q} \rightarrow 0$, esta integral se reduce simplemente al valor medio de la densidad electrónica \bar{n} en el volumen del cristal (es decir, en el de su celda elemental). Pero si en las ecuaciones (97.3) y (97.4) se substituye n por \bar{n} ,

* Al resolver la ecuación (91.3) en el § 91 fue imposible considerar el campo fuera del cuerpo, ya que ello hubiera exigido tener en cuenta las condiciones de contorno sobre su superficie debido a que el primer miembro de la ecuación contenía la magnitud (ϵ') , que es diferente dentro y fuera del medio. En cambio, el primer miembro de la ecuación (97.7) es el mismo en todo el espacio.

se obtendrán las ecuaciones macroscópicas ordinarias de Maxwell con una permitividad

$$\epsilon(\omega) = 1 - 4\pi e^2 \bar{n} / m \omega^2.$$

Según estas ecuaciones, cuando los rayos X atraviesan el cristal, se produce su refracción de acuerdo con la ley ordinaria (con un índice de refracción $\sqrt{\epsilon}$). Así pues, la difracción a ángulos pequeños se reduce a la refracción ordinaria que no nos interesa aquí. En todo lo que sigue supondremos que \mathbf{q} es apreciablemente distinto de cero.

La densidad electrónica (como cualquier otra función de punto en una red cristalina) puede desarrollarse en serie de Fourier de la forma

$$n = \sum_{\mathbf{b}} n_{\mathbf{b}} \exp(2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}), \quad (97.12)$$

donde la suma se extiende a todos los períodos \mathbf{b} de la red recíproca*. Al substituir (97.12) en (97.11) e integrar en el volumen ocupado por el cristal, sólo se obtiene un resultado apreciablemente distinto de cero para aquellos valores \mathbf{q} próximos a alguno de los $2\pi\mathbf{b}$. En cambio, para valores intermedios entre éstos, la intensidad es prácticamente nula. Debido a ello, cabe considerar cada uno de los máximos de difracción por separado, suponiendo al hacerlo $n = n_{\mathbf{b}} e^{2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}$ con un valor dado de \mathbf{b} . Substituyendo esta expresión en (97.10), se obtendrá

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_{\mathbf{b}}|^2 \times \\ \times \left| \int \exp[-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 d\omega'. \quad (97.13)$$

Los máximos más intensos aparecen en las direcciones en las que se cumple la igualdad exacta

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{b} \quad (97.14)$$

(*ecuación de Laue*); estos máximos se califican de *principales*. Para un \mathbf{b} dado, sin embargo, un máximo principal puede no presentarse para una dirección (y frecuencia) arbitraria de los rayos incidentes. Escribiendo la igualdad (97.14) en la forma $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$, elevándola al cuadrado y teniendo en cuenta que $k^2 = k'^2$, se obtendrá

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = -\pi b^2. \quad (97.15)$$

Mediante esta ecuación se determinan aquellos valores del vector de onda \mathbf{k} para los que son posibles los máximos principales con un valor de \mathbf{b} dado. Geométricamente, (97.15) es la ecuación de un plano en el espacio \mathbf{k} , perpendicular al vector \mathbf{b} y situado a la distancia πb del origen de coordenadas. Vemos, en particular, que necesariamente debe ser $k \geq \pi b$.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 135.

Dado que $|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = 2k \sin(\frac{1}{2}\vartheta)$, de (97.14) se sigue que

$$k \sin \frac{1}{2} \vartheta = \pi b \quad (97.16)$$

ecuación que determina el ángulo de difracción en el máximo principal (*ecuación de Bragg y Wulff*).

Como es sabido, cada vector \mathbf{b} de la red recíproca determina una familia de planos cristalográficos de acuerdo con las ecuaciones $\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \text{const}$, donde la constante toma valores enteros. Estos planos son perpendiculares a la dirección del vector \mathbf{b} , y respecto de los mismos los vectores \mathbf{k} y \mathbf{k}' (que corresponden a la condición (97.14)) están dirigidos formando ángulos iguales de «incidencia» y de «reflexión» (fig. 45). Por este motivo, a veces al referirse a la reflexión en un máximo principal se habla de «reflexión» en los correspondientes planos cristalográficos.

La intensidad total de la «mancha» de difracción cerca de un máximo se obtiene por integración de (97.13) en un ángulo sólido en torno de la correspondiente dirección de \mathbf{k}' . Determinemos la intensidad total en las proximidades de un máximo principal.

Designemos por \mathbf{k}_0' el valor de \mathbf{k}' que corresponde exactamente a la condición de Laue (para un \mathbf{k} dado): $\mathbf{k}_0' = \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$. Introduzcamos también el vector $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$. En la vecindad del máximo, $\boldsymbol{\kappa}$ es pequeño y dado que \mathbf{k}' y \mathbf{k}_0' difieren solamente en su dirección será $\boldsymbol{\kappa} \perp \mathbf{k}_0'$. Por ello, el elemento de ángulo sólido se puede escribir en la forma

$$d\omega' = d\kappa_x d\kappa_y / k'^2 = d\kappa_x d\kappa_y / k^2, \quad (97.17)$$

donde el eje z se ha elegido paralelo a \mathbf{k}_0' . De esta manera, tenemos

$$\sigma = \frac{1}{2k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \iint d\kappa_x d\kappa_y \left| \int \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2.$$

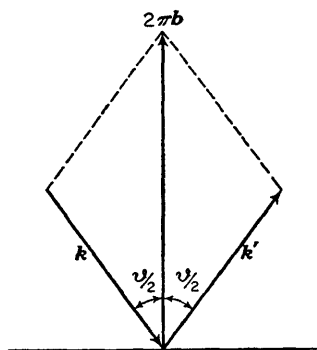


FIG. 45

En la integral de volumen puede efectuarse la integración respecto de z , ya que $e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}$ no depende de esta coordenada:

$$\int \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) dV = \int Z \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) df,$$

donde $df = dx dy$, y $Z = Z(x, y)$ es la longitud del cuerpo en la dirección de \mathbf{k}_0' . Finalmente, apliquemos la conocida fórmula de la teoría de las integrales de Fourier:

$$\int |\phi_{\kappa}|^2 d\kappa_x d\kappa_y = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi^2 dx dy, \quad (97.18)$$

donde

$$\phi_{\kappa} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi(x, y) \exp(-i\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{r}) dx dy$$

son las componentes del desarrollo bidimensional de Fourier. En definitiva obtendremos la siguiente fórmula final:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\pi^2}{k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int Z^2 df \\ &= \frac{2}{b^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int Z^2 df. \end{aligned} \quad (97.19)$$

La integral que aquí aparece es del orden de magnitud de L^4 , donde L caracteriza las dimensiones lineales del cuerpo. Así pues, la sección eficaz total (o lo que es lo mismo, la intensidad total de la mancha) es proporcional a $V^{4/3}$, donde V es el volumen del cuerpo. Obsérvese que la intensidad en el propio máximo es proporcional a otra potencia del volumen: cuando $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{b}$, la integral en (97.13) es, simplemente, igual a V , de modo que $d\sigma$ resulta proporcional a V^2 :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega'} \right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 V^2. \quad (97.20)$$

El hecho de que la intensidad en el máximo sea proporcional a una potencia mayor de V que la intensidad total queda ilustrada intuitivamente por el acusado carácter del máximo. La «anchura» de éste es proporcional, evidentemente, a $V^{4/3}/V^2 = V^{-2/3}$.

La teoría desarrollada aquí es aplicable únicamente si se cumple la condición de que el efecto total de difracción es pequeño. Esta condición impone, conforme vemos ahora, una determinada limitación a las dimensiones del cristal. En efecto, σ debe ser pequeña comparada con el área geométrica de la sección del cuerpo ($\sim L^2$), de donde

$$\frac{e^2}{mc^2} \frac{L}{k} |n_b| \ll 1. \quad (97.21)$$

PROBLEMAS

1. Determinar la distribución de la intensidad en la mancha de difracción alrededor de un máximo principal en la difracción por un cristal cuya forma es la de un paralelepípedo rectangular de aristas L_x , L_y , L_z .

Solución. Introduzcamos, como en el texto, el vector $\mathbf{x} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$ y elijamos el sistema de coordenadas de modo que sus ejes sean paralelos a las aristas del paralelepípedo y que su origen coincida con el centro.

La integral $\int e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} dV$ se descompone en el producto de tres integrales de la forma

$$\int_{-\frac{1}{2}L_x}^{\frac{1}{2}L_x} \exp(-i\kappa_x x) dx = \frac{2}{\kappa_x} \sin \frac{1}{2}\kappa_x L_x.$$

Así pues,

$$d\sigma = 32 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \frac{1}{\kappa_x^2 \kappa_y^2 \kappa_z^2} \sin^2 \frac{1}{2}\kappa_x L_x \sin^2 \frac{1}{2}\kappa_y L_y \sin^2 \frac{1}{2}\kappa_z L_z d\sigma'.$$

Hay que recordar que las componentes del vector \mathbf{x} no son independientes, sino que están ligadas por la condición $\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}_0' = 0$.

2. Lo mismo para la difracción por un cristal esférico de radio a .

Solución. Introduzcamos de nuevo $\mathbf{x} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$; el sistema de coordenadas lo elegiremos de modo que el eje z sea paralelo a \mathbf{x} (y con origen en el centro de la esfera). Tenemos

$$\begin{aligned} \int \exp(-i\kappa z) dV &= \int_{-a}^a \pi(a^2 - z^2) \exp(-i\kappa z) dz \\ &= \frac{4\pi}{\kappa^3} (\sin \kappa a - \kappa a \cos \kappa a). \end{aligned}$$

Así pues,

$$d\sigma = 8\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \frac{1}{\kappa^6} (\sin \kappa a - \kappa a \cos \kappa a)^2 d\sigma'.$$

3. Determinar la intensidad total de la mancha de difracción en torno de un máximo secundario.

Solución. En este caso el vector de onda \mathbf{k} de la onda incidente no cumple la condición (97.15). Como se indicó en el texto, (97.15) es la ecuación de un plano perpendicular al vector \mathbf{b} ; designemos por \mathbf{k} el pequeño desplazamiento del extremo del vector $\eta\mathbf{b}$ a partir de este plano, donde $\eta \ll 1$. En otras palabras, representemos \mathbf{k} en la forma $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \eta\mathbf{b}$, donde \mathbf{k}_0 satisface la ecuación (97.15) (figura 46).

Al máximo de la intensidad en la mancha corresponde aquella dirección \mathbf{k}' para la cual la diferencia $\mathbf{k}' - (\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})$ presenta un mínimo (de modo que la integral en (97.13) es máxima). Pero el valor absoluto de la diferencia de dos vectores (uno de los cuales tiene una dirección arbitraria) alcanza el valor mínimo cuando las direcciones de estos vectores coinciden. Tenemos por ello (puesto que $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$)

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}|_{\min} &= k - |\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}| \\ &= \frac{k^2 - (\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})^2}{b + |\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}|}. \end{aligned}$$

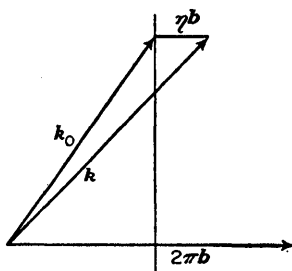


FIG. 46

Dado que \mathbf{k} es próximo a \mathbf{k}_0 y que consideramos una región en el entorno del máximo, será $\mathbf{k}' \cong \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$, y el denominador de la expresión que precede puede substituirse por $2k$. En el numerador desarrollaremos el paréntesis, con lo que se obtiene

$$-2\mathbf{k} \cdot 2\pi\mathbf{b} - (2\pi\mathbf{b})^2 = [-2\mathbf{k}_0 \cdot 2\pi\mathbf{b} - (2\pi\mathbf{b})^2] - 2\eta\mathbf{b} \cdot 2\pi\mathbf{b} = -4\pi\eta b^2.$$

Así pues,

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}|_{\min} \cong -2\pi\eta b^2/k.$$

Introduzcamos ahora el vector \mathbf{x} definido por

$$\mathbf{k}' = (\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}) \left(1 - \frac{2\pi\eta b^2}{k}\right) + \mathbf{x},$$

y, eligiendo el eje z paralelo a $\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$, el problema se reduce a calcular la integral (véase la deducción de la fórmula (97.19))

$$\begin{aligned} & \int \int d\kappa_x d\kappa_y \left| \int \exp\{2\pi i \eta b^2/k - z - i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}\} dV \right|^2 \\ &= \int \int d\kappa_x d\kappa_y \left| \int \exp(-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}) \frac{\sin(\pi \eta b^2 Z/k)}{\pi \eta b^2/k} df \right|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la fórmula (97.18), se obtendrá:

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int \frac{\sin^2(\pi \eta b^2 Z/k)}{(\pi \eta b^2/k)^2} df.$$

Cuando $\eta \rightarrow 0$, esta fórmula pasa a ser la (97.19). Pero si $\pi \eta b^2 Z/k \gg 1$ (lo que no contradice la condición $\eta \ll 1$), el cuadrado del seno se substituye por su valor medio $\frac{1}{2}$ y obtenemos

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\eta^2 b^4} |n_b|^2 S,$$

donde S es el área de la proyección (de la «sombra») del cuerpo sobre el plano x, y .

§ 98. Intensidad integral

Las fórmulas obtenidas en el párrafo que precede determinan la intensidad de la difracción cuando sobre el cristal incide una onda rigurosamente monocromática

y rigurosamente plana. Consideremos ahora una serie de casos en los que estas condiciones no se cumplen.

Comencemos por aquel en que la onda incidente es plana, pero no monocromática*. En otras palabras, su desarrollo espectral contiene ondas con vectores de onda \mathbf{k} todos de igual dirección, pero de módulos $k = \omega/c$ diferentes. Designemos por $\rho(k)$ la densidad de la distribución de intensidad de la radiación incidente referida a la frecuencia y normalizada a la unidad por la condición $\int \rho(k) dk = 1$.

La intensidad total de la mancha de difracción viene determinada por la sección eficaz que se obtiene multiplicando la expresión (97.13) por $\rho(k)$ e integrando respecto de \mathbf{o}' y respecto de $\rho(k) dk$:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 \int \int \left| \int \exp[-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 \times \\ \times (1 + \cos^2 \vartheta) \rho(k) d\mathbf{o}' dk. \quad (98.1)$$

Introduzcamos por el momento la notación $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}$ y escribamos el cuadrado del módulo en forma de integral doble:

$$\left| \int \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 = \int \int \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] dV_1 dV_2.$$

Substituyendo en vez de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 las variables $(\frac{1}{2})(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y efectuando la integración respecto de la primera en el volumen del cuerpo, obtendremos

$$\left| \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 = V \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV.$$

En la integral que queda cabe ahora efectuar la integración respecto de todas las variables entre límites infinitos**, como resultado de lo cual se encuentra

$$\left| \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 = (2\pi)^3 V \delta(\mathbf{K}). \quad (98.2)$$

Substituyendo este resultado en la fórmula (98.1), escribiremos ésta en la forma

$$\sigma = 4\pi^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \times \\ \times \int \int \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \rho(k) d\mathbf{o}' dk; \quad (98.3)$$

debido a la presencia de la función δ en el integrando, hemos separado el factor $1 + \cos^2 \vartheta$ substituyéndolo por su valor para $\vartheta = \vartheta_0$, donde ϑ_0 es el ángulo formado por los vectores \mathbf{k} y \mathbf{k}' que satisfacen la condición de Laue (los designaremos por \mathbf{k}_0 y $\mathbf{k}_0' = \mathbf{k}_0 + 2\pi\mathbf{b}$).

* Este caso corresponde al conocido *método de Laue* para el análisis por rayos X de la estructura de los cristales.

** Esto puede hacerse en tanto se trata de calcular solamente la intensidad total de la onda difractada, no su anchura.

La integración respecto de do' conviene efectuarla observando que equivale a la integración respecto de

$$d\mathbf{k}' = k'^2 dk' do' = \frac{1}{2} k' d(k'^2) do',$$

con tal que en el integrando se introduzca un factor $(2/k)\delta(k'^2 - k^2)$. De esta manera la integral (98.3) se substituye por

$$\int \int \frac{2}{k} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \delta(k'^2 - k^2) \rho(k) d\mathbf{k}' dk.$$

Al integrar respecto de $d^3\mathbf{k}'$ mediante la primera función δ , debemos substituir en la segunda k'^2 por $(\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})^2$, con lo que se obtiene

$$\int \frac{2}{k} \delta(4\pi^2 b^2 + 4\pi\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) \rho(k) dk = \int \frac{1}{2\pi k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + \pi b^2) \rho(k) dk,$$

de modo que

$$\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + \pi b^2) \rho(k) dk. \quad (98.4)$$

Finalmente, efectuemos la última integración respecto de k (para una dirección dada $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$). El argumento de la función δ se anula cuando $k = k_0$, y la integral es igual a

$$\rho(k_0)/k_0 |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}| = \rho(k_0)/|\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_0| = \rho(k_0)/\pi b^2.$$

De este modo obtenemos finalmente:

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \rho(k_0)/b^2. \quad (98.5)$$

Consideremos ahora otro caso, aquel en que la onda incidente es monocromática, pero contiene componentes con direcciones de \mathbf{k} distintas que se obtienen una de otra por rotación en torno de cierto eje*. El vector unitario correspondiente a la dirección de éste se designará por \mathbf{l} , y el ángulo de giro en torno del mismo, por ψ . Sea $\rho(\psi)$ la función que da la distribución angular de la intensidad de la radiación incidente, normalizada a la unidad: $\int_{-2\pi}^{2\pi} \rho(\psi) d\psi = 1$.

Todos los cálculos que condujeron⁰ a la fórmula (98.4) valen también para este caso, con la única diferencia de que la integración respecto de $\rho(k) dk$ hay que substituir la por la integración respecto de $\rho(\psi) d\psi$:

$$\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + \pi b^2) \rho(\psi) d\psi. \quad (98.6)$$

* Este caso corresponde al conocido *método de Bragg* (o método de rotación) del análisis estructural por rayos X, si bien, de hecho, se trata no del giro de la dirección de \mathbf{k} , sino de la rotación del propio cristal en torno del eje \mathbf{l} .

De nuevo designaremos por \mathbf{k}_0 el valor de \mathbf{k} para el que se anula el argumento de la función δ , y contaremos ψ a partir del plano I, \mathbf{k}_0 . Para valores de ψ pequeños, tenemos

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + (\mathbf{l} \times \mathbf{k}_0)\psi.$$

Entonces la integral en (98.6) toma la forma

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{k}_0 \psi) \rho(\psi) d\psi &= \rho(0)/k |\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{k}_0| \\ &= \rho(0)/k^2 |\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n}_0| \\ &= \rho(0) \sin^2(\frac{1}{2} \vartheta_0) / \pi^2 b^2 |\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n}_0|. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\sigma = \frac{2}{b^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta_0 (1 + \cos^2 \vartheta_0) |n_b|^2 V \frac{\rho(0)}{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n}_0|}. \quad (98.7)$$

Finalmente, consideremos la difracción de una onda plana monocromática por un cuerpo que está constituido por un conjunto de cristales orientados al azar*.

Designemos por \mathbf{k}'_0 y \mathbf{b}_0 los vectores \mathbf{k}' y \mathbf{b} dirigidos de tal manera que se satisfaga la condición de Laue $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}_0$. Las direcciones de \mathbf{k}'_0 y \mathbf{b}_0 no están determinadas unívocamente, puesto que la condición de Laue sigue cumpliéndose para una rotación cualquiera del triángulo \mathbf{k} , $2\pi\mathbf{b}_0$, \mathbf{k}'_0 en torno de la dirección de \mathbf{k} . Así pues, al máximo principal corresponden direcciones de \mathbf{k}' que están sobre una superficie cónica de ángulo $2\vartheta_0$ en el vértice; en vez de la «mancha» de difracción, tendremos ahora un «anillo» de difracción.

La sección eficaz total buscada se determina por una fórmula que difiere de la (98.4) tan sólo en la substitución de la integración respecto de $\rho(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ por el promedio respecto de las direcciones de \mathbf{b} :

$$\sigma = 2\pi^2 V \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + \pi b^2) \frac{d\omega_b}{4\pi}, \quad (98.8)$$

($d\omega_b$ es el elemento de ángulo sólido en la dirección de \mathbf{b}). Designando el ángulo entre \mathbf{k} y \mathbf{b} por α , escribiremos como sigue la integral que aparece en (98.8):

$$\int \frac{1}{k} \delta(bk \cos \alpha + \pi b^2) \frac{2\pi d \cos \alpha}{4\pi} = \frac{1}{2bk^2} = \frac{1}{2b^3 \pi^2} \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta_0.$$

De esta manera,

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 \frac{V}{b^2} (1 + \cos^2 \vartheta_0) \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}$$

Cada uno de los tres casos considerados corresponde a un determinado criterio de promedio de la figura de difracción. Observemos que la dependencia de la intensidad de difracción promediada con relación al volumen del cuerpo queda reducida,

* Este caso corresponde al método de Debye-Scherrer (método del polvo) para el análisis estructural por rayos X.

como era de esperar, a la mera proporcionalidad. Recuérdese que, en la figura no promediada, la intensidad y su distribución en la mancha dependen del volumen de una manera más acusada.

§ 99. Dispersión térmica difusa de los rayos X

En los dos párrafos que preceden $n(x, y, z)$ representaba la densidad electrónica en el cristal promediada respecto del tiempo. Con ello se excluyen de la misma las oscilaciones de densidad provocadas por diferentes causas y, a la vez, la correspondiente parte (incoherente) de la dispersión de los rayos X. Una de las fuentes de dispersión incoherente la constituyen las fluctuaciones térmicas de densidad. Esta dispersión está distribuida de modo «difuso» en todas direcciones, pero su característica peculiar consiste en la intensidad relativamente grande que presenta cerca de las direcciones que corresponden a las rayas, bien acusadas, de la dispersión «estructural» estudiada en los párrafos anteriores. Consideraremos ahora precisamente estos máximos de la dispersión térmica (*W. H. Zachariasen, 1940*).

Las oscilaciones térmicas de una red cristalina pueden representarse por desarrollos en ondas «acústicas» separadas. Como se verá por lo que sigue, en la formación de los máximos de dispersión térmica que nos interesan, participan las ondas con grandes longitudes de onda (grandes comparadas con la constante de la red). La variación de la densidad electrónica provocada por dicha onda puede considerarse, en cada punto del espacio, como resultado de un simple desplazamiento de la red cuyo valor es igual al valor local del vector desplazamiento \mathbf{u} en la onda. De esta manera, la variación de densidad (¡no promediada respecto del tiempo!) al pasar una onda acústica dada puede expresarse en función de la densidad media por

$$\delta n = n(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - n(\mathbf{r}) \cong -\mathbf{u} \cdot \partial n / \partial \mathbf{r}.$$

Al considerar la dispersión difusa cerca de una determinada raya, hay que substituir n por $n_b e^{2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}$ con un \mathbf{b} dado, de modo que

$$\delta n = -2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} n_b \exp(2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}). \quad (99.1)$$

La dispersión por las fluctuaciones de densidad, naturalmente, es incoherente con la dispersión por la densidad media y, por ello, no interfiere con ésta. En consecuencia, la sección eficaz de la dispersión difusa puede hallarse mediante la fórmula (97.10) substituyendo en ésta δn en vez de n y efectuando luego el promedio estadístico respecto de las fluctuaciones:

$$\begin{aligned} d\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \times \\ \times \left| \int \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 d\omega', \end{aligned} \quad (99.2)$$

donde se ha introducido la notación $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}$. La intensidad de la dispersión es grande en aquellas direcciones para las que el vector \mathbf{K} es pequeño ($K \ll 2\pi b$).

La integral $\int \mathbf{u} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} dV$ separa de \mathbf{u} la componente espacial de Fourier con vector de onda \mathbf{K} ; podemos, por lo tanto, interpretar \mathbf{u} simplemente como el vector desplazamiento en una onda acústica con este vector de onda. La desigualdad $K \ll 2\pi b$ significa, en consecuencia, que la longitud de la onda acústica dispersora es grande comparada con las dimensiones de la celda elemental del cristal.

De esta manera escribiremos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^* \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})], \quad (99.3)$$

de modo que

$$\int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} V \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_0$$

y la sección eficaz resulta igual a

$$d\sigma = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) b_i b_k \overline{u_{0i} u_{0k}} V^2 d\omega'. \quad (99.4)$$

El promedio de los productos de las componentes u_0 se efectúa de manera análoga a como se procedió en el § 96 para una onda acústica en un cuerpo isótropo. La energía elástica por unidad de volumen del cristal deformado viene dada por la expresión

$$\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm},$$

donde u_{ik} es el tensor deformación, y λ_{iklm} , el tensor de módulos elásticos*. Por ello, la energía elástica media de todo el cristal es

$$\frac{1}{2} V \lambda_{iklm} \overline{u_{ik} u_{lm}}.$$

Substituyamos aquí

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ (iK_k u_{0i} + iK_i u_{0k}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \}. \end{aligned}$$

Los términos con los factores $e^{\pm 2i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}$ se anulan al calcular el valor medio. Teniendo en cuenta también las propiedades de simetría del tensor λ_{iklm} (simetría respecto de los índices i, k y l, m y respecto de la permutación del par i, k con el par l, m), obtendremos

$$\frac{1}{4} V \lambda_{iklm} K_k K_m \overline{u_{0i} u_{0l}^*}$$

o bien

$$\frac{1}{4} V g_{ik} \overline{u_{0i} u_{0k}^*},$$

* Véase vol. VII, *Teoría de la elasticidad*, § 10.

donde se ha introducido la notación

$$g_{ik} = \lambda_{ikm} K_l K_m. \quad (99.5)$$

Según la teoría general de las fluctuaciones termodinámicas, podemos escribir ahora, sin más, para los valores medios buscados*

$$\overline{u_{0i} u_{0k}^*} = (4T/V) g_{ik}^{-1}, \quad (99.6)$$

(g_{ik}^{-1} es el tensor inverso del tensor g_{ik}), y para la sección eficaz de dispersión tenemos finalmente:

$$d\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 TV |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) b_i b_k g_{ik}^{-1} d\omega'. \quad (99.7)$$

Así pues, la intensidad de la dispersión difusa, como era de esperar, es proporcional al volumen del cristal. La particularidad característica de esta dispersión es la distribución de su intensidad en la superficie de la mancha. Prescindiendo del factor $(1 + \cos^2 \vartheta)$, prácticamente constante en la mancha dada, vemos que la distribución de la intensidad viene determinada por la expresión $g_{ik}^{-1} b_i b_k$. Ésta representa el producto de K^{-2} por una función bastante complicada de la dirección del vector \mathbf{K} respecto de los ejes cristalográficos. En la dispersión cerca del máximo principal, la intensidad de la dispersión difusa es también máxima en el punto $\mathbf{K} = 0$ (la propia expresión (99.7), que se hace infinita para $\mathbf{K} = 0$, claro está, resulta con esto inaplicable). Pero si la condición (97.15) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = -\pi b^2$ no se cumple, la igualdad $\mathbf{K} = 0$ es imposible y el máximo de la intensidad de la dispersión difusa se presenta para un cierto \mathbf{K} diferente de cero que, en general, no coincide con la posición del máximo de la dispersión estructural. En ambos casos la dispersión difusa da lugar a un fondo cuya intensidad disminuye esencialmente como $1/K^2$, es decir, con una lentitud considerablemente mayor que la intensidad de la raya más acusada que corresponde a la dispersión estructural, y superpuesta a dicho fondo.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 113. Si la distribución de probabilidades para las magnitudes que fluctúan x_1, x_2, \dots es de la forma

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_{ik} x_i x_k\right),$$

se tendrá $\overline{x_i x_k} = \lambda_{ik}^{-1}$. El factor 2 en la fórmula (99.6) se debe a que cada una de las u_{0i} complejas representa el conjunto de dos magnitudes independientes.

APÉNDICE

COORDENADAS CURVILÍNEAS

Presentamos a continuación, como referencia, una serie de fórmulas relativas a las operaciones vectoriales en coordenadas curvilíneas en general y en algunos casos especiales.

En un sistema ortogonal arbitrario de coordenadas curvilíneas u_1, u_2, u_3 , el cuadrado del elemento de longitud tiene la forma

$$dl^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2,$$

donde las h_i son funciones de las coordenadas. El elemento de volumen en estas mismas coordenadas es

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3.$$

Las diferentes operaciones vectoriales se expresan mediante las funciones h_i según las fórmulas que siguen a continuación. Operaciones vectoriales con un escalar:

$$(\text{grad } f)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i},$$

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right),$$

donde la suma se extiende a las permutaciones circulares de los índices 1, 2, 3. Operaciones vectoriales con un vector:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} (h_2 h_3 A_i),$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right]$$

(las demás componentes de $\text{rot } \mathbf{A}$ se obtienen por permutación circular de los índices).

Coordenadas cilíndricas r, ϕ, z .

Elemento de longitud: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$;

$$h_r = 1, \quad h_\phi = r, \quad h_z = 1.$$

Operaciones vectoriales:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi},$$

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi},$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\phi = \Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi},$$

$$(\Delta \mathbf{A})_z = \Delta A_z.$$

En las expresiones para las componentes del vector $\Delta \mathbf{A}$ se entiende por ΔA_i el resultado de aplicar el operador Δ a la magnitud A_i , considerada al hacerlo como un escalar.

Coordenadas esféricas r, θ, ϕ .

Elemento de longitud: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$;

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta.$$

Operaciones vectoriales:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right],$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi),$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right],$$

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left[A_r + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right],$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right],$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\phi = \Delta A_\phi + \frac{2}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{2 \operatorname{sen} \theta} \right].$$

ÍNDICE ALFABÉTICO

- Absorción de ondas electromagnéticas por partículas pequeñas, 359 s
- Actividad óptica natural, 295
- Ángulo de Brewster, 326
- Antiferromagnéticos, 139
- Atracción molecular entre cuerpos sólidos, 432 s
- Autoinductancia, 157
 - de circuitos lineales, 162 ss
 - de superconductores, 204
- Binormal, 384
- Birradial, 384
- Calidad de un resonador, 345
- Campo cuasiestático, 221, 428
- Campo bidimensional, 14
 - crítico, 206
 - despolarizante, 53
 - eléctrico constante de conductores, 1 ss
 - — — condiciones de contorno, 2 s, 47 s, 111
 - — — energía del, 3 ss
 - — — en dieléctricos, 43 ss
 - — — condiciones de contorno, 44 ss
 - — — termodinámico de, 57 ss
- *Véase también* Campo electromagnético
- electromagnético, condiciones de contorno, 323, 332 s, 343
 - — cuasi-estático (VII), 221 ss
 - — en dieléctricos, 285 ss
 - — fluctuaciones, 424 ss
 - — movimiento en un medio, 289 ss
 - — variable, 294 ss
 - magnético, 135
 - — condiciones de contorno, 137, 222 s
 - — conductor móvil en, 243 ss
 - — constante (IV), 135 ss
 - — de corriente constante, 142 ss
 - — movimiento de un líquido en un, 253 ss
 - — fuerzas sobre una substancia, 168 ss, 262
 - — termodinámica del, 151 ss
- *Véase también* Campo electromagnético
- Capacidad, 4, 9 f, 23 s, 74, 239 ss
 - coeficientes, 5, 7, 9
 - del elipsoide conductor, 28
 - de una esfera conductora, 74
 - mutua, 9, 20
- Cargas en un dieléctrico, 81
 - extrañas, 44
- Casualidad, 306, 309
- Cilindro conductor, 19, 20, 21, 149, 231
 - dieléctrico, 51, 68, 69
- Clases cristalográficas magnéticas, 141
- Coefficiente de absorción, 314
 - de reflexión, 325, 328 ss, 335
- Coefficientes cinéticos, 114
 - — simetría de, 114, 119, 370, 390, 398 s
- Coefficiente de desmagnetización, 52, 202
 - de despolarización, 31
 - de extinción diferencial, 450
 - — total, 450
- giromagnéticos, 173
- Coefficiente Peltier, 129
 - Thomson, 129
- de inducción electrostática, 5, 7
- Condición de Lorentz, 412
- Conductividad eléctrica, 111
 - — tensor, 112, 116
- Conductores, 1 ss
 - cilíndricos, 19, 20, 21
 - disco circular, 32, 33
 - electrostática de (I), 1 ss

- Conductores, electrostricción, 39
- elipsoide, 24 ss
 - esférico, 17 s, 40 s, 115 s, 229 s, 252
 - fuerzas sobre los, 37 ss, 74, 169 ss, 262
 - movimiento en un campo magnético, 243 ss
 - turbulento, 278 ss
- Constante de Hall, 118
- dieléctrica, véase Permeabilidad dieléctrica
- Constantes opticoelásticas, 389
- Coordenadas curvilíneas, 481
- elipsoidales, 25
- Coordenadas esfenoidales achatadas, 26
- — alargadas, 27
- Corriente campo eléctrico creado, 111
- conducción, 143
 - constante (III), 111 ss
 - campo magnético, 142 ss
 - corriente de Foucault, 225 ss
 - densidad, 111
 - eléctrica, 1
 - en un cristal, 467
 - en un conductor en movimiento, 244
 - excitación por aceleración, 249 ss
 - líneal, 146
 - molecular, 143
 - superconductividad, 202 ss
 - superficial, 138
- Corrientes de Foucault, 225
- autoinductancia, 162 ss
 - fluctuaciones de las, 423 s
 - inductancia mutua, 158 ss
 - lineales, 146 ss, 158 ss, 234 ss, 249, 252
- Cristales biáxicos, 71, 382 ss
- dieléctricos, 70, 469 ss
 - enantiomorfos, 402
 - naturalmente activo, 402
 - piezoeléctrico, 91
 - piroeléctrico, 72
 - propiedades dieléctricas, 69, 369
 - propiedades magnéticas, 138
 - rayos X, difracción de los, 467 ss
 - — teoría general, 467 ss
 - uniáxicos, 71, 144 ss
 - — negativo, 379
 - — positivo, 379
- Densidad de corriente de conducción, 143
- Desigualdades termodinámicas, 97 ss
- Desplazamiento eléctrico, 44
- Dieléctrico, 1
- condiciones de contorno, 292 s
 - electrostático de (II), 43 ss
 - electrostricción de isótopos, 66 ss
 - energía libre total, 62 ss
 - en movimiento, 289 ss
 - termodinámica de los, 57 ss
- Difracción de rayos X en cristales (XV), 467 ss
- — teoría general, 467 ss
 - por una cuña, 360 ss
 - por una pantalla plana, 365 ss
- Dirección de imanación fácil, 179
- Disco conductor, 32, 33
- dieléctrico, 51, 68, 69, 74
 - superconductor, 206
- Discontinuidades de contacto, 267
- de rotación, 269
 - estabilidad, 270
 - en un fluido magnético, 266 ss
 - tangencial, 267
- Dispersión antisimétrica, 448
- anti-Stokes, 441
 - combinación, 453
 - de las ondas, 441
 - de ondas electromagnéticas (XIV), 441
 - — — por pequeñas partículas, 354 ss
 - escalar, 448
 - principio de equilibrio detallado, 448 ss
 - por fluctuaciones, 454 ss
 - por pequeño cambio de frecuencia, 451
 - Reyleigh, en líquidos y gases, 453
 - sección eficaz de dispersión, 355 ss
 - simétrica, 448
 - Stokes, 441
 - térmica difusa de los rayos X, 478 ss
- Distribución de las cargas sobre los conductores, 32, 33
- — sobre un disco circular conductor, 32, 33
 - — sobre un elipsoide conductor, 33
- Doble refracción circular, 394
- Doblete de Mandel'shtam-Brillouin, 457
- Dominios, 105 ss, 182 ss, 189 ss, 213 ss
- Ecuación de Fresnel, 374, 382 ss
- de Lane, 470
- Ecuaciones de Bragg y Wulff, 471
- de Maxwell, 2, 135, 371, 411
 - de los telegrafistas, 353
 - de ondas magnéticas (IX), 285 ss
- Efecto Barnett, 172
- Cotton-Mouton, 396
 - Einstein-de Haas, 172
 - electrocalórico, 67 ss

- Ettingshausen, 131
- de Faraday, 394
- Hall, 117
- Kerr, 387
- Leduc-Righi, 131
- de Maxwell, 390
- Nernst, 131
- Peltier, 129 s
- Raman-Lendsberg-Mandel'shtam, 453
- Skin, 162, 232 ss
- Stewart-Tolman, 252
- Thomson, 128
- Efectos magneto-ópticos, 389 ss
- termogalvanomagnéticos, 130 s
- Eje ferroeléctrico, 100
- óptico, 379, 384
- Ejes dieléctricos principales, 373
- ópticos de rayos, 384
- Electrocapilaridad, 124 s
- Electrostática de conductores, 39 ss
- de dieléctricos, 66 ss
- Electrostricción de conductores, 39 ss
- de dieléctricos, 64 ss
- Elementos galvánicos, 122 ss
- Elipsoide conductora, 24 ss
- dieléctrica, 50ss, 67 ss
- ferromagnética, 188 s
- superconductora, 202 s, 217
- de Fresnel, 378
- dieléctrico, 50 ss, 67
- tensional, 70
- Energía de dieléctricos, 57 ss, 62ss, 95 ss
- de anisotropía magnética, 176, 178, 179 ss
- de conductores, 3 ss, 148
- de campos en los medios dispersores, 301 ss
- en sistemas de corrientes, 156 ss
- flujo (vector de Poynting), 148, 227, 289, 301, 321, 325, 332, 370
- — en guía de onda, 350 s
- — en onda plana, 313, 372 s
- — en resonador, 344 s
- interacción, 157
- libre propia, 157
- substancias magnéticas, 154 s, 179 ss, 187, 190 f
- magnetoelástica, 186
- Esfera conductora, 18, 40 s, 74, 115 s, 229 ss, 248 f, 252
- dieléctrica, 50 s, 54, 73 s, 74, 87, 293 s
- Estado crítico, 99
- Estructura magnética, 139
- Excitación de corrientes por aceleración, 250 ss
- F. e. m., 122
- Fenómeno de difusión, 132 ss
- Fenómenos giromagnéticos, 172 s
- termoeléctricos, 125 ss
- Ferroeléctricos, 100 ss
- dominios, 105 s
- Ferromagnéticos, 139
- cerca del punto de Curie, 175
- dominios de imanación, 182ss, 189 ss
- termodinámica de los, 176
- Ferromagnetismo (V), 175
- Fluctuaciones electromagnéticas (XIII), 423 ss
- Fluido dieléctrico, fuerzas en, 77 ss
- Flujo magnético, 159
- Fórmulas de Fresnel, 324
- de Kramer y Kronig, 308ss, 334 s
- Fórmula de Thomson, 241
- Frecuencias ópticas, 295
- Fuerza de los osciladores, 310
- electromotriz, 122
- Fuerzas eléctricas en los sólidos, 82 ss
- Fuerzas ponderomotrices, 77
- Fuerza termoelectromotriz, 129
- Función de Airy, 339
- disipativa, 242
- Girotrópico, 390, 399
- Grupos espaciales magnéticos, 140
- Guías de ondas, 347 ss
- Histéresis, 181
- Iconal, 319, 374
- Imagen, 11
- fuerza, 11, 48
- Imágenes, métodos de las, 11
- Imanación, 136
- dominios donde es espontánea, 182
- por rotación, 171
- Impedancia, 234 ss
- matriz, 238
- superficie, 332ss, 370 s
- Índice de refracción, 314, 315, 319, 373, 379, 432
- Inducción eléctrica, 44
- fluctuaciones extrañas, 424
- — correlaciones, 427 ss
- unipolar, 247 s
- eléctrica, 44
- magnética, 135

- Inducción unipolar, 247 s
 Inductancia auto, 158
 — mutua, 158
 Inversión, método de, 13 s
 — radio de, 14
 — transformación, 14
- Ley de Biot y Savart, 146
 — de Curie-Weiss, 178
 — de Faraday, 246
 — de Joule, 112
 — — en un conductor móvil, 244
 — de Ohm, 111, 238
- Magnetoestática y electrostática comparadas, 117, 118, 151 ss, 168 s, 175
 Magnetohidrodinámica (VIII), 253 ss
 Magnetostricción, 186
 Medios girotrópicos, 376, 391 ss
 — transparentes, 316 ss
 — — radiación del cuerpo negro, 431 s
 Método de Bragg, 476
 — de Debye y Scherrer, 477
 — de Lane, 475
 — de Powder, 471
 — de rotación, 476
 Momento dipolar cilíndrico conductor, 19, 22 s
 — — conductor, 8
 — — dieléctrico, 43 s, 65
 — — disco plano circular, 33
 — — esfera conductora, 19
 — eléctrico, 44
 — magnético, 136
 — — en campo variable, 300
- Ondas, electromagnética, véase Ondas electro-
 magnéticas
 — extraordinarias, 379 ss
 — hidromagnética, 262
 — — absorción, 265
 — ordinaria, 379
 — principal, 350
 — propagación por la superficie de un líquido, 41
 — tipo magnético, 348
 — choque, véase Ondas de choque
 — de choque en magnetohidrodinámica, 273, 275 ss
 — — débiles, 274
 — — en campos magnéticos débiles, 274
 Ondas E, 337 s, 348 ss
- Ondas electromagnéticas, 285 ss
 — — absorción de, por pequeñas partículas, 359 s
 — — en medios anisótropos (XI), 369 ss
 — — — — extraordinarias, 380 ss
 — — — — ordinaria, 380
 — — dispersión (XIV), 441 ss
 — — — por pequeñas partículas, 354
 — — en resonadores, 348 ss
 — — plano de frecuencia constante, 312 ss, 318
 — — — en un medio absorbente, 314
 — — — — anisotrópico, 371 ss
 — — — — transparente, 313
 — — — — homogéneas, 313
 — — — no homogéneas, 313
 — — propagación de las (X), 369 s
 — — — en guías de ondas, 347
 — — — en un medio homogéneo, 336 ss
 — — reflexión y retracción de, 322 ss, 335 s
 — — en medios anisótropos (XI), 369 ss
 — extraordinarias, 380
 — H, 337, 339 s, 348 ss
 — magnetohidrodinámicas, 262
 — — absorción de las, 265
 — de elipsoide cargado, 33
 — ordinarias, 380
 — principales en guía ondas, 33
 Opalescencia crítica, 460 ss
 Óptica geométrica, 319 ss
- Paso de partículas rápidas a través de la ma-
 teria (XII), 405
 Pérdidas eléctricas, 302
 — magnéticas, 302
 — de energía para partículas rápidas, 405 ss
 — — caso relativista, 411
 Permeabilidad magnética, 137
 — — de cristales, 369
 — — dispersión, 299 ss
 — — propiedades analíticas, 311
 — — tensor, 142
 Permitividad dieléctrica de cristales, 369 ss
 — — dispersión de, 294 ss
 — — de alta frecuencia, 299
 — — de baja frecuencia, 298
 — — de una mezcla, 54 ss
 — — electrostática, 45
 — — propiedades analíticas, 305 ss
 — — tensor, 69, 83 ss, 387 ss, 399, 450 s
 — — variación espacial, 397 ss
 Piezoelectricidad, 72, 84, 87

- Piezomagnetismo, 142
- Piroelectricidad, 72 s
- Placa circular dieléctrica, 51, 68, 69, 74
- Poder de frenado, 408
- Polarización, 43
 - coeficiente, 46
 - de dieléctrico en campo variable, 297
 - de ondas electromagnéticas en un medio anisotrópico, 376
 - en cristales biáxicos, 382
 - en medio girotrópico, 394 ss
 - en óptica geométrica, 321
 - total, ángulo de, 327
- Potencia de detención, 408
- Potencial, contacto, 120
 - eléctrico complejo, 15
 - — escalar, 2 s, 412
 - — vector, 15, 412
 - vector magnético, 143
- Potenciales de contacto, 120
- Polarización dieléctrica, 44
- Principio de Fermat, 320
- Problema Wedge, 16 s
- Profundidad de penetración, 225, 330 s
 - — en un superconductor, 199
- Punto de Curie antiferromagnético, 197 s
 - — antiferromagnético, 197 s
 - — ferroeléctrico, 100
 - — ferromagnético, 175
- Radiación de Cherenkov, 419
 - del cuerpo negro en un medio transparente, 431 s
- Reactancia, 235
- Reflexión total, 328
 - ángulo de, 328
- Refracción cónica externa, 386
 - — interna, 384, 386
- Regiones de transparencia, 303
- Relación de dispersión, 261
- Relaciones de Thomson, 128
- Representación conforme, 15
 - método de, 14 ss
- Resistencia, 235
 - compleja, 234
- Resonadores, 343 ss
 - calidad de los, 345
- Sección principal, 380
- Solenoide, 163, 167 s
- Superconductibilidad (VI), 199
 - desaparición de la, 207
 - punto de transición, 199
- Superconductores, autoinductancia, 204
 - campo crítico, 206
 - corrientes en, 200
 - elipsoidal, 202, 217
 - estado intermedio, 212 ss
 - impedancia, 333 s
 - múltiplemente conexos, 203 ss
 - propiedades magnéticas, 199 ss
 - rotación, 252
 - termodinámica, 206 ss
- Superficie de los rayos, 374 ss
 - de los vectores de onda, 374ss, 379, 382ss, 393 ss
- Susceptibilidad eléctrica, 46
 - — signo de la, 75 s
 - magnética, 137 s
 - — signo de la, 138, 154
- Tensor de constantes elásticas, 90
 - de polarizabilidad, 8, 228
 - dieléctrico, 69; véase también Permitividad dieléctrica
 - momento cuadrupolar, 33
 - piezoeléctrico, 89, 91 ss
 - — magnética, 228
 - de tensiones, 77, 84 s
 - — de Maxwell, 36
- Teorema de reciprocidad, 342 s
 - de Thomson, 8
- Tiempo de relajación de Debye, 459
 - — maxwelliano, 459
- Trabajo de extracción, 119
- Vector de Poynting, véase Energía, flujo de
 - rayo, 374 ss
- Velocidad de fase, 260
 - de grupo, 261, 320, 375
 - de la luz en un medio en movimiento, 322 s

